이 책의 차례

Contents

EBS*i* 홈페이지(www.ebs*i*.co.kr)에 들어 오셔서 회원으로 등록하세요.
본 방송 교재의 강의 프로그램은 EBS 인터넷 방송을 통해 다시 보실 수 있습니다.
(VOD 무료 서비스 실시)

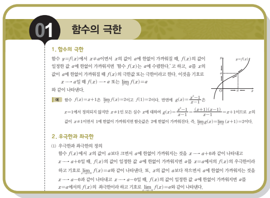
이 책의 구성

Structure

이 책의 구성

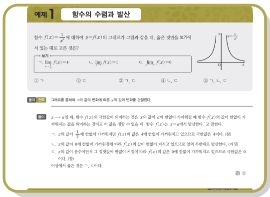
1 개념 정리 & 확인 문제

교과서의 핵심 내용을 체계적으로 정리하였으며 개념, 정리, 공식에 대한 이해를 확인할 수 있는 문제들을 제시하였다.



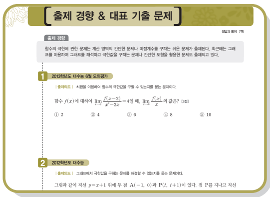
2 예제 & 유제

예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념을 풀이 전략으로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.



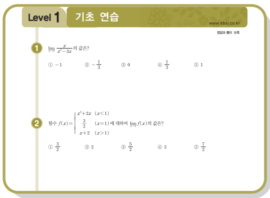
3 출제 경향 & 대표 기출 문제

대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.



4 Level 1 – Level 2 – Level 3

Level 1 기초 연습은 기초 개념의 인지 정도를 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문제를, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제해결능력을 함양할 수 있는 문항들과 신유형 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.



2014학년도 대학수학능력시험 수학영역의 특징

○ 수학 교과의 수준별 편성에 따라 수준별 시험(A형 / B형)을 도입

○ 출제 범위

– A형 : 수학 I, 미적분과 통계 기본

– B형 : 수학 I, 수학 II, 적분과 통계, 기하와 벡터

※ 수학 I 에서도 수준에 따라 A형과 B형에서 다른 문항이 출제될 수 있다.

○ 문항 유형 및 문항 수

구분	문항 유형	문항 수	시험 시간	문항 배점	총 배점
수학	5지선다형 21문항 (세트형 문항 포함), 단답형 9문항	30문항	100분	2점, 3점, 4점	100점

2014학년도 대수능에서 처음 선보이는 세트형 문항에 대비하기 위해 부록으로 세트형 문항을 수록하였다.

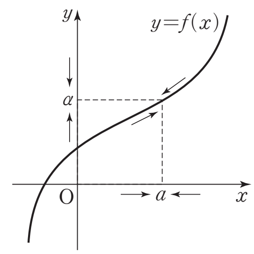
01 함수의 극한

1. 함수의 극한

함수 $y=f(x)$에서 $x\neq a$이면서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 '함수 $f(x)$는 α에 수렴한다.' 고 하고, α를 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라고 한다. 이것을 기호로

$$x \longrightarrow a\text{일 때 } f(x) \longrightarrow \alpha \text{ 또는 } \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$

와 같이 나타낸다.



예 함수 $f(x)=x+1$은 $\lim_{x\to1} f(x)=2$이고 $f(1)=2$이다. 반면에 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$은 $x=1$에서 정의되지 않지만 $x\neq1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$이므로 x의 값이 $x\neq1$이면서 1에 한없이 가까워지면 함숫값은 2에 한없이 가까워진다. 즉, $\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}(x+1)=2$이다.

2. 우극한과 좌극한

(1) 우극한과 좌극한의 정의

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워지는 것을 $x\longrightarrow a+0$과 같이 나타내고 $x\longrightarrow a+0$일 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 $f(x)$의 우극한이라 하고 기호로 $\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$와 같이 나타낸다. 또, x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워지는 것을 $x\longrightarrow a-0$과 같이 나타내고 $x\longrightarrow a-0$일 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 $f(x)$의 좌극한이라 하고 기호로 $\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha$와 같이 나타낸다.

참고 $x\longrightarrow 0+0$은 $x\longrightarrow +0$으로, $x\longrightarrow 0-0$은 $x\longrightarrow -0$으로 나타낸다.

(2) 좌극한, 우극한과 함수의 극한값

일반적으로 $x\longrightarrow a$일 때 함수 $f(x)$의 극한이 존재하려면 $x\longrightarrow a$일 때 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 서로 같아야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha \iff \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$

참고 분수함수, 절댓값 기호를 포함하는 함수, 가우스 기호를 포함하는 함수 등 구간별로 분리된 함수의 경우에는 좌극한과 우극한을 따로 계산해야 하는 경우가 많다.

확인 문제

정답과 풀이 5쪽

1 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$에 대하여 $x=3$에서의 함숫값과 $x\longrightarrow 3$일 때 극한값의 존재여부를 조사하고 존재하는 경우 그 값을 구하시오.

2 다음 극한값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $\lim_{x\to1+0}|x|$ (2) $\lim_{x\to1-0}|x|$ (3) $\lim_{x\to1}|x|$ (4) $\lim_{x\to1+0}[x]$ (5) $\lim_{x\to1-0}[x]$

3. 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)=c\alpha$ (단, c는 상수)

(2) $\lim_{x\to a} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x\to a} \{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x)\neq 0$, $\beta\neq 0$)

예 $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$이면 $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0} 1=1$이지만 $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x=0$, $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$ 또는 $-\infty$가 되어 극한의 성질 (4)가 성립하지 않는다. 즉, 함수의 극한에 대한 성질은 각 함수의 극한값이 존재할 때만 사용할 수 있다.

참고 $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ 꼴의 극한값은 $x=-t$로 치환하여 문제를 푼다. 예를 들어 $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$의 경우에 $x=-t$로 치환하면 $x\longrightarrow -\infty$일 때 $t\longrightarrow \infty$이므로 $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{(-t)^2}}{-t}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{t^2}}{-t}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{t}{-t}=\lim_{t\to\infty}(-1)=-1$이다.

정답과 풀이 5쪽

확인 문제

3 함수 $f(x)=x^2-1$, $g(x)=x+1$일 때, 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}$

(2) $\lim_{x\to 1}\{f(x)-g(x)\}$

(3) $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)$

(4) $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

4 함수 $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^3-x+1}$에 대하여 $\lim_{x\to -\infty} f(x)$의 값을 구하시오.

4. 극한값의 계산

(1) $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값

(i) 분수식 : 분모, 분자를 각각 인수분해한 후 공통인수를 약분한다.

(ii) 무리식 : 분모 또는 분자에 있는 무리식을 유리화한다.

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값

분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

※ 분모, 분자가 다항식일 때 다음 과정으로 정리하여 기억해 둘 수 있다.

① (분모의 차수) > (분자의 차수) $\Longrightarrow$ 0으로 수렴

② (분모의 차수) = (분자의 차수) $\Longrightarrow$ 최고차항의 계수의 비로 수렴

③ (분모의 차수) < (분자의 차수) $\Longrightarrow$ ∞ 또는 $-\infty$로 발산

(3) $\infty-\infty$ 꼴의 극한값

(i) 다항식 : 최고차항으로 묶는다.

(ii) 무리식 : 유리화한다.

(4) $0\cdot\infty$ 꼴의 극한값

분수식은 통분하고 무리식은 유리화하여 $\frac{0}{0}$ 꼴이나 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

참고 • $\frac{c}{0}$ 꼴의 극한값 (단, c는 0이 아닌 상수)

상수 c의 부호와 분모가 취하는 값의 부호에 따라 ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다.

예를 들어 $\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$이다.

• $[x]$가 포함되어 있는 경우 (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(i) 좌극한과 우극한을 이용하여 구한다.

(ii) 식에 있는 항들을 $[x]=x-h\,(0\le h<1)$로 바꾸어 구한다.

정답과 풀이 5쪽

확인 문제

5 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+2x-3}{3x^2+x}$ (3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-27}{x^2}$

6 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x+x^2}+x}$ (2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$

5. 함수의 극한과 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $f(x)\le g(x)$이면 $\lim_{x\to a} f(x)\le\lim_{x\to a} g(x)$, 즉 $\alpha\le\beta$

(2) $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$

예 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$의 값을 구해 보자.

$-1\le\sin x\le 1$이므로 각 변에 $\frac{1}{x}$을 곱한다. 이때, $x\longrightarrow\infty$이므로 $x>0$이고 $-\frac{1}{x}\le\frac{1}{x}\sin x\le\frac{1}{x}$이다.

그런데 $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\le\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x\le\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$에서 $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$이다.

6. 미정계수의 결정

(1) $\frac{0}{0}$ 꼴의 미정계수

주어진 식이 수렴하는 경우 분모가 0으로 수렴하면 분자 역시 0으로 수렴한다.
즉, (분모) $\longrightarrow$ 0이면 (분자) $\longrightarrow$ 0임을 이용하여 미정계수를 결정한다.

> $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 상수)일 때
>
> (i) $\lim_{x\to a} g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a} f(x)=0$
>
> (ii) $\lim_{x\to a} f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a} g(x)=0$ (단, $\alpha\ne0$)

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 미정계수

주어진 식이 수렴하는 경우, 즉 $f(x)$, $g(x)$가 다항함수이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha\ne0$인 상수)일 때
($f(x)$의 차수)$=$($g(x)$의 차수)이고, 극한값 α는 $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 계수의 비임을 이용하여 미정계수를 결정한다.

확인 문제

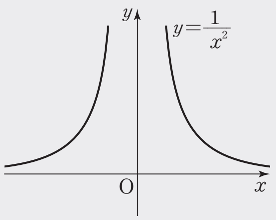
정답과 풀이 5쪽

7 $\lim_{x\to0} x\cos x$의 값을 구하시오.

8 $\lim_{x\to1}\frac{ax+4}{x-1}=b$일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

예제 1 함수의 수렴과 발산

함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=4$　　ㄴ. $\lim_{x\to 0} f(x)=1$　　ㄷ. $\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 전략 그래프를 통하여 x의 값의 변화에 따른 y의 값의 변화를 관찰한다.

풀이 $x \longrightarrow a$일 때, 함수 $f(x)$의 극한값이 의미하는 것은 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때 함수 $f(x)$의 값이 한없이 가까워지는 값을 의미하는 것이고 이 값을 정할 수 없을 때 '함수 $f(x)$는 $x=a$에서 발산한다.' 고 말한다.

ㄱ. x의 값이 $\frac{1}{2}$에 한없이 가까워지면 $f(x)$의 값은 4에 한없이 가까워지고 있으므로 극한값은 4이다. (참)

ㄴ. x의 값이 0에 한없이 가까워짐에 따라 $f(x)$의 값이 한없이 커지고 있으므로 양의 무한대로 발산한다. (거짓)

ㄷ. x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐에 따라 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지고 있으므로 극한값은 0이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

정답과 풀이 6쪽

확인유제 1 극한값이 존재하는 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

ㄱ. $\lim_{x\to 1}[x]$　　ㄴ. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|}$　　ㄷ. $\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{[x]}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

발전유제 2 함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (x\ge 1) \\ x^2-3x+a & (x<1) \end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재할 때, b의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -3　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 3

예제 2 극한의 기본 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x)=b$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

(단, $a \neq 0$이고 b, c는 상수이다.)

보기

ㄱ. $\lim_{x \to a} \{f(x)-g(x)\}=c$이면 $\lim_{x \to a} g(x)=b-c$이다.

ㄴ. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=1$이면 $\lim_{x \to a} \left\{g(x)-\frac{b}{a}x\right\}=0$이다. (단, $g(x) \neq 0$)

ㄷ. $\lim_{x \to a} g(x)=\infty$일 때, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=0$이다. (단, $g(x) \neq 0$)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 전략 $f(x)$와 $g(x)$를 이용하여 $h(x)$를 만든 후 $h(x)$의 극한값으로부터 $g(x)$의 극한값을 구한다.

풀이 ㄱ. $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $\lim_{x \to a} f(x)=b$이고 $\lim_{x \to a} h(x)=c$이므로

$g(x)=f(x)-h(x)$에서 $\lim_{x \to a} g(x)=\lim_{x \to a}\{f(x)-h(x)\}=\lim_{x \to a} f(x)-\lim_{x \to a} h(x)=b-c$이다. (참)

ㄴ. $\frac{f(x)}{g(x)}=h(x)$라 하면 $\lim_{x \to a} h(x)=1$이므로

$\lim_{x \to a} \left\{g(x)-\frac{b}{a}x\right\}=\lim_{x \to a} \left\{\frac{f(x)}{h(x)}-\frac{b}{a}x\right\}=\frac{b}{1}-\frac{b}{a}\times a=0$ (참)

ㄷ. $\lim_{x \to a} g(x)=\infty$일 때, $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)}=0$이므로 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)}=b\times 0=0$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

정답과 풀이 6쪽

확인유제 3 $\lim_{x \to 4} \frac{f(x)}{x-4}=3$일 때, $\lim_{x \to 4} \frac{4f(x)-\{f(x)\}^2}{(x-4)\{4-f(x)\}}$의 값은? (단, $f(x) \neq 4$)

① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ 6 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 10

발전유제 4 공역이 양의 실수 전체의 집합인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x)=4$, $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{g(x)}}{\sqrt{f(x)}}=2$일 때, $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

예제 3 극한값의 계산

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)=-1$ ㄴ. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{\sqrt{x}-1}=2$ ㄷ. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-x+1)=\frac{5}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 전략 무리식은 유리화하고 $\frac{0}{0}$ 꼴은 분모, 분자의 공통인수를 약분하여 구한다.

풀이

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{x+1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x+1}=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-2x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-2x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x-1)(\sqrt{x}+1)=2$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-x+1)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x+1}-x+1)(\sqrt{x^2+3x+1}+x-1)}{\sqrt{x^2+3x+1}+x-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+3x+1}+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+3x+1}+x-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}=\frac{5}{\sqrt{1+0+0}+1-0}=\frac{5}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

정답과 풀이 6쪽

확인유제 5 $\lim_{x\to 0}\tan x\cos\frac{1}{x}$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

발전유제 6 함수 $f(x)=\frac{|x^3|-3x-4}{3x^3+|x|+2}$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{3}$ ㄴ. $\lim_{x\to 1}f(x)=-1$ ㄷ. $\lim_{x\to -1}f(x)=1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제4 극한값의 활용

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=1$이고 $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=2$일 때, $f(1)$의 값은?

① -9　② -5　③ 0　④ 5　⑤ 9

풀이 전략 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수, 인수를 구하여 함숫값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=1$에서 $f(x)$는 이차식이고 이차항의 계수는 1이다.

