

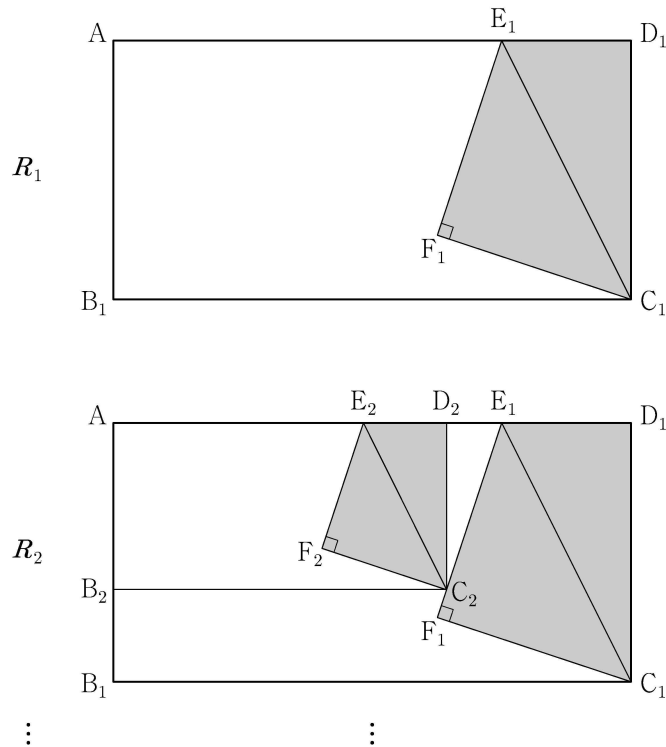
21학년도 수능 가형 11번

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 의 값은? [3점]

- ① $4\sqrt{3}-6$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $5\sqrt{3}-8$ ④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $3\sqrt{3}-5$

21학년도 수능 가형 14번

그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$ 인 직사각형 $AB_1C_1D_1$ 이 있다. 선분 AD_1 을 3:1로 내분하는 점을 E_1 이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$ 의 내부에 점 F_1 을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$ 가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$ 을 그린다. 사각형 $E_1F_1C_1D_1$ 을 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 선분 AB_1 위의 점 B_2 , 선분 E_1F_1 위의 점 C_2 , 선분 AE_1 위의 점 D_2 와 점 A 를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$ 인 직사각형 $AB_2C_2D_2$ 를 그린다. 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$ 에 삼각형 $E_2F_2C_2$ 를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$ 를 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$ ④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

21학년도 수능 가형 18번

실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2)x^{2n+1} + 2x}{3x^{2n} + 1}$$

라 하자. $(f \circ f)(1) = \frac{5}{4}$ 가 되도록 하는 모든 a 의 값의 합은? [4점]

- ① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

21학년도 수능 가형 20번

함수 $f(x) = \pi \sin 2\pi x$ 에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$ 인 함수 $g(x)$ 와 자연수 n 이 다음 조건을 만족시킬 때, n 의 값은? [4점]

함수 $h(x) = f(nx)g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$$\int_{-1}^1 h(x) dx = 2, \int_{-1}^1 xh(x) dx = -\frac{1}{32}$$

이다.

① 8

② 10

③ 12

④ 14

⑤ 16

21학년도 수능 가형 28번

두 상수 $a, b (a < b)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$f(x) = (x-a)(x-b)^2$ 이라 하자. 함수 $g(x) = x^3 + x + 1$ 의 역함수 $g^{-1}(x)$ 에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$ 의 값을 구하시오.

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(나) $h'(3) = 2$

21학년도 수능 가형 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x) = f(\sin^2 \pi x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $0 < x < 1$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극대가 되는 x 의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
(나) 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이고 최솟값은 0이다.

$f(2) = a + b\sqrt{2}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.) [4점]

21학년도 수능 가형 11번

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 를 계산하려고 봤더니 x 로 바뀌는 $\frac{k}{n}$ 꼴이 없어서 계산하기 힘들다.

