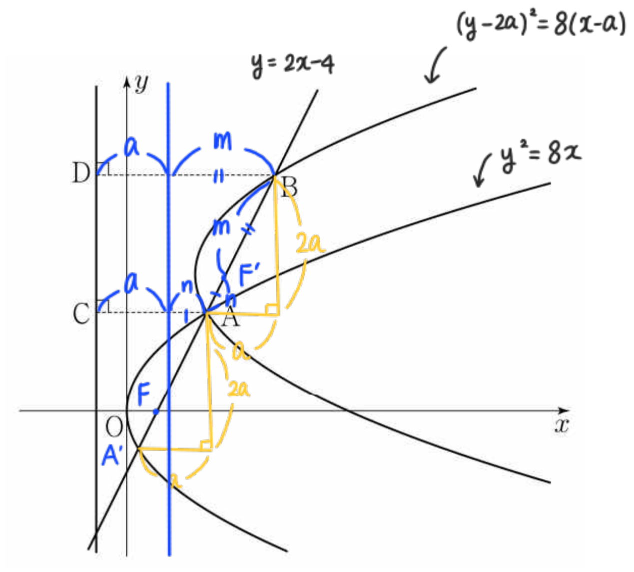
수학 영역

1. 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



[2022학년도 6월 모의평가 기하 29번]

i) $y^2=8x$가 x축으로 $+a$, y축으로 $+2a$ 만큼 평행이동

$\Rightarrow (y-2a)^2=8(x-a)$는 $y=2x-4$을 지남

$\Rightarrow$ 점A = (점A'의 x좌표 $+a$, 점A'의 y좌표 $+2a$)

점B = (점A의 x좌표 $+a$, 점A의 y좌표 $+2a$)

ii) $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=a+n+a+m-(m+n)=2a$

iii) a는 $y^2=8x$와 $y=2x-4$의 두 교점의 x좌표의 차

$\Rightarrow (2x-4)^2=8x$

$4x^2-16x+16=8x$

$4x^2-24x+16=0$

$\alpha+\beta=6$

$\alpha\beta=4$

$\Rightarrow (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=20$

$\therefore k^2=4a^2=80$

2. 좌표평면 위의 네 점 A(2, 0), B(0, 2), C(−2, 0), D(0, −2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$ or $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AD}$

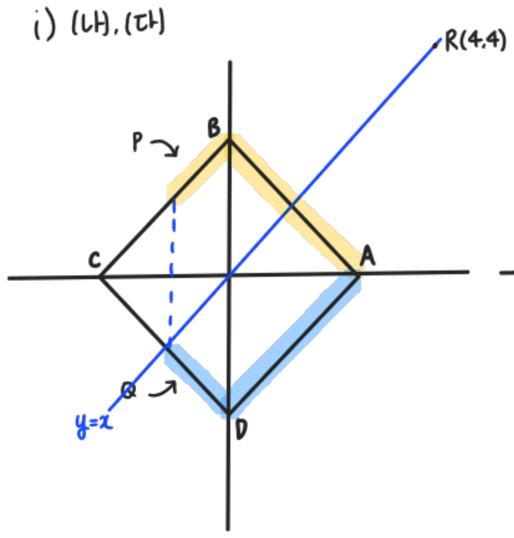
$= \overrightarrow{PQ} \,//\, y=x$　　$= \overrightarrow{PQ} \perp y=x$

(가) $(\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AD}) = 0$
(나) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq -2$이고 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$이다.
(다) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq -2$이고 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$이다.

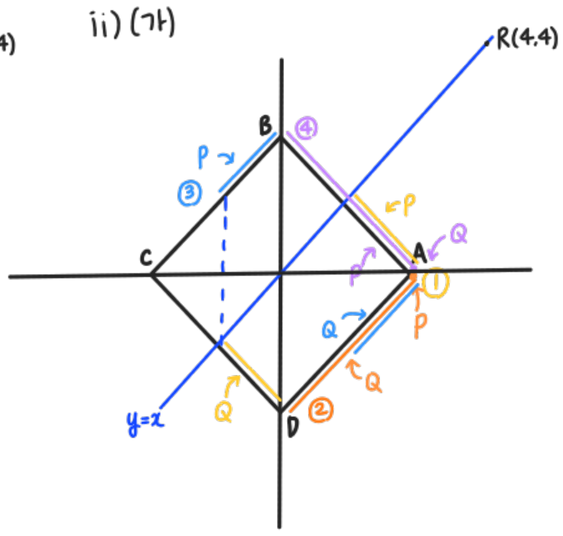
점 R(4, 4)에 대하여 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