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=2$에서 $\lim_{x\to-2}(x^2+x-2)=4-2-2=0$이므로

$$\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)=0$$

즉, $f(x)$는 $x+2$를 인수로 가진다.

$f(x)=(x+2)(x-a)$로 놓으면

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-a)}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x-a}{x-1}=\frac{2+a}{3}=2$$

이므로 $a=4$이다.

따라서 $f(x)=(x+2)(x-4)$이므로 $f(1)=-9$

답 ①

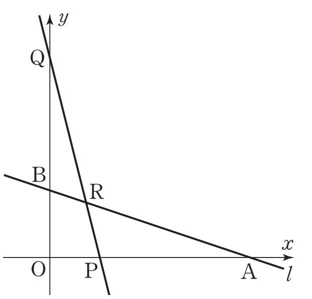
정답과 풀이 7쪽

확인유제 7 두 곡선 $y=a(x-1)^2\ (x\geq1)$, $y=\sqrt{\frac{x}{a}}+1$의 교점을 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$라 하자. $\lim_{a\to\infty}(\alpha+\beta)$의 값은?

(단, a는 양수이다.)

① 0　② 2　③ $2\sqrt{2}$　④ 4　⑤ $4\sqrt{2}$

발전유제 8 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$을 지나는 직선 l이 있다. 두 점 $\mathrm{P}(t,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 4t)$가 원점 O를 출발하여 $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OQ}}=1:4$를 유지하면서 점 P는 x축의 양의 방향으로, 점 Q는 y축의 양의 방향으로 움직이고 있다. 직선 PQ와 직선 l의 교점 R의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}$의 값은?



① $\frac{12}{11}$　② $\frac{10}{11}$　③ $\frac{8}{11}$　④ $\frac{6}{11}$　⑤ $\frac{4}{11}$

출제 경향 & 대표 기출 문제

정답과 풀이 7쪽

출제 경향

함수의 극한에 관한 문제는 계산 영역의 간단한 문제나 미정계수를 구하는 쉬운 문제가 출제된다. 최근에는 그래프를 이용하여 그래프를 해석하고 극한값을 구하는 문제나 간단한 도형을 활용한 문제도 출제되고 있다.

1 2013학년도 대수능 6월 모의평가

| 출제의도 | 치환을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

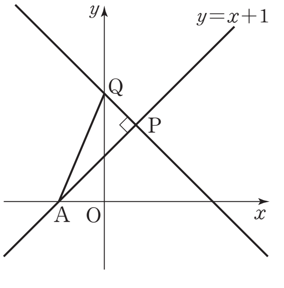
함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x-2)}{x^2-2x}=4$일 때, $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2 2012학년도 대수능

| 출제의도 | 그래프에서 극한값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$과 $\mathrm{P}(t,\ t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}$의 값은? [3점]



① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

정답과 풀이 8쪽

1 $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2-3x}$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 1

2 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & (x<1) \\ \frac{3}{2} & (x=1) \\ x+2 & (x>1) \end{cases}$에 대하여 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

3 $\lim_{x \to -3+0} (x+[x])+\lim_{x \to -3-0} (x+[x])$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -10

4 등식 $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}=b$가 성립하도록 두 상수 a, b의 값을 정할 때, $10a+2b$의 값은?

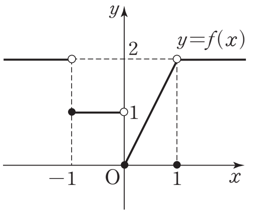
① -9 ② -2 ③ 7 ④ 11 ⑤ 16

정답과 풀이 8쪽

1 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$$\lim_{x\to+0} f(x)+\lim_{x\to-0}\{f(x)\}^2+\lim_{x\to-0} f(f(x))$$

의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

2 함수 $f(x)=\dfrac{a\sqrt{x^2+7}-b}{x-3}$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to3} f(x)=\frac{3}{4}a$이고, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=1$일 때, 상수 a, b에 대하여 $10a+b$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(x)>0$이고 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\{f(x)\}^2}=4$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-g(x)}{g(x)}$의 값은? (단, $f(x)\neq0$)

① -1 ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $-\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ 1

4 함수 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1-|\sqrt{x}-1|-2}{\sqrt{x}-1}$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to1+0} f(x)+\lim_{x\to1-0} f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5 함수 $f(x)=x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$의 값은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② 0 ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{3}{2}$

정답과 풀이 9쪽

1 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+< x >}-x)$의 값은? (단, $< x >$는 x보다 작지 않은 최소의 정수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

2 두 양의 실수 a, b와 음의 실수 c에 대하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha>\beta$)

보기

ㄱ. $|\alpha|<|\beta|$이다.

ㄴ. a가 0에 한없이 가까워질 때, α는 $-\frac{c}{b}$에 수렴한다.

ㄷ. a가 0에 한없이 가까워질 때, β는 발산한다.

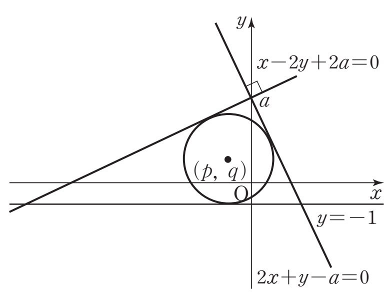
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to+0}\frac{(x^3-2x^2)f\left(\frac{1}{x}\right)-2}{2x^2-x}=3$을 만족시키고 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x}=\alpha$일 때, 상수 α의 값은?

① $-\frac{7}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{2}$

신유형

4 그림과 같이 y축 위의 점 $(0,\ a)$에서 수직으로 만나고 있는 두 직선 l : $2x+y-a=0$과 m : $x-2y+2a=0$이 있다. 중심이 $(p,\ q)$이고 두 직선 l, m과 직선 $y=-1$로 둘러싸인 삼각형에 내접하는 원에 대하여 $\lim_{a\to+0}p$의 값은?



① $\frac{\sqrt{5}-3}{4}$ ② $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ ③ $\frac{-\sqrt{5}-3}{4}$ ④ $\frac{-\sqrt{5}-3}{2}$ ⑤ -3

02 함수의 연속

1. $x=a$에서의 연속과 불연속

(1) $x=a$에서의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여

(i) $x=a$에서 함숫값 $f(a)$가 존재하고

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하며

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(2) $x=a$에서의 불연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다.

즉, 위의 세 조건 중 어느 하나라도 만족하지 못하면 불연속이다.

참고 다음 세 경우는 $x=a$에서 불연속인 경우이다.

(i) 함숫값의 존재성

$x=a$인 점에서 함숫값이 존재하지 않으면 $x=a$에서 불연속이다. 예를 들어 $f(x)=\frac{1}{x}$이면 $x=0$에서 함숫값이 존재하지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

(ii) 극한값의 존재성

$\lim_{x\to a+0} f(x) \neq \lim_{x\to a-0} f(x)$이면 극한값이 존재하지 않으므로 $x=a$에서 불연속이다. 이 경우는 그래프를 이용하여 묻는 경우가 있으므로 그래프와 함께 익혀 둘 필요가 있다.

(iii) 함숫값과 극한값이 같지 않으면 불연속이다. 극한값과 함숫값이 존재하지만 같지 않은 경우이다.

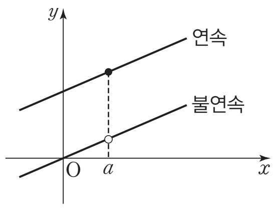
2. 함수의 연속과 그래프

(1) $x=a$에서 연속

$\Longleftrightarrow$ $x=a$에서 그래프가 연결되어 있다.

(2) $x=a$에서 불연속

$\Longleftrightarrow$ $x=a$에서 그래프가 끊어져 있다.



확인 문제

정답과 풀이 10쪽

1 다음 함수의 $x=0$에서의 연속성을 조사하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $f(x)=x+1$

(2) $g(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x\geq 0) \\ x+1 & (x<0) \end{cases}$

(3) $h(x)=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right]$

2 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$이 $x=1$에서 불연속인 이유를 설명하시오.

3. 구간

(1) $a<b$인 두 실수 a, b에 대하여 실수의 집합 $\{x|a\le x\le b\}$, $\{x|a<x<b\}$, $\{x|a\le x<b\}$, $\{x|a<x\le b\}$를 구간이라 하며 차례대로 간단히 기호 $[a,\ b]$, $(a,\ b)$, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$로 나타낸다. 이때, 구간 $(a,\ b)$를 열린 구간, $[a,\ b]$를 닫힌 구간, $[a,\ b)$와 $(a,\ b]$를 반닫힌 구간 또는 반열린 구간이라고 한다.

(2) 실수의 집합 $\{x|x\le a\}$, $\{x|x<a\}$, $\{x|x\ge a\}$, $\{x|x>a\}$도 역시 구간이라 하며 $-\infty$와 ∞를 사용하여 차례대로 기호 $(-\infty,\ a]$, $(-\infty,\ a)$, $[a,\ \infty)$, $(a,\ \infty)$로 나타낸다. 특히, 실수 전체의 집합은 $(-\infty,\ \infty)$와 같이 나타낸다.

4. 구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 주어진 구간의 모든 실수에서 연속이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 연속함수라고 한다.

(1) 열린 구간 $(a,\ b)$에서의 연속

열린 구간 $(a,\ b)$의 임의의 실수 t에 대하여 $\lim_{x\to t} f(x)=f(t)$이면 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(a,\ b)$에서 연속이다.

(2) 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서의 연속

(i) 열린 구간 $(a,\ b)$에서 연속이고

(ii) $\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$이고 $\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b)$

일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 한다.

(3) 연속함수

함수 $f(x)$가 정의역의 모든 실수에 대하여 연속일 때 함수 $f(x)$를 연속함수라고 한다.

정답과 풀이 11쪽

확인 문제

3 다음 함수의 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서의 연속성을 조사하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $f(x)=x^2$

(2) $g(x)=\begin{cases} 1 & (x>1) \\ -1 & (x\le 1) \end{cases}$

(3) $h(x)=[x]$

4 함수 $f(x)=\begin{cases} 1 & (-2<x\le -1) \\ a & (-1<x<1) \\ bx+1 & (1\le x<2) \end{cases}$ 이 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속일 때, $f(-1)+f(0)+f\left(\frac{3}{2}\right)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

5. x^n 꼴을 포함한 함수의 연속 · 불연속

x^n을 포함한 함수 $f(x)$의 연속성은 $|x|>1$, $|x|<1$, $x=\pm1$인 경우로 나누어 나타낸 후 연속성을 조사한다.

(1) $|x|>1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}|x^n|=\infty$

(2) $|x|<1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$

(3) $x=1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=1$

(4) $x=-1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n$은 진동

예 함수 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}$에 대하여 함수 $f(x)$의 연속성을 조사하면 $x=\pm1$일 때의 함숫값은 $\lim\limits_{n\to\infty}(\pm1)^{2n}=1$이지만 $|x|<1$일 때 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$이고 $|x|>1$일 때 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로 $-1<x<1$에서 연속이다.

6. 무한등비급수로 표시된 함수의 연속 · 불연속

함수 $f(x)$가 공비가 x인 무한등비급수의 꼴일 때

(1) 공비 x의 범위에 따라서 경계점의 연속성을 판단한다.

(2) 첫째항이 0이 되는 경우의 함수의 연속 · 불연속을 따로 조사하여 연속성을 판단한다.

참고 '무한등비급수가 수렴하기 위해서는 공비 r에 대하여 $|r|<1$이다.'는 성질을 이용하여 함수를 구간에 따라 나누어 생각하면 함수의 연속성을 판단하기가 수월해진다.

7. 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=a$에서 연속이면 다음 각 함수도 $x=a$에서 연속이고, 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 다음 각 함수도 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)

(2) $f(x)\pm g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x)\neq0$)

(5) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ (단, $g(x)$의 치역은 $f(x)$의 정의역에 포함되고 그 구간에서 $f(x)$는 연속이다.)

설명 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$이므로 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)=f(a)g(a)$이다. 즉, 두 연속함수의 곱은 연속함수이다. 마찬가지로 합성함수 $f(g(x))$에 대하여 $g(a)=b$라 하면 $f(g(a))=f(b)$이다.
또, $g(x)=t$라 하면 $g(a)=b$이므로 $x\longrightarrow a$일 때 $t\longrightarrow b$이다. 즉, $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=\lim\limits_{t\to b}f(t)=f(b)$
따라서 $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f(g(a))$가 되어 $f(g(x))$는 $x=a$에서 연속이다.

확인 문제

정답과 풀이 11쪽

5 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 $x=1$에서의 연속성을 조사하시오.

(1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-2}{x^{2n}+1}$

(2) $g(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x^n+1)^2}{x^{2n}+1} & (x\neq1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$

6 함수 $f(x)$의 연속성을 조사하시오.

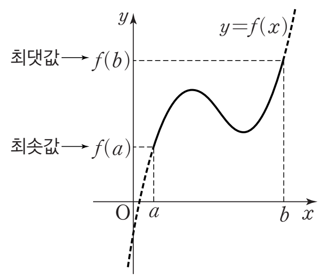
(1) $f(x)=(x^2+1)(x-1)$

(2) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

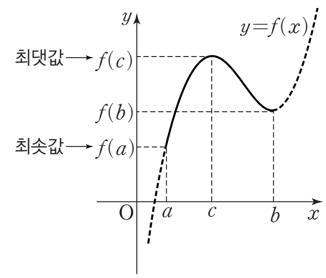
8. 최대 · 최소의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

예 [그림 1]은 양 끝점에서 최댓값과 최솟값을 갖고, [그림 2]는 열린 구간 $(a,\ b)$에 속한 $x=c$에서 최댓값을, 다른 한 끝점에서 최솟값을 갖는다. 일반적으로 닫힌 구간이 아닌 경우에는 최댓값과 최솟값이 반드시 존재한다고 말할 수 없으며 연속함수가 아닌 경우에도 항상 최댓값과 최솟값이 존재한다고는 말할 수 없다.



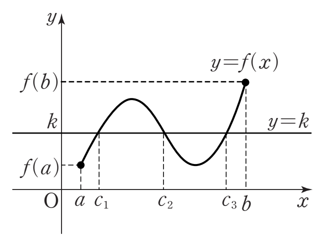
[그림 1]



[그림 2]

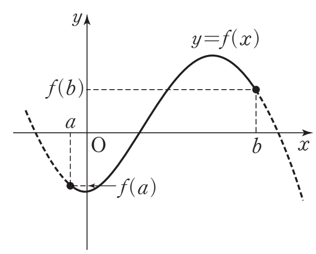
9. 중간값의 정리

(1) 중간값의 정리 : 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값을 k라 하면 $f(c)=k$가 되는 c가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.



(2) 실근의 존재성과 중간값의 정리 : 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, 즉 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

예 함수 $f(x)=3x-1$은 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 $f(-1)=-4$, $f(1)=2$이므로 $f(c)=0$이 되는 $c=\frac{1}{3}$이 열린 구간 $(-1,\ 1)$에 존재한다.