$\frac{3n}{3n+k}$ 의 분자와 분모에 각각 $\frac{1}{n}$ 을 곱해주자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{3n}{3n+k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}$ 이다.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{3n}{3n+k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}$ 에서 $3+\frac{k}{n}=x$, $\frac{1}{n}=dx$ 라 하면

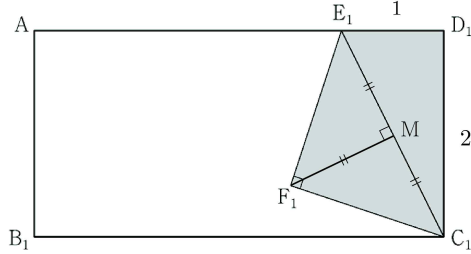
$k=1$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3+\frac{1}{n}\right)=3$ 이고, $k=n$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3+\frac{n}{n}\right)=4$ 이다.

따라서 x 의 적분 구간은 3에서 4까지이다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{3n}{3n+k}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}} \\ &= \int_3^4 \sqrt{\frac{3}{x}} dx = \sqrt{3} \int_3^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{3} \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_3^4 = 4\sqrt{3} - 6 \text{이다. 답은 ㉓!!} \end{aligned}$$

21학년도 수능 가형 14번

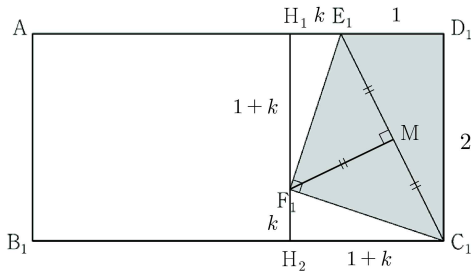
1. 먼저 S_1 을 구하기 위해 R_1 을 살펴보자.



$\triangle C_1D_1E_1$ 에서 $\overline{C_1D_1}=2$, $\overline{D_1E_1}=1$, $\angle C_1D_1E_1=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\triangle C_1D_1E_1=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$, $\overline{E_1C_1}$ 의 중점을 M이라 하면, $\triangle C_1E_1F_1$ 은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{E_1C_1}=\sqrt{5}$ 에서 $\overline{F_1M}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 이다. 따라서 $\triangle C_1E_1F_1=\frac{1}{2}\times \sqrt{5}\times \frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{5}{4}$ 이므로 $S_1=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$ 이다.

2. 공비를 구하자. $\angle F_1E_1A=\theta$ 라 하자. $\overline{C_2D_2}=\overline{D_2E_1}\tan\theta$, $\overline{AD_2}=2\overline{C_2D_2}=2\overline{D_2E_1}\tan\theta$ 이다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$ 의 변의 길이를 구하기 위해서는 $\tan\theta$ 를 구해야 한다.

$\tan\theta$ 를 구하기 위해 점 F_1 을 지나고 $\overline{C_1D_1}$ 에 평행한 보조선을 그려보자.



보조선이 $\overline{AD_1}$ 과 만나는 점을 H_1 , $\overline{B_1C_1}$ 과 만나는 점을 H_2 라 하자.

$\overline{H_1E_1}=k$ 라 하면 $\overline{H_2C_1}=1+k$ 이다.

$\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle F_1H_1E_1=\angle C_1H_2F_1=\frac{\pi}{2}$, $\angle F_1E_1H_1=\angle C_1F_1H_2$ 이므로 $\triangle F_1E_1H_1$ 과 $\triangle F_1C_1H_2$ 는 RHA 합동이다.

$\overline{F_1H_1}=\overline{C_1H_2}=1+k$ 이다. 따라서 $\overline{H_1H_2}=1+2k=2$ 이므로 $k=\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $\angle F_1E_1A=\theta$ 라 한다면 $\tan\theta=3$ 이다.