[2022학년도 6월 모의평가 기하 30번]

i) (나), (다)



ii) (가)



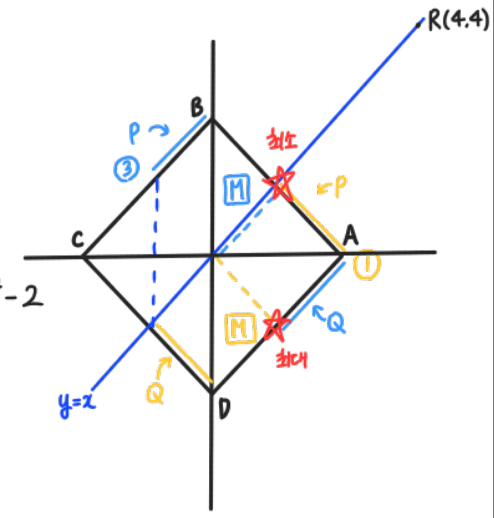
iii) ①③ : 점P,Q는 종속적으로 움직임 ⇒ 중점M

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$

$= (\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MP}) \cdot (\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MQ})$

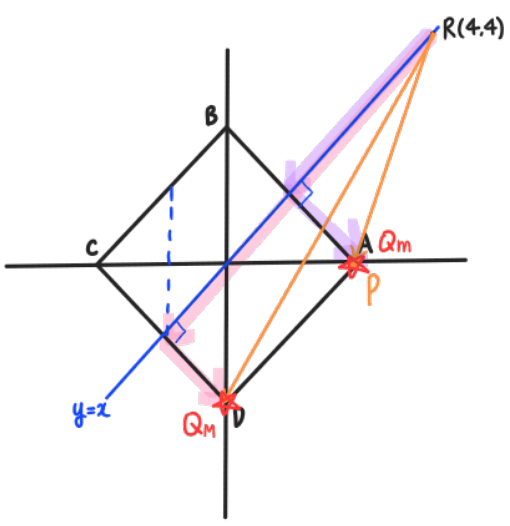
$= |\overrightarrow{RM}|^2 + \underbrace{\cancel{\overrightarrow{RM} \cdot (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP})}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}}_{=-2} = |\overrightarrow{RM}|^2 - 2$

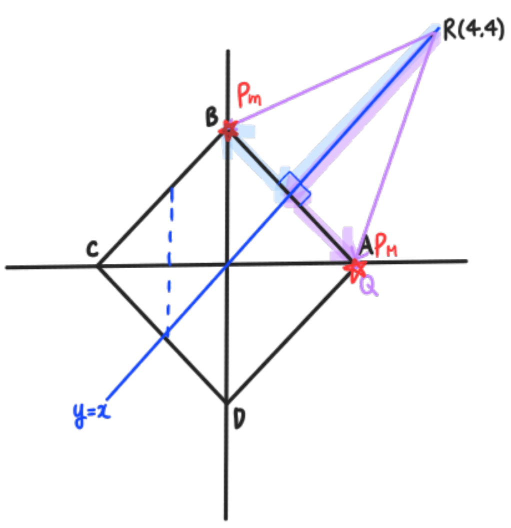
최소 : 18 − 2 = 16
최대 : 34 − 2 = 32



② : 점P고정

④ : 점Q고정





$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ_m} = (3\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20$

$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ_M} = (3\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cdot (5\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 32$

"y=x 기준으로 벡터성분을 새로 잡고 계산!"

$\overrightarrow{RP_m} \cdot \overrightarrow{RQ} = (3\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 16$

$\overrightarrow{RP_M} \cdot \overrightarrow{RQ} = (3\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20$