정답과 풀이 11쪽

확인 문제

7 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오.

(1) $f(x)=x^2-3$ $[-1,\ 2]$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ $[-2,\ 3]$

8 방정식 $x^3+2x-1=0$은 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명하시오.

예제 1 연속과 미정계수

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+a}{x^{2n}+1}$가 연속이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

풀이 전략 x의 값을 범위에 따라 $x>1$, $x=1$, $0<x<1$인 경우로 나누어 함수를 나타낸다.

풀이 (i) $x>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+a}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+\dfrac{a}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=x$

(ii) $x=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+a}{x^{2n}+1}=\dfrac{1+a}{1+1}=\dfrac{1}{2}(a+1)$

(iii) $0<x<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+a}{x^{2n}+1}=\dfrac{0+a}{0+1}=a$

$$\therefore f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+a}{x^{2n}+1}=\begin{cases} x & (x>1) \\ \dfrac{1}{2}(a+1) & (x=1) \\ a & (0<x<1)\end{cases}$$

이때, 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 연속이 되어야 하므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=f(1)=\lim\limits_{x\to1-0}f(x)$이다.

따라서 $1=\dfrac{1}{2}(a+1)=a$이므로 $a=1$

답 1

정답과 풀이 12쪽

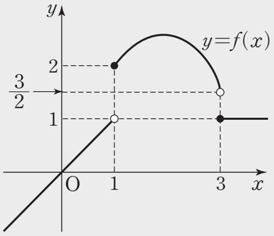
확인유제 1 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax-2}{x^2+4x-12} & (x\neq2,\ x\neq-6) \\ b & (x=2 \text{ 또는 } x=-6)\end{cases}$ 가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

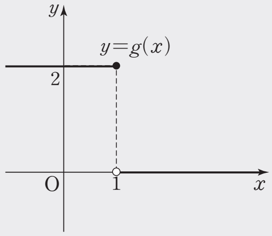
① -1 ② $-\dfrac{5}{8}$ ③ $\dfrac{3}{8}$ ④ $\dfrac{5}{8}$ ⑤ 1

발전유제 2 함수 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}+ax^2+2}{x^{2n}+1} & (|x|\neq1) \\ b & (|x|=1)\end{cases}$ 가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오.

예제2 함수의 그래프와 연속

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?





보기
- ㄱ. $\lim_{x\to 1-0} f(x)g(x)=2$
- ㄴ. $\lim_{x\to 3} f(x)g(x)=f(3)g(3)$
- ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 전략 함수 $f(x)$가 불연속인 $x=1$, $x=3$ 또는 $g(x)$가 불연속인 $x=1$에서 $f(x)g(x)$의 연속성을 확인한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to 1-0} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1-0} g(x)=2$이므로 $\lim_{x\to 1-0} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-0} f(x)\cdot\lim_{x\to 1-0} g(x)=2$ (참)

ㄴ. 구간 $(1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)g(x)=0$이므로 상수함수가 되어 연속이다.

$\therefore \lim_{x\to 3} f(x)g(x)=f(3)g(3)$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to 1+0} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1+0} g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 1+0} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+0} f(x)\cdot\lim_{x\to 1+0} g(x)=0$

따라서 $\lim_{x\to 1+0} f(x)g(x)\neq\lim_{x\to 1-0} f(x)g(x)$이므로 $x=1$에서의 극한값이 존재하지 않는다. 즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

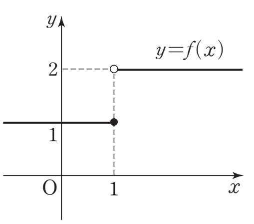
다른 풀이 ㄴ. $\lim_{x\to 3-0} f(x)=\frac{3}{2}$, $\lim_{x\to 3-0} g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 3-0} f(x)g(x)=\lim_{x\to 3-0} f(x)\cdot\lim_{x\to 3-0} g(x)=0$

$\lim_{x\to 3+0} f(x)=1$, $\lim_{x\to 3+0} g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 3+0} f(x)g(x)=\lim_{x\to 3+0} f(x)\cdot\lim_{x\to 3+0} g(x)=0$

$f(3)g(3)=1\times 0=0$이므로 $\lim_{x\to 3} f(x)g(x)=f(3)g(3)$이다. (참)

정답과 풀이 12쪽

확인유제 3 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $g(x)=0$　ㄴ. $g(x)=xf(x)$　ㄷ. $g(x)=x-1$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제3 연속함수의 성질

함수 $f(x)=x^2+\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=f(1)$이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 불연속인 실수 x는 1개 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 전략 $x=0$과 $x\neq0$인 경우로 나누어 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 (i) $x=0$이면 $x^2=0$이므로 $f(0)=0$이다.

(ii) $x\neq0$이면 $f(x)=x^2+\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$은 첫째항이 x^2이고 공비가 $\dfrac{1}{1+x^2}$인 무한등비급수이므로

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=1+x^2\text{이다.}$$

ㄱ. $f(-x)=f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=f(-1)$이다. 그런데 함수 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로 $f(1)=f(-1)$이 되어 $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=f(1)$이다. (참)

ㄷ. $f(0)=0$이지만 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)=\lim\limits_{x \to 0} (1+x^2)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고, 함수 $f(x)=1+x^2$은 $x\neq0$인 모든 실수에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 불연속인 실수 x는 1개 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이 ㄴ. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=1+(-1)^2=2$이고 $f(1)=1+1^2=2$이므로 $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=f(1)$이다. (참)

정답과 풀이 12쪽

확인유제 4 함수 $f(x)=x^2-1$에 대하여 다음 중 실수 전체의 집합에서 연속함수라고 할 수 없는 것은?

① $\{f(x)\}^2$　② $\{f(x)+1\}^2$　③ $f(f(x))$　④ $\dfrac{1}{f(x)}$　⑤ $\dfrac{1}{f(x)-x^2}$

발전유제 5 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 등식 $(x+5)f(x)=x^2+x+a$가 성립할 때, $f(-5)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -9　② -11　③ -13　④ -15　⑤ -17

예제 4 연속함수의 활용

www.ebsi.co.kr

최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)>2$	(나) $0<f(-3)=f(-1)=f(1)=f(3)<1$

방정식 $f(x)=x$의 실근에 대한 설명으로 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 실근이 2개만 존재할 수도 있다.

ㄴ. 열린 구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나의 실근이 존재한다.

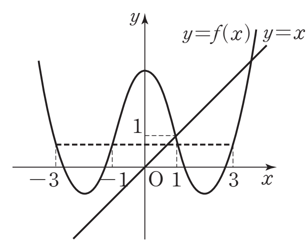
ㄷ. 열린 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나의 실근이 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 전략 $g(x)=f(x)-x$로 놓고 중간값의 정리를 이용한다.

풀이

ㄱ. 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으면 위의 두 조건을 만족한다. 이때, 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$가 두 점에서만 만나므로 방정식 $f(x)=x$의 실근이 2개만 존재할 수도 있다. (참)



ㄴ. $g(x)=f(x)-x$로 놓으면 다항함수 $f(x)$가 연속함수이고 $y=x$도 연속함수이므로 함수 $g(x)$는 연속함수이다. 그런데 $g(0)=f(0)-0>2$이고 $g(3)=f(3)-3<0$이므로 중간값의 정리에 의해 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 즉, 방정식 $f(x)=x$의 실근은 열린 구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. $g(0)=f(0)-0>2$이고 $g(1)=f(1)-1<0$이므로 중간값의 정리에 의해 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 그런데 열린 구간 $(0,\ 1)$은 열린 구간 $(-1,\ 1)$에 포함되므로 방정식 $f(x)=x$의 실근은 열린 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

정답과 풀이 13쪽

확인유제 6 닫힌 구간 $\left[-\frac{4}{5},\ 3\right]$에서 정의된 세 함수 $f(x)=x$, $g(x)=x^2-2x+1$, $h(x)=\frac{1}{x+1}$에 대하여 각 함수의 최댓값을 각각 A, B, C라 할 때, A, B, C의 크기를 바르게 비교한 것은?

① $A<B<C$ ② $B<A<C$ ③ $B<C<A$ ④ $C<A<B$ ⑤ $C<B<A$

발전유제 7 방정식 $x+\sin \pi x-1=0$의 실근이 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 1개 존재할 때, 다음 중 실근이 존재하는 구간은?

① $\left(0,\ \frac{1}{6}\right)$ ② $\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$ ④ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(\frac{2}{3},\ 1\right)$

출제 경향 & 대표 기출 문제

정답과 풀이 13쪽

출제 경향

그래프를 통한 함수의 극한에 대한 해석과 우극한, 좌극한을 이용한 극한값의 존재성에 대한 문제, 불연속인 두 함수를 곱하여 연속이 되는 함수에 대한 문제가 출제되고 있다.

1 2013학년도 대수능

| 출제의도 | 두 함수의 곱과 평행이동을 활용하여 함수의 연속성을 정확하게 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -1 & (|x|\geq 1) \\ 1 & (|x|<1) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} 1 & (|x|\geq 1) \\ -x & (|x|<1) \end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=-1$

ㄴ. 함수 $g(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.

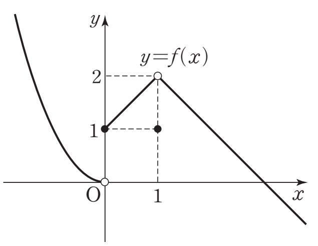
ㄷ. 함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2 2012학년도 대수능

| 출제의도 | 함수의 그래프를 보고 함수의 연속성을 판단할 수 있는지를 묻는 문제이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



보기

ㄱ. $\lim_{x\to +0} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

ㄷ. 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

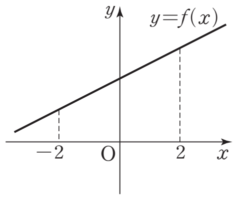
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 풀이 14쪽

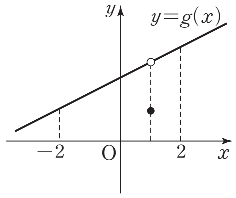
1 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프에 대하여 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속인 함수만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

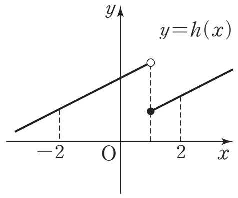
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & (x\neq1) \\ a & (x=1) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

3 $x=1$에서만 불연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to1} f(x)=a$이고 $f(1)=b$이면 $a\neq b$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4 두 함수 $f(x)=\frac{x-2}{x^2+x-6}$, $g(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$이 $x=a$에서 모두 불연속일 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

Level 2 기본 연습

정답과 풀이 14쪽

1 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x+1} & (x\neq a) \\ b & (x=a) \end{cases}$가 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이 되도록 하는 두 상수 $a,\ b$에 대하여 $10a+b$의 값은?

① -15 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

2 $x=0$에서 연속인 함수만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

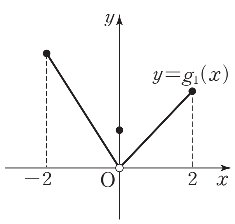
ㄱ. $f(x)=[2x]$ ㄴ. $g(x)=[x]^2+[x]$ ㄷ. $h(x)=[\sin x]$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

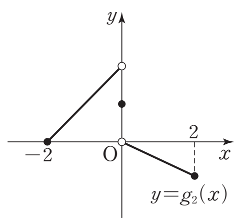
3 함수 $f(x)=\begin{cases} -x & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ 2x-1 & (x>0) \end{cases}$이고 세 함수 $y=g_1(x),\ y=g_2(x),\ y=g_3(x)$의 그래프가 보기와 같을 때, 함수 $f(x)g_k(x)$가 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이 되도록 하는 함수만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $k=1,\ 2,\ 3$)

보기

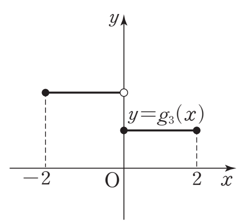
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4 두 함수 $f(x),\ g(x)$에 대하여 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고 $g(x)$는 $x=a$에서만 불연속이다. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $g(a)=0$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.
ㄷ. $\lim_{x\to a} f(x)=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

정답과 풀이 15쪽

1 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{f(x)\cdot\frac{\sin x}{(1+|\sin x|)^{n-1}}\right\}\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속일 때, $f(0)$의 값은?

① 0　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ 1

신유형

2 함수 $f(x)=[x]^3-19[x]$에 대하여 집합 A를 다음과 같이 정의한다.

$$A=\left\{a \,\middle|\, \lim_{x\to a} f(x)=f(a),\ a\text{는 0이 아닌 정수}\right\}$$

집합 A의 모든 원소의 합은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

3 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)-f(x)=x^3$을 만족시키는 연속함수 $f(x)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $f(8)+f(-8)=f(1)+f(-1)$
ㄴ. $f(x)+f(-x)$는 상수함수이다.
ㄷ. $f(0)=0$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 다섯 개의 점 A$(-2, -2)$, B$(-1, 2)$, C$(0, 3)$, D$(1, -2)$, E$(2, 2)$를 지난다. 명제 '방정식 $f(x)-(x^2-3x)=0$은 서로 다른 실근을 적어도 n개 이상 갖는다.' 가 항상 참이 되도록 하는 자연수 n의 값 중 최댓값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

5 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$
(나) 임의의 실수 x, y에 대하여 $xyf(x+y)=xyf(x)+xyf(y)+4y^2f(x)+4x^2f(y)+6x^3y^3$

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x)=0$　ㄴ. $\lim_{y\to 0} f(2+y)=8$　ㄷ. $\lim_{x\to -1} f(x)=1$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

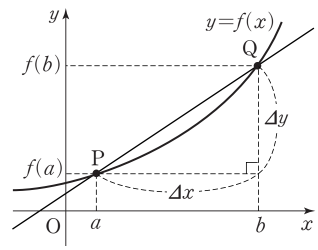
03 미분계수와 도함수

1. 평균변화율

(1) 평균변화율의 정의 : 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, y의 값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다. 이때, x의 값의 변화량에 대한 y의 값의 변화량의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 함수 $y=f(x)$에 대하여 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율이라고 한다.