$\overline{A_1D_1} = 1 + 7t = 4$ 이므로 $t = \frac{3}{7}$ 이다. 따라서 공비는 $\left(\frac{1}{4} \times 6t\right)^2 = \left(\frac{9}{14}\right)^2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{9}{4}}{1 - \left(\frac{9}{14}\right)^2} = \frac{196 \times \frac{9}{4}}{196 - 81} = \frac{441}{115} \text{이다. 답은 ㉓!!}$$

$\angle C_1E_1D_1 = i$ 라 할 때, $\tan i = 20$ 이고 $\theta = \frac{3}{4}\pi - i$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\tan \frac{3}{4} \pi - \tan i}{1 + \tan \frac{3}{4} \pi \times \tan i} = \frac{-1 - 2}{1 - 2} = 30 \text{ dB.}$$

21학년도 수능 가형 18번

1. x 의 범위를 나누어 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2)x^{2n+1} + 2x}{3x^{2n} + 1}$ 를 구해보자.

편의상 분자와 분모를 각각 x^{2n} 으로 나누면 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2)x + \frac{2x}{x^{2n}}}{3 + \frac{1}{x^{2n}}}$ 이다.

(1) $x > 1$: $f(x) = \frac{(a-2)x}{3}$ 이다.

(2) $x = 1$: $f(1) = \frac{(a-2)+2}{1+3} = \frac{a}{4}$ 이다.

(3) $-1 < x < 1$: $f(x) = 2x$ 이다.

(4) $x = -1$: $f(-1) = \frac{-(a-2)-2}{1+3} = -\frac{a}{4}$ 이다.

(5) $x < -1$: $f(x) = \frac{(a-2)x}{3}$ 이다.

※ 귀찮더라도 모든 x 의 범위에서 함수 $f(x)$ 를 구하는 것이 문제를 안전하게 푸는 방법이다.

2. $f(1) = \frac{a}{4}$ 이므로 $(f \circ f)(1) = f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{5}{4}$ 가 되는 모든 a 를 구해보자.

(1) $\frac{a}{4} > 1$: $f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a(a-2)}{12} = \frac{5}{4}$ 에서 $a^2 - 2a - 15 = (a+3)(a-5) = 0$ 이므로 $a = 5$ 이다.

(2) $\frac{a}{4} = 1$: $f\left(\frac{a}{4}\right) = 1$ 이므로 $(f \circ f)(1) = f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{5}{4}$ 에 모순이다.

(3) $-1 < \frac{a}{4} < 1$: $f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a}{2} = \frac{5}{4}$ 에서 $a = \frac{5}{2}$ 이다.

(4) $\frac{a}{4} = -1$: $f\left(\frac{a}{4}\right) = 1$ 이므로 $(f \circ f)(1) = f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{5}{4}$ 에 모순이다.

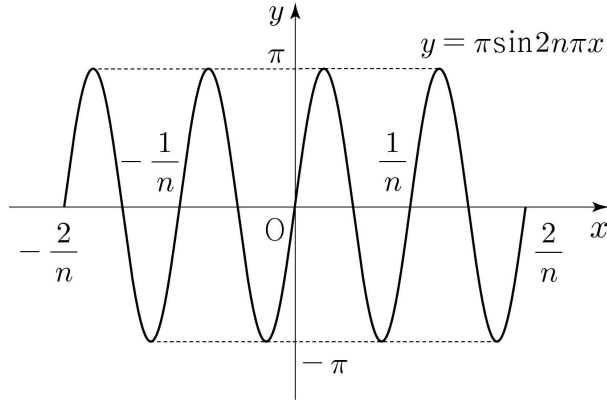
(5) $\frac{a}{4} < -1$: $f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a(a-2)}{12} = \frac{5}{4}$ 에서 $a^2 - 2a - 15 = (a+3)(a-5) = 0$ 이므로 $a < -4$ 에 모순이다.

(1), (2), (3), (4), (5)에 의하여 모든 a 의 값의 합은 $5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$ 이다. 답은 ㉓!!

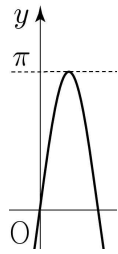
21학년도 수능 가형 20번

1. 함수 $g(x)$ 의 치역이 $\{0, 1\}$ 이므로 함수 $h(x) = f(nx)$ or $h(x) = 0$ 이다.

함수 $f(nx) = \pi \sin 2n\pi x$ 의 그래프를 그려보자. 주기는 $\frac{2\pi}{2n\pi} = \frac{1}{n}$ 이다.



이 함수의 그래프에서 한 칸의 넓이만 구해보자.



그림에서 $\int_0^{\frac{1}{2n}} \pi \sin 2n\pi x dx = \left[-\frac{1}{2n} \cos 2n\pi x \right]_0^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{n}$ 이다.

2. 구간 $[-1, 1]$ 에서 $f(nx) = \pi \sin 2n\pi x$ 가 양수인 구간은 $2n$ 개, 음수인 구간도 $2n$ 개다.

$\int_{-1}^1 h(x) dx$ 이 될 수 있는 범위를 구해보자.

(1) 구간 $[-1, 1]$ 에서 $f(nx) = \pi \sin 2n\pi x$ 가 음수인 구간에서 $g(x) = 1$,
양수인 구간에서 $g(x) = 0$ 일 때 $\int_{-1}^1 h(x) dx$ 은 최솟값 $2n \times \left(-\frac{1}{n}\right) = -2$ 를,

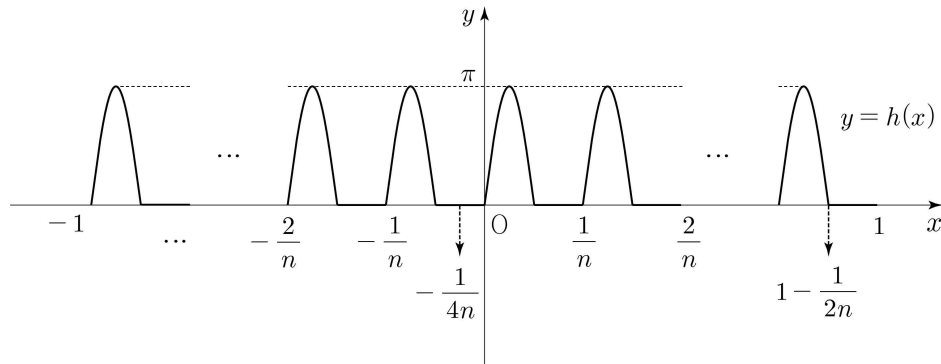
(2) 구간 $[-1, 1]$ 에서 $f(nx) = \pi \sin 2n\pi x$ 가 음수인 구간에서 $g(x) = 0$,
양수인 구간에서 $g(x) = 1$ 일 때 $\int_{-1}^1 h(x) dx$ 은 최댓값 $2n \times \frac{1}{n} = 2$ 를 가진다.

조건 (가)에서 $\int_{-1}^1 h(x) dx = 2$ 이므로 (2)의 상황을 따른다.

함수 $h(x) = \begin{cases} f(nx) & (f(nx) \geq 0) \\ 0 & (f(nx) < 0) \end{cases}$ 임을 알 수 있다.

3. $\int_{-1}^1 xh(x)dx = -\frac{1}{32}$ 을 이용하여 n 의 값을 구하자. $\int_{-1}^1 xh(x)dx$ 를 계산하기 전에 함수 $h(x)$ 의 대칭성을 파악하자.

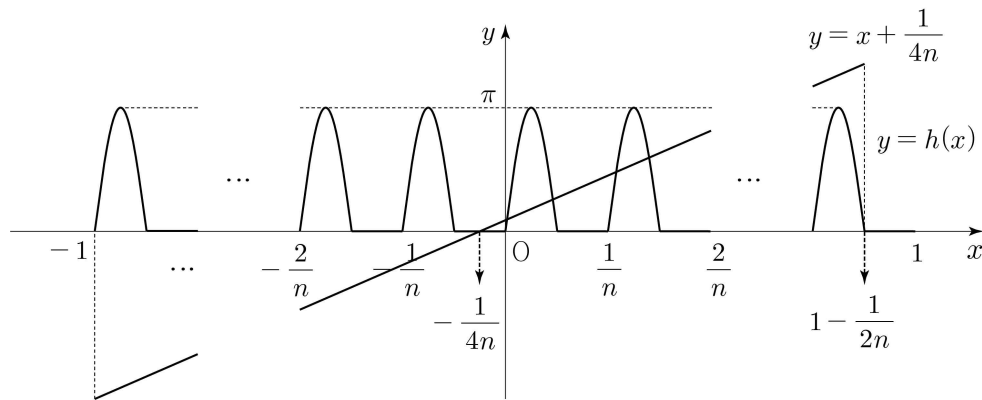
함수 $h(x)$ 의 그래프 개형은 다음과 같다.