(2) 평균변화율의 기하학적 의미 : 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

예 함수 $f(x)=x^2$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{3^2-1^2}{3-1}=4$이고, 이 값은 곡선 $y=x^2$ 위의 두 점 $(1,\ 1)$, $(3,\ 9)$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

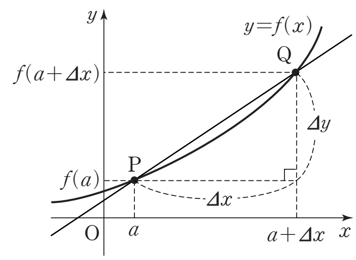
2. 미분계수

(1) 미분계수의 정의 : 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변하고, $\Delta x \longrightarrow 0$일 때 평균변화율의 극한값

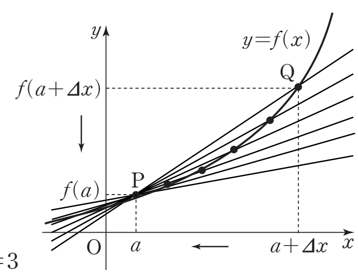
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 이 값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 또는 순간변화율이라 하고, 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다. 즉,

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



(2) 미분계수의 기하학적 의미 : 함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기를 의미한다.



예 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여

$$f'(1)=\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=3$$

이고, 이 값은 곡선 $y=x^2+x$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기와 같다.

확인 문제

정답과 풀이 17쪽

1 함수 $f(x)=2x^2+x+3$에 대하여 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 평균변화율을 구하시오.

2 $f'(a)=2$일 때, $\lim_{h \to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{2h}$의 값을 구하시오.

3. 미분가능과 연속

(1) 미분가능

① 미분가능의 뜻

함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다. 미분계수의 정의에 의하여 $f'(a)$의 값은 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 값이고, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 값은 함수 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 좌극한값과 우극한값이 서로 같은 경우를 의미한다.

따라서 다음과 같이 정리할 수 있다.

> 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다.
> $\Longleftrightarrow$ 미분계수 $f'(a)$가 존재한다.
> $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

② 미분가능한 함수

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 x의 모든 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 또, 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 x의 모든 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$를 미분가능한 함수라고 한다.

예 함수 $f(x)=x^2+2x-1$, $f(x)=-2x+1$ 등은 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이다.

(2) 미분가능과 연속

① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

② 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이지만 $x=a$에서 미분가능하지 않은 경우도 있다.

참고 ① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+f(a)\right\}=f'(a)\cdot 0+f(a)=f(a)$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

② 함수 $f(x)=|x|$는 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 $x=0$에서 연속이다. 그러나

$\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{x}{x}=1$, $\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{-x}{x}=-1$

이므로 $x=0$에서의 미분계수가 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지는 않다.

확인 문제 정답과 풀이 17쪽

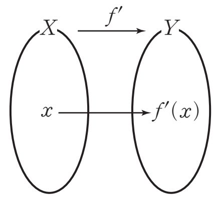
3 함수 $f(x)=x|x|$는 $x=0$에서 미분가능함을 보이시오.

4 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\ge 1) \\ ax+b & (x<1) \end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

4. 도함수

(1) 도함수의 정의

① 미분가능한 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 미분계수 $f'(x)$를 대응시키면 새로운 함수 $f' : x \longrightarrow f'(x)$를 얻을 수 있다. 이 함수를 함수 $y=f(x)$의 도함수라 하고, 기호로



$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

즉, $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$이다.

② 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하고, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

예 함수 $f(x)=x^3$의 도함수 $f'(x)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

(2) 도함수와 미분계수

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$이다. 따라서 함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 도함수 $f'(x)$에 $x=a$를 대입하여 얻은 함숫값이다.

예 함수 $f(x)=x^3$에 대하여 $x=-2$에서의 미분계수 $f'(-2)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

(방법 1) 미분계수의 정의

$$f'(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}(x^2-2x+4)=12$$

(방법 2) 도함수의 함숫값

$f'(x)=3x^2$이므로 $f'(-2)=12$

확인 문제 정답과 풀이 18쪽

5 도함수의 정의를 이용하여 함수 $f(x)=(x-1)^2$의 도함수를 구하시오.

6 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=x^4-2x+1$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 미분법의 공식

(1) 함수 $y=x^n$과 상수함수의 도함수

① $y=x^n$ (n은 자연수)이면 $y'=nx^{n-1}$

② $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

설명 ① $y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}$$

$$=nx^{n-1}$$

② $y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$

예 ① $y=x^{10}$이면 $y'=10x^9$

② $y=-1$이면 $y'=0$

(2) 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

① $y=cf(x)$이면 $y'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

② $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

③ $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

④ $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

설명 ④ $y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

예 ④ $y=(2x+1)(x^2-1)$이면

$y'=2(x^2-1)+(2x+1)\cdot 2x=6x^2+2x-2$

정답과 풀이 18쪽

확인 문제

7 $\frac{d}{dx}\{(x^2+x+1)(x^2-x+1)\}$을 간단히 하시오.

8 다항식 $x^{10}-x^3+2$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

예제 1 미분계수

$f(1)=4$, $f'(1)=2$를 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{x^3f(1)-f(x)}{x^2-1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략 미분계수의 정의를 이용한다. 즉,

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},\ f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이고, $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$, $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}$ 등이 성립한다.

풀이

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^3f(1)-f(x)}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x^3f(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-1)f(1)-\{f(x)-f(1)\}}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-1)f(1)}{x^2-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)f(1)}{(x-1)(x+1)}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+x+1)f(1)}{x+1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\\&=\frac{3}{2}f(1)-\frac{f'(1)}{2}=6-1=5\end{aligned}$$

답 ⑤

정답과 풀이 18쪽

확인유제 1 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 3일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)+1}{h}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

발전유제 2 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)$와 항상 같은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ ㄴ. $\lim_{x\to\frac{a}{2}}\frac{f(2x)-f(a)}{2x-a}$ ㄷ. $\lim_{x\to a}\frac{f(x^2)-f(a)}{x^2-a}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 2 미분가능과 연속

함수 $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & (x\ge a) \\ x^3 & (x<a) \end{cases}$ 이 모든 실수 x에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

풀이 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 다음 조건을 모두 만족시켜야 한다.

(i) $x=a$에서 연속이다.

$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$

(ii) 미분계수 $f'(a)$가 존재한다.

$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

풀이 (i) $x=a$에서 연속이다.

$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$에서 $3a-2=a^3$

$a^3-3a+2=0$, $(a-1)(a^2+a-2)=0$, $(a-1)^2(a+2)=0$ $\therefore$ $a=1$ 또는 $a=-2$

(ii) 미분계수 $f'(a)$가 존재한다.

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+0}\frac{(3x-2)-(3a-2)}{x-a}=\lim_{x\to a+0}\frac{3(x-a)}{x-a}=3$$

$$\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-0}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a-0}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}=3a^2$$

$3a^2=3$에서 $a=-1$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 구하는 상수 a의 값은 1이다.

답 ④

정답과 풀이 19쪽

확인유제 3 함수 $f(x)=\begin{cases} ax+1 & (x\ge 1) \\ bx^2+x & (x<1) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

발전유제 4 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$, $g(x)$의 이차항의 계수는 각각 -1, 1이다.
> (나) $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 각각 $(a, 1)$, $(1, b)$이다.

함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge 2) \\ g(x) & (x<2) \end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

예제 3 도함수

함수 $f(x)=x^{2014}$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)+9x-10}{x-1}$의 값은?

① 2021 ② 2022 ③ 2023 ④ 2024 ⑤ 2025

풀이 전략 미분계수와 도함수를 이용하여 함수의 극한값을 구한다.
분자의 일부분을 함수 $g(x)$로 치환하여 $\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$의 꼴이 되도록 한다.

풀이 $g(x)=f(x)+9x$로 놓으면 $g(1)=f(1)+9=10$
한편, $g(x)=f(x)+9x$에서

$$g'(x)=f'(x)+9=2014x^{2013}+9$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{f(x)+9x-10}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=2014+9=2023$$

답 ③

다른 풀이 $f(1)=1$, $f'(1)=2014$이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)+9x-10}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-1+9x-9}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)+9(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}+\lim_{x \to 1} \frac{9(x-1)}{x-1}$$

$$=f'(1)+9=2014+9=2023$$

정답과 풀이 19쪽

확인유제 5 $f(x)=\lim_{t \to x} \frac{t^3-x^3}{t-x}$일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$의 값을 구하시오.

발전유제 6 이차함수 $f(x)=ax^2+bx-2$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 등식

$$f(f'(x))=f'(f(x))$$

가 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

예제 4 미분법

www.ebsi.co.kr

$f'(1)=3$, $g(1)=2$, $g'(1)=-1$을 만족시키는 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $h(x)=2f(x)+xg(x)$에 대하여 $h'(1)$의 값을 구하시오.

풀이 전략 $h'(x)$를 구한 후 $h'(1)$의 값을 구한다.

풀이 $h(x)=2f(x)+xg(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$h'(x)=2f'(x)+g(x)+xg'(x)$$

$$\therefore h'(1)=2f'(1)+g(1)+g'(1)=6+2-1=7$$

답 7

정답과 풀이 20쪽

확인유제 7 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $2x-1$이다.
(나) $xf(x)+g(x)$는 $(x-1)^3$으로 나누어떨어진다.

$g(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$라 할 때, 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

발전유제 8 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=-8x$ (나) $g(x)=x^2f(x)$

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$의 값을 구하시오.

출제 경향 & 대표 기출 문제

정답과 풀이 20쪽

출제 경향

미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 계산하는 문제, 미분가능성과 연속성의 관계를 이용하는 문제, 미분법의 기본 공식을 이용하여 미분계수를 구하는 문제가 출제된다.

1 2013학년도 대수능

| 출제의도 | 미분가능의 정의를 이용하여 주어진 함수가 $x=1$에서 미분가능하도록 미정계수를 정할 수 있는지를 묻는 문제이다.

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<1) \\ bx^2+x+1 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2 2013학년도 대수능 6월 모의평가

| 출제의도 | 미분계수의 정의와 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=9$를 만족시킨다. $g(x)=xf(x)$라 할 때, $g'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

3 2012학년도 대수능

| 출제의도 | 미분계수의 정의와 도함수의 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

함수 $f(x)=x^2+5$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

Level 1 기초 연습

정답과 풀이 21쪽

1 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(2)=2$일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(2-2h)-f(2)}{h}$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

2 함수 $f(x)=x^3+x+1$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, -1)$에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3 함수 $f(x)=x^3-3x^2+ax-1$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2$일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는 -2이다. 함수 $g(x)=\{f(x)\}^2$에 대하여 $g'(1)$의 값은?

① -12 ② -9 ③ -6 ④ -3 ⑤ 0

5 다항식 x^4+ax^3+b가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $81(b-a)$의 값을 구하시오.

Level 2 기본 연습

정답과 풀이 21쪽

1 함수 $f(x)=x^3+ax^2-2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선의 기울기가 4일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2 함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{20} x^{2k}$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

3 함수 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\geq 1) \\ x^4+ax^3+bx^2+cx & (0<x<1) \\ 0 & (x\leq 0) \end{cases}$ 이 모든 실수 x에서 미분가능하도록 상수 a, b, c의 값을 정할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

4 이차함수 $f(x)=x^2-2x+2$에 대하여 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율을 m이라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a<b$)

보기

ㄱ. $m=0$이면 $a<1$이고, $b>1$이다.
ㄴ. $a+b>2$이면 $m>0$이다.
ㄷ. $a+b=2c$를 만족시키는 상수 c에 대하여 $f'(c)=m$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 풀이 22쪽

1 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

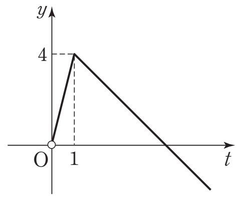
> (가) $f'(x)g(x)=2x^4+x^3+4x^2+4x+1$
> (나) $f(x)g'(x)=3x^4+3x^3-x^2+2x-2$

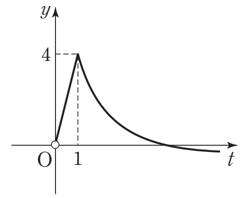
$f(2)+g(2)$의 값은?

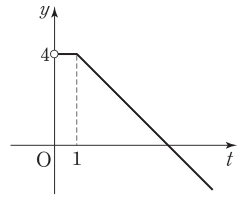
① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

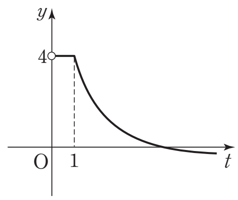
신유형

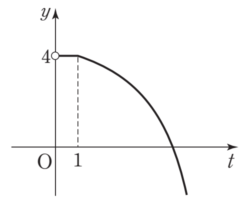
2 함수 $f(x)=\begin{cases} 4x & (x\le 1) \\ 5-x & (x>1) \end{cases}$에 대하여 닫힌 구간 $[0,\ t]$에서의 평균변화율을 $g(t)$라 하자. $t>0$일 때, $y=g(t)$의 그래프로 옳은 것은?

①


②


③


④


⑤


3 삼차함수 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2,\ 3)$을 지난다.
> (나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는 1이다.

$\dfrac{1}{a-2}+\dfrac{1}{b-2}+\dfrac{1}{c-2}$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① -2 ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

04 도함수의 활용(1)

1. 접선의 방정식

(1) 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같으므로 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

참고 접선과 수직인 직선의 방정식

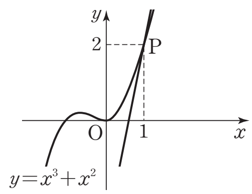
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선과 수직이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)\ (\text{단, } f'(a)\neq 0)$$

예 곡선 $y=x^3+x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$y'=3x^2+2x$이므로 기울기는 $y'_{x=1}=3+2=5$이다.

따라서 접선의 방정식은 $y-2=5(x-1)$에서 $y=5x-3$이다.



(2) 기울기가 주어진 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 기울기가 m이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

① 접점을 $(t,\ f(t))$로 놓는다.

② t에 대한 방정식 $f'(t)=m$을 만족시키는 실수 t의 값을 구한다.

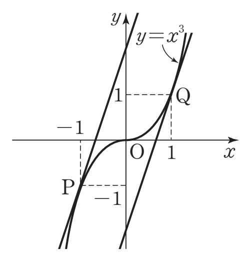
③ 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$를 구한다.

예 곡선 $y=x^3$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구해 보자.

접점을 $(t,\ t^3)$으로 놓으면 $y'=3x^2$이므로 $3t^2=3$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

점 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$에서의 접선의 방정식은 $y+1=3(x+1)$에서 $y=3x+2$

점 $\mathrm{Q}(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y-1=3(x-1)$에서 $y=3x-2$



확인 문제 정답과 풀이 23쪽

1 포물선 $y=x^2-3x$ 위의 점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 방정식은 $y=ax+b$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

2 직선 $y=2x+1$에 평행하고, 곡선 $y=x^3-x+1$에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

(3) 곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식 : 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

① 접점을 $(t,\ f(t))$로 놓는다.

② 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ …… ㉠을 구한다.

③ 점 $(a,\ b)$는 접선 위의 점이므로 $x=a$, $y=b$를 ㉠에 대입한다.