구간 $\left[1 - \frac{1}{2n}, 1\right]$ 에서 $h(x) = 0$ 이므로, 함수 $h(x)$ 의 대칭축은 $x = \frac{-1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)}{2} = -\frac{1}{4n}$ 이다.

직선 $y = x + \frac{1}{4n}$ 은 점 $\left(-\frac{1}{4n}, 0\right)$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $y = \left(x + \frac{1}{4n}\right)h(x) = p(x)$ 는 점 $\left(-\frac{1}{4n}, 0\right)$ 에 대하여 대칭이다.



점대칭함수의 적분법을 이용하면

$$\int_{-\frac{1}{4n} - \left(1 - \frac{1}{4n}\right)}^{-\frac{1}{4n} + \left(1 - \frac{1}{4n}\right)} p(x)dx = \int_{-1}^{1 - \frac{1}{2n}} p(x)dx = 2 \times \left(1 - \frac{1}{4n}\right) \times p\left(-\frac{1}{4n}\right) = 0 \text{이다.}$$

구간 $\left[1 - \frac{1}{2n}, 1\right]$ 에서 $p(x) = 0$ 이므로 $\int_{-1}^{1 - \frac{1}{2n}} p(x)dx = \int_{-1}^1 p(x)dx = 0$ 이다.

$$\int_{-1}^1 xh(x)dx = \int_{-1}^1 \left(x + \frac{1}{4n}\right)h(x)dx - \int_{-1}^1 \frac{1}{4n}h(x)dx = -\frac{1}{4n} \times 2 = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32} \text{이므로}$$

$n = 16$ 이다. 답은 ⑤!!

※ $\int_{-1}^1 xh(x)dx$ 를 계산할 때, 대칭성을 떠올리지 못했을 경우

함수 $y = xf(nx)$ 는 우함수이므로 $\int_a^b xf(nx)dx = \int_{-a}^{-b} xf(nx)dx$ 이다.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 xh(x)dx &= \int_{-\frac{2n}{2n}}^{-\frac{2n-1}{2n}} xf(nx)dx + \int_{-\frac{2n-2}{2n}}^{-\frac{2n-3}{2n}} xf(nx)dx + \dots \\ &\dots + \int_{-\frac{2}{2n}}^{-\frac{1}{2n}} xf(nx)dx + \int_0^{\frac{1}{2n}} xf(nx)dx + \int_{\frac{2}{2n}}^{\frac{3}{2n}} xf(nx)dx + \dots \\ &\dots + \int_{\frac{2n-2}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}} xf(nx)dx = \int_0^1 xf(nx)dx\end{aligned}$$

※ $\int_{-\frac{2n}{2n}}^{-\frac{2n-1}{2n}} xf(nx)dx = \int_{\frac{2n-1}{2n}}^{\frac{2n}{2n}} xf(nx)dx$, $\int_{-\frac{2}{2n}}^{-\frac{1}{2n}} xf(nx)dx = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{2}{2n}} xf(nx)dx$ 로 바꾸면

이해가 쉬울 것이다.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 xh(x)dx &= \int_0^1 xf(nx)dx = \int_0^1 \pi x \sin 2n\pi x dx \\ &= \left[-\pi x \times \frac{1}{2n\pi} \times \cos 2n\pi x \right]_0^1 + \pi \int_0^1 \cos 2n\pi x dx = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}\end{aligned}$$

문제 Comment

주기성과 대칭성을 잘 활용한 아름다운 문제이다. $\int_{-1}^1 xh(x)dx$ 를 계산할 때, 무작정 $h(x)$ 에 직접적으로 식을 대입하여 부분적분으로 푸려고 했다면 시간이 오래 걸렸을 것이다.

$\int_{-1}^1 xh(x)dx$ 에서 적분구간의 특이함을 눈치채고 일차함수의 점대칭성을 숙지했다면 $xh(x)$ 의 $y = x$ 를 평행이동하여 $y = x + \frac{1}{4n}$ 를 만들고 점 $\left(0, -\frac{1}{4n}\right)$ 에 대하여 대칭인 함수 $y = \left(x + \frac{1}{4n}\right)h(x) = p(x)$ 를 만들어 낼 생각을 할 수 있었을 것이다.

연속함수 $f(x)$ 가 점 $(a, f(a))$ 에 대하여 대칭이라면 $\int_{a-p}^{a+p} f(x)dx = 2pf(a)$ 이 성립함을 잘 이용하자.

$\int_0^\pi \sin x dx = 2$ 를 미리 암기해뒀다면 $\int_{-1}^1 h(x)dx$ 계산이 좀 더 수월했을 것이다.

21학년도 수능 가형 28번

1. 함수 $g(x)=x^3+x+1$ 에서 $g'(x)=3x^2+1>0$ 이다. $g^{-1}(x)=p(x)$ 라 하자.

$h(x)=f(p(x))=(p(x)-a)(p(x)-b)^2$ 에 대하여

$(x-1)|h(x)|=(x-1)|(p(x)-a)(p(x)-b)^2|=(x-1)|p(x)-a|(p(x)-b)^2$ 을 살펴보자.

방정식 $p(x)=a$ 의 근을 $x=k$ 라 하자. $p(x)$ 는 **증가함수**이므로 방정식 $p(x)=a$ 의 근 $x=k$ 는 **유일하다**.

$|p(x)-a|$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하려면 $p'(k)=0$ 이어야 한다.

하지만 모든 실수 x 에 대하여 $p'(x)=\frac{1}{g'(p(x))}>0$ 이므로 $p'(k)\neq 0$ 이어서

$|p(x)-a|$ 는 $x=k$ 에서 **미분 불가능하다**.

2. $q(x)=(x-1)|h(x)|$ 라 하자. $q(x)$ 의 미분가능성을 확인해보자.

$$q(x)=\begin{cases} (x-1)(p(x)-a)(p(x)-b)^2 & (x \geq k) \\ (x-1)(a-p(x))(p(x)-b)^2 & (x < k) \end{cases}$$

$$q'(x)=\begin{cases} (p(x)-a)\{(x-1)(p(x)-b)^2\}'+p'(x)(x-1)(p(x)-b)^2 & (x \geq k) \\ -(p(x)-a)\{(x-1)(p(x)-b)^2\}'-p'(x)(x-1)(p(x)-b)^2 & (x < k) \end{cases}$$

$q(x)$ 는 실수 전체 집합에서 연속이다. $q(x)$ 의 미분가능성이 의심되는 지점은 $x=k$ 이다.

이제 $x=k$ 에서 $q(x)$ 의 우미분계수 $q'(k+)$ 와 좌미분계수 $q'(k-)$ 를 구해보자.

$(x-1)(p(x)-a)(p(x)-b)^2$, $(x-1)(a-p(x))(p(x)-b)^2$ 는 각각 $x=k$ 에서 미분가능하므로

$q'(k+)=p'(k)(k-1)(p(k)-b)^2$ 이고, $q'(k-)=-p'(k)(k-1)(p(k)-b)^2$ 이다.

$q'(k+)=q'(k-)$ 이면 $q(x)$ 는 실수 전체에서 미분가능하다.