④ t에 대한 방정식 $b-f(t)=f'(t)(a-t)$에서 실수 t의 값을 구한다.

⑤ 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$를 구한다.

예 원점에서 곡선 $y=x^2+1$에 그은 접선의 방정식을 구해 보자.

접점을 $(t,\ t^2+1)$로 놓으면 $y'=2x$이므로 접선의 방정식은

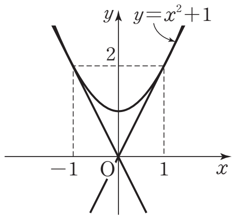
$y-(t^2+1)=2t(x-t)$이다.

접선은 원점을 지나므로 $-(t^2+1)=2t(-t)$에서 $t^2=1$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$

$y-2=-2(x+1)$에서 $y=-2x$

$y-2=2(x-1)$에서 $y=2x$

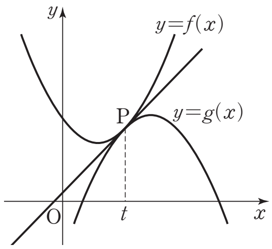


(4) 두 곡선에 접하는 직선의 방정식 : 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 접하는 직선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.

① 접점이 서로 같은 경우

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 한 점 P에서 만나므로 점 P의 x좌표를 t라 하면 $x=t$에서의 함숫값이 서로 같다. 또한, 점 P에서의 접선은 같은 직선이므로 $x=t$에서의 미분계수는 서로 같다. 즉, 다음 등식이 성립한다.

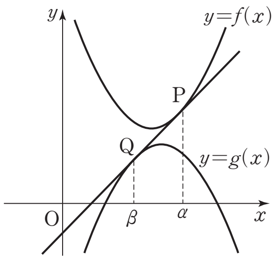
$$f(t)=g(t),\ f'(t)=g'(t)$$



② 접점이 서로 다른 경우

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 접점을 각각 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{Q}(\beta,\ g(\beta))$로 놓으면 두 점 P, Q에서의 접선은 같은 직선이다. 점 P에서의 접선은 $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$이고, 점 Q에서의 접선은 $y=g'(\beta)(x-\beta)+g(\beta)$이므로 다음 등식이 성립한다.

$$f'(\alpha)=g'(\beta),\ -\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)=-\beta g'(\beta)+g(\beta)$$



참고 등식 $f'(\alpha)=g'(\beta)$, $-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)=-\beta g'(\beta)+g(\beta)$를 공식처럼 생각할 필요는 없다. 두 접점에서 각각 구한 접선의 방정식에서 기울기가 서로 같고, y절편이 서로 같다는 등식을 세우면 된다.

정답과 풀이 23쪽

확인 문제

3 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$에서 곡선 $y=-x^2+4x-3$에 그은 접선의 방정식은 $ax+by=2$, $cx+dy=22$이다. $a+b+c+d$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d는 상수이다.)

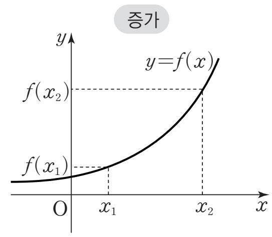
4 두 곡선 $y=x^3+ax$, $y=bx^2+1$이 $x=1$인 점에서 서로 접할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

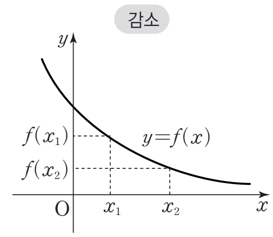
2. 함수의 증가와 감소

(1) 함수의 증가와 감소 : 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.





예 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $0<x_1<x_2$이면

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^{\,2}-x_1^{\,2}$$
$$=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$$

이므로 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가한다.

(2) 함수의 증가상태와 감소상태

① 함수 $f(x)$가 충분히 작은 양수 h에 대하여

$f(a-h)<f(a)<f(a+h)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다.

$f(a-h)>f(a)>f(a+h)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다.

② 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때

$f'(a)>0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다.

$f'(a)<0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다.

예 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $f'(x)=2x$이다. 이때, $f'(1)=2>0$이므로 $x=1$에서 증가상태에 있고, $f'(-2)=-4<0$이므로 $x=-2$에서 감소상태에 있다. 그러나 $x=0$에서는 증가상태 또는 감소상태가 아니다.

(3) 미분가능한 함수의 증가와 감소 : 함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때

① $f'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

③ 함수 $f(x)$가 증가하면 그 구간에서 $f'(x)\ge 0$이다.

④ 함수 $f(x)$가 감소하면 그 구간에서 $f'(x)\le 0$이다.

예 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $f'(x)=2x$이다.

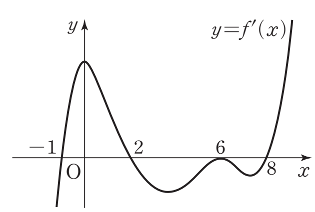
$f'(x)>0$이면 $x>0$이므로 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하고, $f'(x)<0$이면 $x<0$이므로 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 감소한다. 함수 $f(x)=x^3$은 $x_1<x_2$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$이므로 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다. 이때, $f'(x)=3x^2\ge 0$이다.

정답과 풀이 24쪽

확인 문제

5 함수 $f(x)=x^3-3x+1$의 증가, 감소를 조사하시오.

6 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 조사하시오. (단, $x>8$일 때, $f'(x)>0$이고, $x<-1$일 때, $f'(x)<0$이다.)



3. 함수의 극대와 극소

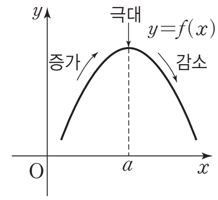
(1) 함수의 극대와 극소

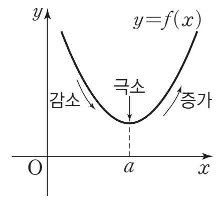
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 x의 값이 증가하면서 $x=a$의 좌우에서

① $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 변하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라고 하며, $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

② $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 변하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라고 하며, $f(a)$를 극솟값이라고 한다.

③ 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.





예 함수 $f(x)=-x^2+2x$에서 $x<1$이면 $f'(x)>0$, $x>1$이면 $f'(x)<0$이므로 x의 값이 증가하면서 $x=1$의 좌우에서 증가상태에서 감소상태로 변한다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=1$이다.

(2) 극값의 판정

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

참고 ① 일반적으로 위의 역은 성립하지 않는다. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$에서 극값을 갖지 않을 수도 있다. 예를 들어 함수 $f(x)=x^3$은 $f'(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$의 증가상태와 감소상태가 변하지 않으므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

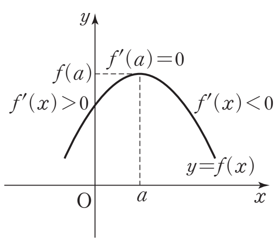
② 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가질 때, 미분계수 $f'(a)$가 존재하지 않을 수도 있다. 예를 들어 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 극소이지만 $f'(0)$은 존재하지 않는다.

(3) 미분가능한 함수의 극대와 극소의 판정

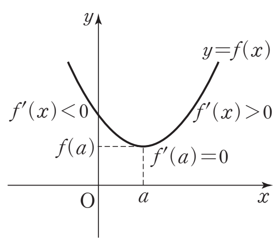
미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

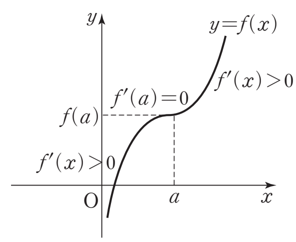
② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.



$x=a$에서 극대



$x=a$에서 극소



$x=a$에서 극대, 극소가 아니다.

확인 문제 정답과 풀이 24쪽

7 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$의 극값을 모두 구하시오.

8 함수 $f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x$의 극댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

예제 1 접선의 방정식

곡선 $y=\frac{x^3}{3}-x^2+1$에 접하고 기울기가 3인 두 직선 사이의 거리는?

① $\sqrt{10}$ ② $\frac{16\sqrt{10}}{15}$ ③ $\frac{17\sqrt{10}}{15}$ ④ $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{19\sqrt{10}}{15}$

풀이 전략 기울기가 m이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.
① 접점을 $(t, f(t))$ 또는 접점의 x좌표를 t로 놓는다.
② t에 대한 방정식 $f'(t)=m$을 만족시키는 실수 t의 값을 구한다.
③ 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$를 구한다.

풀이 $y=\frac{x^3}{3}-x^2+1$에서 $y'=x^2-2x$

접점의 x좌표를 t라 하면 $t^2-2t=3$에서 $t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$ $\therefore$ $t=3$ 또는 $t=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(3, 1)$, $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$이다.

점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식은 $y-1=3(x-3)$에서 $3x-y-8=0$

따라서 점 $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$에서 직선 $3x-y-8=0$에 이르는 거리는

$$\frac{\left|-3+\frac{1}{3}-8\right|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{32}{3\sqrt{10}}=\frac{16\sqrt{10}}{15}$$

답 ②

정답과 풀이 24쪽

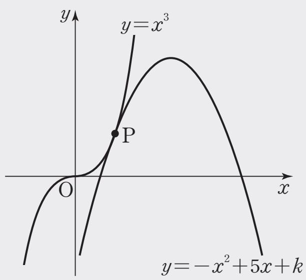
확인유제 1 직선 $y=-12x-10$이 곡선 $y=x^3+3x^2-9x+k$에 접할 때, 상수 k의 값은?

① -3 ② -5 ③ -7 ④ -9 ⑤ -11

발전유제 2 곡선 $y=x^3-3x$ 위의 원점이 아닌 한 점 P에서의 접선을 l_1이라 하자. 직선 l_1과 곡선 $y=x^3-3x$의 교점 중에서 점 P가 아닌 점을 Q라 할 때, 점 Q에서의 접선을 l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2의 기울기를 각각 m_1, m_2라 할 때, $m_1\geq 1$이면 $m_2\geq\alpha$이다. 이때, α의 최댓값을 구하시오.

예제 2 두 곡선에 공통으로 접하는 직선

그림과 같이 두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^2+5x+k$가 점 P에서 만나고 점 P에서 공통인 접선을 가질 때, 그 접선의 방정식을 $y=ax+b$라 하자. 상수 k, a, b에 대하여 $k+a+b$의 값은? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

풀이 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 만나고 그 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$가 성립한다.

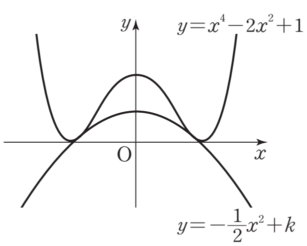
풀이 점 P의 x좌표를 t라 하자.
두 곡선이 점 P에서 만나므로 $x=t$에서의 함숫값이 서로 같다.
즉, $t^3=-t^2+5t+k$ …… ㉠
점 P에서 공통인 접선을 가지므로 $x=t$에서의 미분계수가 서로 같다.
즉, $3t^2=-2t+5$ …… ㉡
㉡에서 $3t^2+2t-5=0$, $(t-1)(3t+5)=0$ $\quad \therefore t=1$ ($\because t>0$)
$t=1$을 ㉠에 대입하면 $k=-3$
따라서 점 P의 좌표는 $(1, 1)$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은
$y-1=3(x-1)$에서 $y=3x-2$
따라서 $k=-3$, $a=3$, $b=-2$이므로 $k+a+b=-2$

답 ①

참고 $t=-\dfrac{5}{3}$일 때에는 두 곡선이 제3사분면에서 접한다.

정답과 풀이 25쪽

확인유제 3 두 곡선 $y=x^4-2x^2+1$, $y=-\dfrac{1}{2}x^2+k$가 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만나고 각 교점에서 공통인 접선을 가질 때, $k=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



발전유제 4 두 곡선 $y=x^3+1$, $y=x^3-2$는 한 직선에 동시에 접한다. 이 직선과 두 곡선 $y=x^3+1$, $y=x^3-2$의 접점을 각각 $\mathrm{P}(a, b)$, $\mathrm{Q}(c, d)$라 할 때, $b-d$의 값은?

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

예제 3 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)=x^4-8x^3+10x^2$은 $x=n$에서 감소상태에 있다고 할 때, 모든 자연수 n의 값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀이 전략 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 경계로 하여 증가와 감소를 나타내는 표를 만든다.
함수 $f(x)$는 감소(증가)하는 구간에 속한 모든 실수 x에서 감소(증가)상태에 있다.

풀이 $f(x)=x^4-8x^3+10x^2$에서

$$f'(x)=4x^3-24x^2+20x=4x(x^2-6x+5)=4x(x-1)(x-5)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $(-\infty, 0)$, $(1, 5)$이므로 $x=2$, $x=3$, $x=4$에서 감소상태에 있다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은 $2+3+4=9$

답 ④

참고 함수 $f(x)=x^3$은 $f'(0)=0$이면서 $x=0$에서 증가상태에 있다.
함수 $f(x)=x^2$은 $f'(0)=0$이지만 $x=0$에서 증가상태 또는 감소상태에 있지 않다.
함수의 증가와 감소를 판단할 때는 위의 풀이와 같이 표로 나타내어 살펴보는 것이 좋다.

정답과 풀이 25쪽

확인유제 5 함수 $f(x)=kx^3-3x^2+3kx-1$이 $x_1<x_2$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 항상 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립할 때, 상수 k의 최솟값을 구하시오.

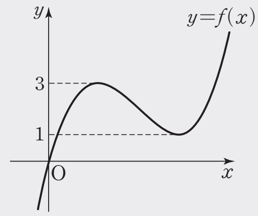
발전유제 6 함수 $f(x)=x^3+k|x-1|$이 모든 실수 x에서 증가하도록 상수 k의 값을 정할 때, 정수 k의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

예제 4 함수의 극대와 극소

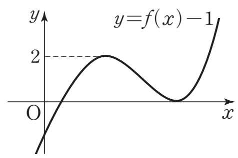
www.ebsi.co.kr

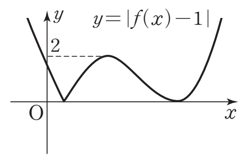
그림은 극댓값이 3, 극솟값이 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 함수 $g(x)=|f(x)-k|$ (k는 정수)의 모든 극값들의 합이 2일 때, 함수 $g(x)$의 극대 또는 극소인 점의 개수를 a라 하자. $k+a$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.



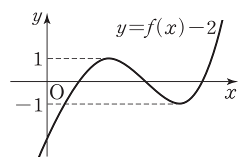
풀이 전략 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 변하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고 감소상태에서 증가상태로 변하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.
$x=a$에서 미분가능하지 않아도 극대 또는 극소가 될 수 있다.

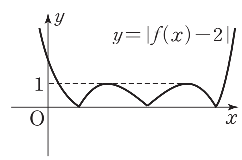
풀이 (i) $k=1$일 때, $y=f(x)-1$, $y=|f(x)-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
$\therefore$ $k+a=1+3=4$



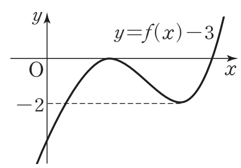


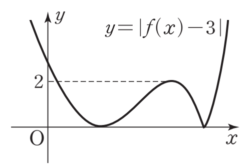
(ii) $k=2$일 때, $y=f(x)-2$, $y=|f(x)-2|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
$\therefore$ $k+a=2+5=7$





(iii) $k=3$일 때, $y=f(x)-3$, $y=|f(x)-3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
$\therefore$ $k+a=3+3=6$





(iv) $k\le 0$ 또는 $k\ge 4$일 때, 함수 $g(x)$의 모든 극값들의 합은 2가 될 수 없다.
(i)~(iv)에서 구하는 $k+a$의 최댓값과 최솟값의 합은 $7+4=11$

답 11

정답과 풀이 26쪽

확인유제 7 함수 $f(x)=x^3+kx^2+(k-1)x$는 $-1<x<1$인 범위에서 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 정수 k의 개수를 구하시오.

발전유제 8 함수 $f(x)=x^3-3x^2+4$의 극대인 점을 A라 할 때, 점 A를 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선은 2개 있다. 이 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

출제 경향 & 대표 기출 문제

정답과 풀이 26쪽

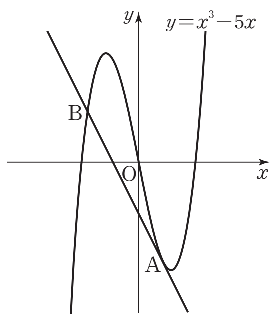
출제 경향

접선의 방정식을 구하는 문제, 함수의 증가와 감소에 관련된 문제, 함수의 극대, 극소의 정의와 극댓값, 극솟값을 구하는 문제가 출제된다.

1 2013학년도 대수능 6월 모의평가

| 출제의도 | 곡선 위의 한 점에서의 접선과 곡선의 교점의 좌표를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 A$(1,\ -4)$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만난다. 선분 AB의 길이는? [4점]



① $\sqrt{30}$　② $\sqrt{35}$　③ $2\sqrt{10}$　④ $3\sqrt{5}$　⑤ $5\sqrt{2}$

2 2012학년도 대수능

| 출제의도 | 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

곡선 $y=-x^3+4x$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$이다. $10a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

정답과 풀이 27쪽

1 곡선 $y=x^3-2x$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선에 수직이고, 점 $(2, 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=ax+b$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

2 두 곡선 $y=ax^3+bx+2$, $y=x^3+1$이 점 $(1, 2)$에서 만나고, 이 점에서 공통인 접선을 가질 때, 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① $\frac{9}{2}$　② 5　③ $\frac{11}{2}$　④ 6　⑤ $\frac{13}{2}$

3 함수 $f(x)=x^3+mx^2+3x+4$의 역함수가 존재하도록 상수 m의 값을 정할 때, 모든 정수 m의 개수를 구하시오.

4 사차함수 $f(x)=x^4+2x^3+ax^2$이 극댓값을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a<0$　② $0<a<\frac{9}{8}$　③ $0<a<\frac{3}{2}$

④ $a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$　⑤ $a<0$ 또는 $0<a<\frac{3}{2}$

5 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx-4$는 $x=-2$에서 극댓값 16을 가질 때, $f(x)$의 극솟값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -11　② -12　③ -13　④ -14　⑤ -15

정답과 풀이 28쪽

1 삼차함수 $f(x)$는 $\dfrac{f(3)-f(1)}{2}=f'(3)$을 만족시킬 때, 방정식

$$f(x)=f'(3)(x-3)+f(3)$$

의 서로 다른 두 실근의 합은?

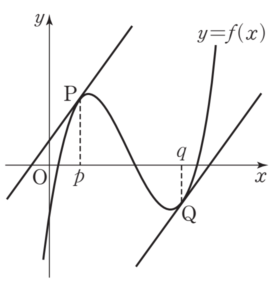
① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

2 삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 극댓값과 극솟값의 합은?

① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ $\dfrac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\dfrac{5}{2}$

3 그림은 삼차함수 $f(x)=x^3-2x^2+kx-1$의 그래프에서 기울기가 같은 두 접선을 나타낸 것이다. 두 접선의 접점을 P, Q라 하고, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은?

(단, $4-3k>0$)



① 1　② $\dfrac{4}{3}$　③ $\dfrac{5}{3}$

④ 2　⑤ $\dfrac{7}{3}$

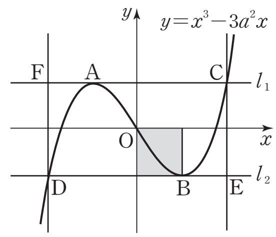
4 연속함수 $f(x)=\begin{cases} x & (|x|\ge 1) \\ ax^2+bx+2 & (|x|<1) \end{cases}$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\dfrac{21}{8}$　② $\dfrac{23}{8}$　③ $\dfrac{25}{8}$　④ $\dfrac{27}{8}$　⑤ $\dfrac{29}{8}$

Level 3 실력 완성

정답과 풀이 29쪽

1 그림은 $y=x^3-3a^2x$의 그래프를 나타낸 것이다. 극대, 극소인 점을 각각 A, B라 하고 두 점 A, B를 지나고 y축에 수직인 직선을 각각 l_1, l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 곡선과 만나는 점 중에서 A, B가 아닌 점을 각각 C, D라 하고, 두 점 C, D를 지나고 x축에 수직인 직선이 두 직선 l_2, l_1과 만나는 점을 각각 E, F라 하자. 선분 OB를 대각선으로 하는 직사각형(어두운 부분)의 넓이가 5일 때, 사각형 FDEC의 넓이를 구하시오. (단, a는 상수이고, O는 원점이다.)



2 삼차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$의 삼차항의 계수와 $g(x)$의 일차항의 계수는 모두 1이다.
> (나) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=1$인 점에서 만나고, $x=4$인 점에서 접한다.

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\alpha\beta$의 값은?

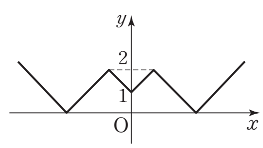
① 7 ② $\frac{22}{3}$ ③ $\frac{23}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{25}{3}$

신유형

3 함수 $f(x)=|x|$에 대하여 다음과 같이 단계별로 함수를 만들어 나간다.

> [단계 1] 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 다음, $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동시킨다.
> [단계 2] [단계 1]에서 얻은 함수의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 다음, $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동시킨다.
> ⋮
> [단계 n] [단계 $(n-1)$]에서 얻은 함수의 그래프를 y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동시킨 다음, $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동시킨다. ($n=2, 3, 4, \cdots$)

예를 들어 오른쪽 그림은 [단계 2]에서 얻어진 함수의 그래프를 나타낸 것이다. [단계 n]에서 얻어진 함수에서 극대인 점의 개수를 a_n, 모든 극댓값의 합을 b_n이라 할 때, $a_{20}+b_{20}$의 값을 구하시오.

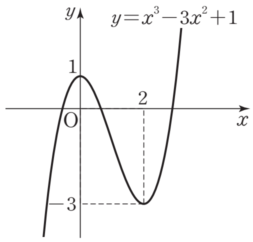


05 도함수의 활용(2)

1. 함수의 그래프

(1) 함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프는 증가와 감소, 극대와 극소, 좌표축과의 교점 등을 이용하면 그 개형을 쉽게 그릴 수 있다. 함수의 증가와 감소는 표로 나타내면 편리하다.



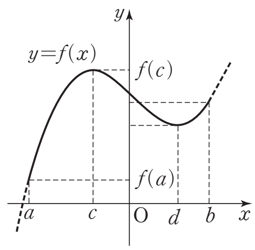
예 함수 $f(x)=x^3-3x^2+1$의 증가와 감소를 표로 나타내어 보자.

$f'(x)=3x^2-6x$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	−3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(2) 함수의 최대와 최소



① 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. (최대 · 최소의 정리)

② 다항함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구한다.

(i) 닫힌 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 모든 극댓값과 극솟값을 구한다.

(ii) 구간의 양 끝값에서의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 구한다.

(iii) 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

참고 ① 닫힌 구간이 아니거나 연속함수가 아니면 최댓값 또는 최솟값이 존재하지 않을 수도 있다.
② 극댓값과 극솟값이 반드시 최댓값과 최솟값이 되는 것은 아니다.

(3) 함수의 최대와 최소의 활용

도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값 또는 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

① 주어진 조건에 적합한 변수를 정하여 미지수 x로 놓고 x의 값의 범위를 조사한다.

② 도형의 길이, 넓이, 부피 등을 함수 $f(x)$로 나타낸다.

③ 함수의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

확인 문제

정답과 풀이 30쪽

1 닫힌 구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -20 ② -18 ③ -16 ④ -14 ⑤ -12

2 포물선 $y=3-x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분에 내접하고, 한 변이 x축 위에 있는 직사각형 중에서 넓이가 최대인 것의 가로의 길이를 구하시오.

2. 방정식에의 활용

(1) 방정식의 실근의 개수

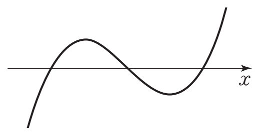
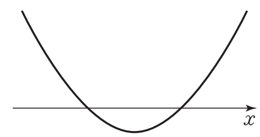
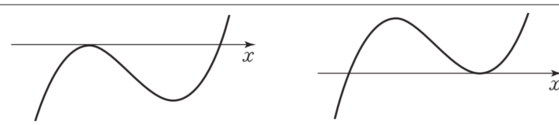
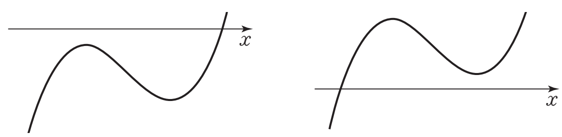
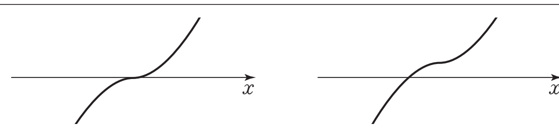
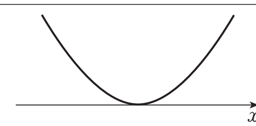
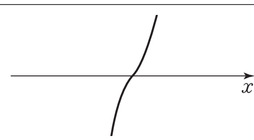
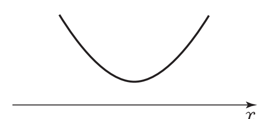
함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.

① 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표이다.

② 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

(2) 삼차함수의 그래프와 삼차방정식의 근

삼차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와 방정식 $f(x)=0$의 근의 관계를 정리하면 다음 표와 같다.

<table>
<tr><th colspan="2">$y=f(x)$의 그래프와 방정식 $f(x)=0$의 근</th><th>$y=f'(x)$의 그래프와 방정식 $f'(x)=0$의 근</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$f(x)$의 극값이 존재할 때</td><td>
(극댓값)×(극솟값)<0, 서로 다른 세 실근</td><td rowspan="3">
서로 다른 두 실근</td></tr>
<tr><td>
(극댓값)×(극솟값)$=0$, 서로 다른 두 실근(중근 포함)</td></tr>
<tr><td>
(극댓값)×(극솟값)$\gt 0$, 한 실근과 두 허근</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(x)$의 극값이 존재하지 않을 때</td><td>
오직 한 실근(삼중근) 또는 한 실근과 두 허근</td><td>
오직 한 실근(중근)</td></tr>
<tr><td>
한 실근과 두 허근</td><td>
두 허근</td></tr>
</table>

정답과 풀이 31쪽

확인 문제

3 방정식 $x^3-12x+4=0$의 실근의 개수를 구하시오.

4 곡선 $y=4x^3-x$와 직선 $y=2x+a$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 상수 a의 값의 범위를 정하시오.

3. 부등식에의 활용

다항함수의 그래프를 이용하여 x에 대한 부등식 $f(x)\geq 0$, $f(x)\geq k$, $f(x)\geq g(x)$ 등이 성립함을 증명할 수 있다.

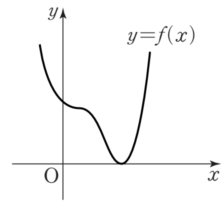
(1) 모든 실수 x에 대하여 성립하는 부등식

① 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 보일 때에는 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보인다.

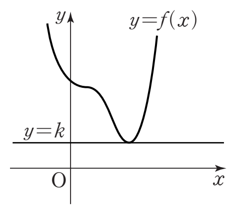
② 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq k$(k는 상수)가 성립함을 보일 때에는 다음과 같은 방법을 이용한다.

- 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$에 접하거나 위쪽에 있음을 보인다.
- 함수 $y=f(x)-k$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보인다.

③ 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립함을 보일 때에는 함수 $f(x)-g(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보인다.



$f(x)\geq 0$

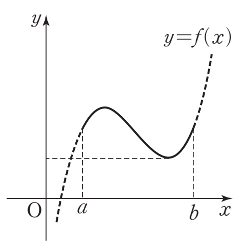


$f(x)\geq k$

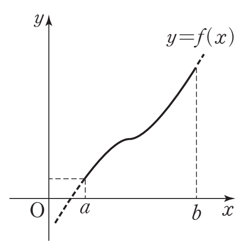
(2) 어떤 구간에서 성립하는 부등식

① 다항함수 $f(x)$에 대하여 닫힌 구간 $[a, b]$에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 보일 때에는 다음과 같은 방법을 이용한다.

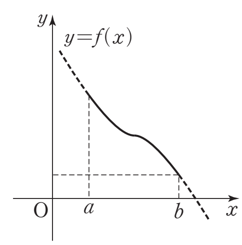
- 닫힌 구간 $[a, b]$에서 극값이 존재하면 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보인다. ([그림 1])
  이때, 최솟값은 $f(a)$, $f(b)$, 극솟값 중의 하나이다.
- 닫힌 구간 $[a, b]$에서 $f'(x)\geq 0$이면 $f(a)\geq 0$임을 보인다. ([그림 2])
- 닫힌 구간 $[a, b]$에서 $f'(x)\leq 0$이면 $f(b)\geq 0$임을 보인다. ([그림 3])



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

② 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 닫힌 구간 $[a, b]$에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립함을 보일 때에는 $f(x)-g(x)\geq 0$으로 변형한 다음, 함수 $f(x)-g(x)$에 대하여 위와 같은 방법을 이용한다.

확인 문제

정답과 풀이 31쪽

5 두 함수 $f(x)=x^3$, $g(x)=3x^2-4$가 있다. $x\geq 0$인 범위에서 항상 $f(x)\geq g(x)$가 성립함을 보이시오.

6 모든 실수 x에 대하여 $3x^4-4x^3\geq k$가 성립할 때, 상수 k의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4. 속도와 가속도

(1) 수직선 위를 움직이는 점의 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 위치 x가 시각 t의 함수 $x=f(t)$로 나타내어질 때, 시각 t에서의 점 P의 속도, 가속도, 속력은 다음과 같다.

① 속도 : $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$

② 가속도 : $a(t)=\dfrac{dv}{dt}=v'(t)$

③ 속력 : $|v(t)|=|f'(t)|$

참고 시각 t에서 시각 $t+\varDelta t$까지의 점 P의 위치의 변화량 $\varDelta x$는 $\varDelta x=f(t+\varDelta t)-f(t)$이다. 이때, 시각 t에서 시각 $t+\varDelta t$까지의 점 P의 평균속도는

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta t}=\frac{f(t+\varDelta t)-f(t)}{\varDelta t}$$

이고, 이것은 함수 $x=f(t)$의 평균변화율이다.

또, 시각 t에서 위치 x의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 순간속도 또는 속도라고 한다. 즉,

$$v(t)=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta x}{\varDelta t}=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{f(t+\varDelta t)-f(t)}{\varDelta t}=\frac{dx}{dt}$$

이다.

예 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=t^3-t^2+2t$일 때, 속도 $v(t)=3t^2-2t+2$이고, 가속도 $a(t)=6t-2$이다.

(2) 시각에 대한 여러 가지 변화율

일반적으로 순간변화율의 개념을 사용하면 다양한 대상의 시간에 따른 변화율을 정의할 수 있다.

① 어떤 도형의 시각 t에서의 길이가 $l(t)$일 때, 시각 t에서 길이의 변화율은

$$\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta l}{\varDelta t}=\frac{dl}{dt}=l'(t)$$

② 어떤 도형의 시각 t에서의 넓이가 $S(t)$일 때, 시각 t에서 넓이의 변화율은

$$\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta S}{\varDelta t}=\frac{dS}{dt}=S'(t)$$

③ 어떤 도형의 시각 t에서의 부피가 $V(t)$일 때, 시각 t에서 부피의 변화율은

$$\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta V}{\varDelta t}=\frac{dV}{dt}=V'(t)$$

확인 문제

정답과 풀이 32쪽

7 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t일 때의 위치는 $f(t)=t^3-6t^2+9t$이다. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 시각을 구하시오.

8 직선 궤도 위를 달리는 열차가 있다. 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리가 x(m)일 때, $x=26t-0.65t^2$인 관계가 있다고 한다. 이 열차가 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간과 움직인 거리를 각각 구하시오.

예제 1 함수의 그래프와 최대 · 최소

$0 \le x \le 3$일 때, 함수 $f(x)=|x^4-6x^2-8x-3|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m$의 값은?

① 21　② 23　③ 25　④ 27　⑤ 29

풀이 전략 $y=|f(x)|$의 그래프는 $f(x) \ge 0$인 부분에서는 $y=f(x)$, $f(x)<0$인 부분에서는 $y=-f(x)$의 그래프를 그리면 된다.
삼차함수, 사차함수의 그래프는 도함수가 0이 되는 x의 값을 경계로 함수의 증감표를 만들어 그리면 편리하다.

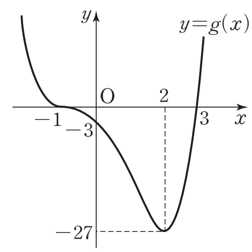
풀이 $g(x)=x^4-6x^2-8x-3$으로 놓으면

$$g'(x)=4x^3-12x-8=4(x^3-3x-2)$$
$$=4(x+1)(x^2-x-2)=4(x+1)^2(x-2)$$

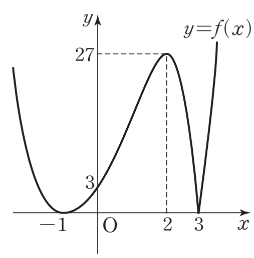
$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↘	-27	↗



[그림 1]



[그림 2]

따라서 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고, $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.

$f(0)=|-3|=3$, $f(2)=|-27|=27$, $f(3)=0$이므로 $M=27$, $m=0$

$\therefore M-m=27$

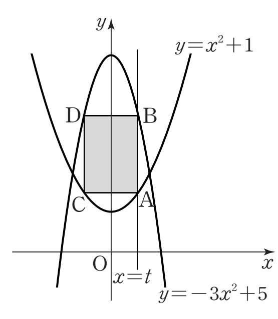
답 ④

정답과 풀이 32쪽

확인유제 1 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)=2x^3-6x^2+a$의 최댓값이 3일 때, 최솟값은? (단, a는 상수이다.)

① -31　② -33　③ -35　④ -37　⑤ -39

발전유제 2 좌표평면에서 그림과 같이 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=x^2+1$, $y=-3x^2+5$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B를 지나고 y축에 수직인 직선이 두 곡선 $y=x^2+1$, $y=-3x^2+5$와 만나는 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABDC의 넓이의 최댓값은? (단, $0<t<1$)



① $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$　② $\dfrac{17\sqrt{3}}{9}$　③ $2\sqrt{3}$

④ $\dfrac{19\sqrt{3}}{9}$　⑤ $\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$

예제2 방정식에의 활용

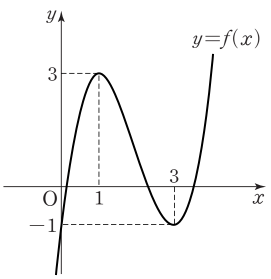
함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$에 대하여 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수를 $A(k)$라 하자.
$\sum_{k=0}^{10} A(k)$의 값은?

① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

풀이 전략 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.
$y=|f(x)|$의 그래프는 $f(x)\ge 0$인 부분에서는 $y=f(x)$, $f(x)<0$인 부분에서는 $y=-f(x)$의 그래프를 그리면 된다.

풀이 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$에서 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

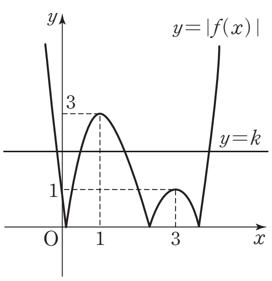


[그림 1]

따라서 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 각각 [그림 1], [그림 2]와 같다.
방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.
따라서 $A(0)=3$, $A(1)=5$, $A(2)=4$, $A(3)=3$이고, $k\ge 4$일 때 $A(k)=2$이다.

$\therefore \sum_{k=0}^{10} A(k)=3+5+4+3+2\cdot 7=29$

답 ③



[그림 2]

정답과 풀이 32쪽

확인유제 3 두 곡선 $y=2x^3+2x^2-7x$, $y=x^3+2x^2+5x+a$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 실수 a의 값의 범위를 정할 때, 모든 자연수 a의 개수를 구하시오.

발전유제 4 삼차항의 계수가 양수이고, 극솟값이 0인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 세 집합 A, B, C를 다음과 같이 정의하자.

$A=\{x|f(x)=0,\ x는 실수\}$, $B=\{x|f'(x)=0,\ x는 실수\}$, $C=\{x|f(x)=f'(x),\ x는 실수\}$

세 집합 A, B, C의 원소의 개수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

예제 3 부등식에의 활용

함수 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+k$에 대하여 $x>0$일 때 $f(x)>0$일 실수 k의 조건은 $k\geq\alpha$이고, $x>1$일 때 $f(x)>0$일 실수 k의 조건은 $k>\beta$이다. $\alpha+\beta$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

풀이 전략 함수 $f(x)$의 극대 또는 극소인 점의 x좌표를 구한 다음 주어진 범위에 속하는지 살펴본다.
주어진 범위 속에 극대 또는 극소인 점이 모두 포함되면 극솟값을 포함한 여러 가지 함숫값을 조사해야 최솟값을 알 수 있지만 주어진 범위 속에 극소인 점만 포함되면 극솟값이 최솟값이 된다.

풀이 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+k$에서

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)=6(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$k+5$	$\searrow$	$k+4$	$\nearrow$

(i) $x>0$일 때, $f(x)>0$이려면 $f(0)=k\geq0$, $f(2)=k+4>0$ $\therefore k\geq0$

(ii) $x>1$일 때, $f(x)>0$이려면 $f(2)=k+4>0$ $\therefore k>-4$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=-4$이므로 $\alpha+\beta=-4$

답 ①

정답과 풀이 33쪽

확인유제 5 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $x^4-4x^3+4x^2+k>0$이 성립하도록 하는 상수 k의 조건은?

① $k<-1$ ② $k<0$ ③ $k>0$ ④ $-1<k<1$ ⑤ $k>1$

발전유제 6 두 함수 $f(x)=2x^3+6kx+k^3$, $g(x)=3(k+1)x^2+27$이 있다. $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 항상 $f(x)>g(x)$가 성립하도록 자연수 k의 값을 정할 때, k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

예제 4 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각 $f(t)=t(t-6)^2$, $g(t)=-t(t-3)(t-6)$이다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 원점을 출발한 다음 두 점 P, Q는 2회 만난다.
ㄴ. $2<t<6$일 때, 점 P는 음의 방향으로 움직인다.
ㄷ. 두 점 P, Q의 속도가 같아질 때, 두 점 P, Q의 속도는 모두 양이다.

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 전략 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t일 때의 위치가 $x=f(t)$로 나타내어질 때
(1) $f'(t)>0$이면 양의 방향으로 움직인다.　(2) $f'(t)<0$이면 음의 방향으로 움직인다.

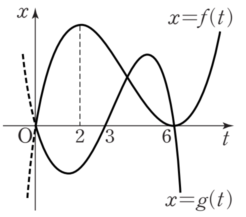
풀이 $f(t)=t(t-6)^2$에서 점 P의 속도는

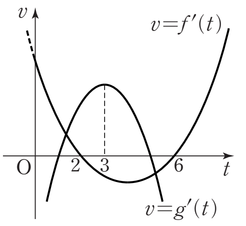
$$v_P=f'(t)=(t-6)^2+2t(t-6)=3(t-2)(t-6)$$

$g(t)=-t(t-3)(t-6)=-t^3+9t^2-18t$에서 점 Q의 속도는

$$v_Q=g'(t)=-3t^2+18t-18$$

따라서 시각 t일 때의 위치와 속도를 나타내는 그래프는 그림과 같다.





ㄱ. $x=f(t)$, $x=g(t)$의 그래프는 원점 이외의 두 점에서 만나므로 두 점 P, Q는 2회 만난다. (참)
ㄴ. $2<t<6$일 때, $v_P<0$이므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다. (참)
ㄷ. 두 점 P, Q의 속도가 같아질 때는 2회 있다.
$0<t<2$인 범위에서 두 점 P, Q의 속도가 같아질 때는 $v_P>0$, $v_Q>0$이고,
$3<t<6$인 범위에서 두 점 P, Q의 속도가 같아질 때는 $v_P<0$, $v_Q<0$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

정답과 풀이 33쪽

확인유제 7 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각 $f(t)=t^3-9t^2+15t$, $g(t)=t^3-15t^2+63t$이다. 다음 중 두 점 P, Q가 서로 같은 방향으로 움직이는 시각인 것은?

① $t=1.1$　② $t=1.5$　③ $t=2.7$　④ $t=4.3$　⑤ $t=5.1$

발전유제 8 $\overline{AB}=1$ cm, $\overline{BC}=2$ cm, $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 길이는 매초 2 cm씩 늘어나고, 선분 BC의 길이는 매초 1 cm씩 늘어난다고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{35}{2}$ cm^{2}가 되는 순간, 넓이의 변화율은 $\frac{q}{p}$ cm^2/초이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

출제 경향 & 대표 기출 문제

정답과 풀이 34쪽

출제 경향

함수의 최댓값, 최솟값을 구하는 문제, 삼차함수 또는 사차함수의 그래프의 개형을 묻는 문제, 그래프를 이용하여 방정식과 부등식을 증명하는 문제, 수직선 위를 움직이는 점의 속도와 가속도에 관련된 문제가 출제된다.

1 2013학년도 대수능 6월 모의평가

| 출제의도 | 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 속도의 관계를 이해할 수 있는지를 묻는 문제이다.

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각 $f(t)=2t^2-2t$, $g(t)=t^2-8t$이다. 두 점 P와 Q가 서로 반대방향으로 움직이는 시각 t의 범위는? [3점]

① $\frac{1}{2}<t<4$ ② $1<t<5$ ③ $2<t<5$ ④ $\frac{3}{2}<t<6$ ⑤ $2<t<8$

2 2013학년도 대수능 6월 모의평가

| 출제의도 | 닫힌 구간에서 함수의 최댓값, 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

닫힌 구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=20$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3 2012학년도 대수능

| 출제의도 | 삼차함수의 그래프의 개형을 이용하여 방정식의 실근의 개수, 극댓값 등의 조건으로 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

Level 1 기초 연습

정답과 풀이 35쪽

1 $-2 \leq x \leq 3$에서 함수 $f(x)=-x^3+3x^2-6$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2 두 곡선 $y=x^3-4x^2+6x$, $y=2x^2-3x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 a의 값을 정할 때, 모든 a의 값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4-4x-a>0$이 성립하도록 상수 a의 값의 범위를 정할 때, 정수 a의 최댓값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

4 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t일 때의 위치는 $x=t^3-6t^2+24t$이다. 점 P의 속도가 처음으로 15가 되는 순간, 점 P의 가속도는?

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

5 반지름의 길이가 10 mm인 구 모양의 풍선이 있다. 반지름의 길이는 매초 1 mm씩 늘어난다고 할 때, 반지름의 길이가 15 mm가 되는 순간, 풍선의 부피의 변화율은 $k\pi$ mm^3/초이다. 상수 k의 값을 구하시오.

Level 2 기본 연습

정답과 풀이 36쪽

1 함수 $f(x)=\cos x\sin^2 x+2\cos x+2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

2 다음 표는 사차함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타낸 것이다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$a-21$		$a+11$		$a+6$	

방정식 $f(x)=10$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 상수 a의 값을 정할 때, 모든 a의 값의 합은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

3 이차함수 $y=x^2-x-1$의 그래프 위의 한 점을 P라 하자. 선분 OP의 길이가 최소일 때, 점 P의 좌표는 $(a,\ b)$이다. 두 상수 $a,\ b$에 대하여 ab의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

4 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t일 때의 위치는 $f(t)=(4t-1)(t-1)^2$이다. 점 P가 음의 방향으로 움직이고 있을 때, 점 P의 속력의 최댓값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$　④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

Level 3 실력 완성

정답과 풀이 37쪽

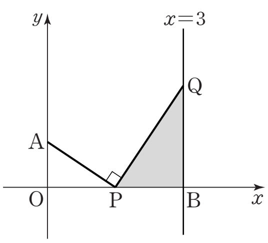
1 점 $P(a,\ b)$에서 곡선 $y=x^3-x$에 그을 수 있는 접선의 개수가 2일 필요충분조건은?

① $a+b=0$
② $-a^3+a+b=0$
③ $(a+b)(-a^3+a+b)=0$
④ $a\neq 0,\ (a+b)(-a^3+a+b)=0$
⑤ $b\neq 0,\ (a+b)(-a^3+a+b)=0$

2 삼차함수 $f(x)=x^3-3x+2$에 대하여 닫힌 구간 $[t,\ t+1]$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $-2\leq t\leq 1$일 때, 함수 $g(t)$의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

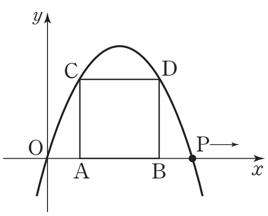
3 좌표평면에 두 점 $A(0,\ 1)$, $B(3,\ 0)$과 x축 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P를 지나고 직선 AP와 수직인 직선이 직선 $x=3$과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P가 원점 O와 점 B 사이를 움직일 때, 세 점 P, B, Q를 꼭짓점으로 하는 삼각형 PBQ의 넓이의 최댓값은?



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

신유형

4 좌표평면에서 x축 위를 양의 방향으로 움직이는 점 P는 원점을 출발하여 매초 2의 속력으로 움직인다. 그림은 원점 O와 점 P를 지나고 이차항의 계수가 -1인 이차함수의 그래프를 나타낸 것이다. 선분 OP를 사등분하는 점 중 두 점 O, P에 가까운 쪽에 있는 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B를 지나고 x축에 수직인 직선이 이차함수의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ABDC가 정사각형이 되는 순간, 사각형 ABDC의 넓이의 변화율은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

06 부정적분과 정적분

1. 부정적분의 정의

(1) 부정적분의 뜻

함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 원시함수 또는 부정적분이라 하고, $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 한다.

(2) 부정적분의 표현

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$일 때, 함수 $f(x)$의 임의의 부정적분은

$F(x)+C$ (C는 상수)의 꼴로 나타내어지는데 이것을 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다. 즉,

$$F'(x)=f(x) \iff \int f(x)dx=F(x)+C \text{ (}C\text{는 상수)}$$

이때, $f(x)$를 피적분함수, C를 적분상수라고 한다.

2. 부정적분과 미분의 관계

(1) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$

(2) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

예 $\frac{d}{dx}\left\{\int(x^2+x)dx\right\}=x^2+x$이고 $\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+x)\right\}dx=x^2+x+C$ (C는 적분상수)이다.

설명 (1) $F'(x)=f(x)$라 하면 $\int f(x)dx=F(x)+C$ (C는 적분상수)이므로

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=\frac{d}{dx}\{F(x)+C\}=F'(x)=f(x)$$

(2) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=g(x)$로 놓으면 $\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}f(x)$이므로

$$\frac{d}{dx}g(x)-\frac{d}{dx}f(x)=0,\ \frac{d}{dx}\{g(x)-f(x)\}=0$$

$\therefore g(x)-f(x)=C$ (단, C는 적분상수)

따라서 $g(x)=f(x)+C$이므로 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이다.

확인 문제

정답과 풀이 38쪽

1 $\int f(x)dx=x^3+2x^2+x+C$를 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)$의 값은? (단, C는 적분상수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

2 함수 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+3x+1)\right\}dx$에 대하여 $f(0)=1$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

3. x^n의 부정적분

n이 음이 아닌 정수일 때, $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

특히, $n=0$일 때, $\int 1dx = x+C$ (단, C는 적분상수)

설명 $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$이므로

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

또, $(x)'=1$이므로

$\int 1dx = x+C$ (단, C는 적분상수)

4. 부정적분의 성질

(1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(3) $\int \{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

설명 $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$라 하고 k를 임의의 실수라 하면

(1) $\{kF(x)\}'=kf(x)$이므로 $\int kf(x)dx = kF(x)+C_1$

또, $k\int f(x)dx = k\{F(x)+C_2\} = kF(x)+kC_2$

이때, C_1과 kC_2는 모두 적분상수이므로 $C_1=kC_2$가 되게 잡으면 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$이다.

(2) $\{F(x)+G(x)\}' = f(x)+g(x)$이므로 $\int \{f(x)+g(x)\}dx = F(x)+G(x)+C_1$

또, $\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x)+C_2+G(x)+C_3$

이때, C_1, C_2, C_3은 모두 적분상수이므로 $C_1=C_2+C_3$이 되게 잡으면

$\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$이다.

(3)도 (2)와 같은 방법으로 증명할 수 있다.

확인 문제 정답과 풀이 38쪽

3 다항함수 $f(x)$가 $f'(x)=x^2+2x-1$, $f(1)=2$를 만족시킬 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

4 다항함수 $f(x) = \int (x+1)^3 dx - 3\int x(x+1)dx$에 대하여 $f(0)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

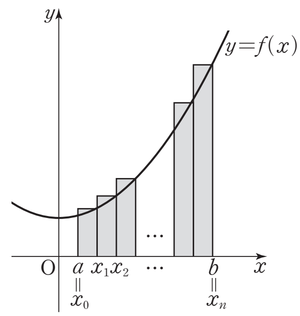
5. 구분구적법

평면도형의 넓이나 입체도형의 부피를 다음과 같이 구하는 방법을 구분구적법이라고 한다.
① 주어진 도형을 몇 개의 작은 도형으로 나눈다.
② ①에서 나눈 도형의 넓이나 부피의 합을 구한다.
③ ②에서 구한 합의 극한값으로 도형의 넓이나 부피를 구한다.

6. 정적분의 정의

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\left(\text{단, }\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$



7. 정적분으로 표시된 함수의 미분

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)$이다. (단, $a\le x\le b$)

8. 정적분의 기본정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라 하면 다음이 성립하고 이를 정적분의 기본정리라고 한다.

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$ (2) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

예 $\displaystyle\int_1^2 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_1^2=2^2-1^2=3$이고 $\displaystyle\int_2^1 2x\,dx=-\int_1^2 2x\,dx=-3$이다.

확인 문제

정답과 풀이 39쪽

5 곡선 $y=x^2$과 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법으로 구하시오.

6 함수 $f(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x (t+2)^3dt$에 대하여 $f(-1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 정적분의 성질(1)

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

(2) 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌 구간에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

10. 정적분의 성질(2)

(1) 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$일 때, $\int_{-a}^a f(x)dx=0$이다.

(2) 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$일 때, $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$이다.

11. 정적분으로 표시된 함수의 극한

연속함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt=f(a)$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

설명 (1) $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $\int_a^{x+a} f(t)dt=F(x+a)-F(a)$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x+a)-F(a)}{x}=F'(a)=f(a)$$

(2) $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$$

12. 정적분과 무한급수의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$$

정답과 풀이 39쪽

확인 문제

7 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_2^{x+2}(t^3+t)dt$의 값을 구하시오.

8 정적분을 이용하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$의 값을 구하시오.

예제 1 부정적분의 정의와 성질

$f'(x)=4x-1$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(1,\ 4)$, $(2,\ a)$를 지날 때, 실수 a의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

풀이 전략 $f(x)=\int f'(x)dx$로 적분상수 C를 포함한 $f(x)$를 구하고, $f(1)=4$를 이용하여 C의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int (4x-1)dx$

$=2x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$f(1)=2-1+C=4$　　$\therefore\ C=3$

따라서 $f(x)=2x^2-x+3$이므로

$a=f(2)=8-2+3=9$

답 ④

정답과 풀이 40쪽

확인유제 1 원점을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-2x+3$일 때, $f(1)$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

발전유제 2 함수 $f(x)=\int x(x-1)(x^2+1)(x^4+1)dx+\int (x-1)(x^2+1)(x^4+1)dx$에 대하여 $f(1)=2f(0)$일 때, $f(-1)$의 값은?

① -4　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

예제 2 정적분의 성질

정적분 $\int_{-2}^{2}(x^3+x+|x|)dx$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

풀이 전략 정적분의 성질

(1) $\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

(2) $f(-x)=-f(x)$일 때, $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

(3) $f(-x)=f(x)$일 때, $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

풀이 $\int_{-2}^{2}(x^3+x+|x|)dx=\int_{-2}^{2}(x^3+x)dx+\int_{-2}^{2}|x|dx$이다.

이때, $f(x)=x^3+x$라 하면 $f(-x)=(-x)^3+(-x)=-(x^3+x)=-f(x)$이므로

$$\int_{-2}^{2}(x^3+x)dx=0$$

또, $g(x)=|x|$라 하면 $g(-x)=|-x|=|x|=g(x)$이므로

$$\int_{-2}^{2}|x|dx=2\int_0^2|x|dx=2\int_0^2 xdx\ (\because\ x\ge 0\text{일 때, } |x|=x)$$

$$\therefore \int_{-2}^{2}(x^3+x+|x|)dx=0+2\int_0^2 xdx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=2\times 2=4$$

답 ⑤

정답과 풀이 40쪽

확인유제 3 정적분 $\int_{-1}^{2}(|x|-1)^2dx$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

발전유제 4 함수 $f(x)=\begin{cases}2x^3-x & (x<1)\\ 2x+a & (x\ge 1)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속일 때, 정적분 $\int_{-1}^{2}f(x)dx$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① 0　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

예제3 정적분으로 표시된 함수의 미분

모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt=x^2-x-6$을 만족시키는 연속함수 $f(x)$와 양수 a에 대하여 $f(a)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$를 이용하여 $f(x)$를 구하고, $\int_a^a f(x)dx=0$을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $\int_a^x f(t)dt=x^2-x-6$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(x^2-x-6)$에서

$f(x)=2x-1$

또, $\int_a^x f(t)dt=x^2-x-6$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=a^2-a-6=0$

따라서 $(a-3)(a+2)=0$에서 $a=3$ ($\because$ $a>0$)이므로

$f(a)=f(3)=6-1=5$

답 ⑤

정답과 풀이 41 쪽

확인유제 5 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)dt=x^2-2x+a$를 만족시키는 연속함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 $a+f(2)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

발전유제 6 다항함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2-x+2\int_0^x f'(t)dt$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

예제 4 정적분과 무한급수의 관계

www.ebsi.co.kr

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left(1+\frac{4}{n}\right)^2+\left(1+\frac{6}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{2n}{n}\right)^2\right\}$의 값은?

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

풀이 전략 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$를 이용하여 무한급수를 정적분으로 고친다.

풀이

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left(1+\frac{4}{n}\right)^2+\left(1+\frac{6}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{2n}{n}\right)^2\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{n}k\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3-1}{n}k\right)^2\cdot\frac{3-1}{n}\\&=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3\\&=\frac{1}{2}\left(9-\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{3}\end{aligned}$$

답 ②

정답과 풀이 41쪽

확인유제 7 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

발전유제 8 $\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n}\left\{\left(1+\frac{3}{n}\right)^3+\left(1+\frac{6}{n}\right)^3+\left(1+\frac{9}{n}\right)^3+\cdots+\left(1+\frac{3n}{n}\right)^3\right\}$의 값을 구하시오.

출제 경향 & 대표 기출 문제

정답과 풀이 41쪽

출제 경향

정적분의 기본정리를 이용하는 정적분의 계산 문제, 정적분과 미분의 관계를 활용하는 문제, 정적분의 성질에 관한 문제 등이 출제되고 있다.

1 2012학년도 대수능

| 출제의도 | 정적분과 미분의 관계를 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

함수 $F(x)=\int_{0}^{x}(t^3-1)dt$에 대하여 $F'(2)$의 값은? [3점]

① 11 ② 9 ③ 7 ④ 5 ⑤ 3

2 2012학년도 대수능

| 출제의도 | 정적분의 기본정리를 이용하여 정적분을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

이차함수 $f(x)$는 $f(0)=-1$이고, $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx$를 만족시킨다. $f(2)$의 값은? [4점]

① 11 ② 10 ③ 9 ④ 8 ⑤ 7

3 2012학년도 대수능 9월 모의평가

| 출제의도 | 정적분의 성질을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $\int_{0}^{3} f(x)dx=3\int_{0}^{1} f(x)dx$

ㄴ. $\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{1} f(x)dx$

ㄷ. $\int_{0}^{1} \{f(x)\}^2dx=\left\{\int_{0}^{1} f(x)dx\right\}^2$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

정답과 풀이 42쪽

1 함수 $f(x)$가 $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2-4x$, $f(0)=2$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

2 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)=2x-4$이고, 곡선 $y=f(x)$가 원점을 지날 때, $f(x)$의 극솟값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

3 함수 $f(x)=x^2-2x+\int_0^2 f(t)dt$에 대하여 $f(1)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

4 함수 $f(x)=x^3+2x+4$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5 함수 $f(x)=(x+1)^2$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$의 값을 구하시오.

Level 2 기본 연습

정답과 풀이 43쪽

1 함수 $f(x)=2x^4-17x^3+46x^2-43x+12$에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt-\int_0^x \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt$의 값은?

① -12 ② -6 ③ 0 ④ 6 ⑤ 12

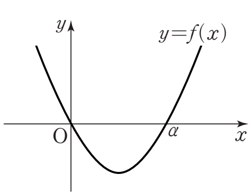
2 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x xf(t)dt=\int_1^x tf(t)dt+ax^3-2x^2-2x+2$를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^3+2n^3+3n^3+\cdots+n^4}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

4 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(0,\ 0)$, $(\alpha,\ 0)$을 지날 때, 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, α는 양수이다.)



보기

ㄱ. $g'(\alpha)=0$이다.
ㄴ. 함수 $g(x)$의 극댓값은 0이다.
ㄷ. 방정식 $g(x)=0$의 모든 실근의 합은 α보다 크다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 풀이 44쪽

1 연속함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2}\{1-f(x)\}dx$의 값을 구하시오.

2 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(가) $\int\{f'(x)\}^2dx=2f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

(나) $\int_0^2 f(x)dx=3\int_0^1 f(x)dx$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3 다항함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=\int f(x)dx$라 하자. $g(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 등식 $f(x)g(x)=g(x)+2x^3+2x^2$이 성립할 때, $f(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

신유형

4 길이가 1인 선분 AB와 자연수 n에 대하여 선분 AB를 $(n+k):k$로 외분하는 점을 P_k ($k=1, 2, 3, \cdots, n$)라 하자. 중심이 A, 반지름이 $\overline{\mathrm{AP}_k}$인 원의 넓이를 S_k라 할 때, 다음 중 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$를 정적분으로 바르게 나타낸 것은?

① $\pi\int_0^1 x\,dx$ ② $\pi\int_1^2 x\,dx$ ③ $\pi\int_0^1 x^2dx$

④ $\pi\int_1^2 x^2dx$ ⑤ $\pi\int_1^2 (1+x)^2dx$