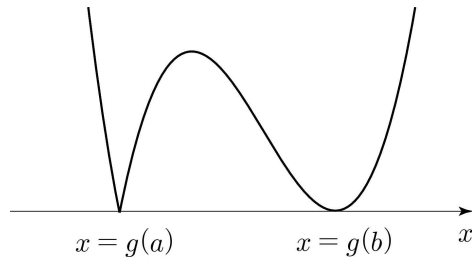
$q'(k+)=q'(k-)$ 이 되기 위해서는 $p'(k)(k-1)(p(k)-b)^2=0$ 이어야 한다.

$p'(k)\neq 0$, $p(k)\neq b$ 이므로 $k=1$ 이다.

$p(1)=a$ 에서 $g(a)=a^3+a+1=1$ 이므로 $a=0$ 이다.

※ 그래프 개형을 이용하여 직관적으로 미분가능성 판단하기

$p(x)$ 는 증가함수이고 $p(x)$ 의 치역은 모든 실수의 집합이므로 '합성함수 그래프 그리기'를 이용하여 $y = |h(x)|$ 의 그래프 개형을 그리면 다음과 같다.



$(x-1)|h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $h(1) = 0$ 이어야 한다.

3. $h'(3) = f'(p(3))p'(3) = f'(p(3)) \times \frac{1}{g'(p(3))}$ 에서 $g(1) = 3$ 이므로 $p(3) = 1$ 이다.

따라서 $h'(3) = f'(1) \times \frac{1}{g'(1)} = \frac{f'(1)}{4} = 2$ 에서 $f'(1) = 8$ 이다.

$f(x) = x(x-b)^2$ 에서 $f'(x) = (x-b)^2 + 2x(x-b)$ 이므로 $f'(1) = (1-b)^2 + 2 \times (1-b) = 8$ 에서 $(b-1)(b-3) = 8$ 이다. 정리하면 $b^2 - 4b - 5 = (b-5)(b+1) = 0$ 이고, $a < b$ 에서 $b = 5$ 이다.

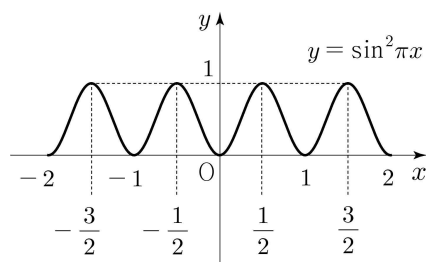
따라서 $f(x) = (x-a)(x-b)^2 = x(x-5)^2$ 에서 $f(8) = 8 \times 3^2 = 72$ 이다. **답은 72!!**

문제 Comment

역함수를 대할 때 태도를 꼭 체화하자. $g^{-1}(x) = p(x)$ 로 바꿔 표현한 것만으로도 문제 파악이 훨씬 쉬웠을 것이다. 그래프 개형을 이용하여 직관적으로 미분가능성을 판단할 수 있으나 **수식적으로 미분가능성을 확인하는 습관도 들여야 한다.** 절댓값 ||의 경우 무조건 벗겨야만 문제 진행이 가능하다. 정의역 구간을 나누어 꼭 벗겨내자.

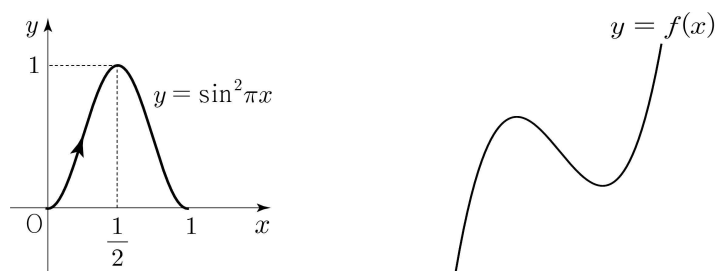
21학년도 수능 가형 30번

1. 곡선 $y = \sin^2 \pi x$ 의 개형은 다음과 같이 그려진다.



함수 $g(x) = f(\sin^2 \pi x)$ 의 주기는 $\sin^2 \pi x$ 를 따르고, $\sin^2 \pi x$ 의 그래프는 $x = \frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x)$ 역시 $x = \frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이다. 구간 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 에서 $g(x)$ 의 그래프 개형을 그려보자.



먼저 $y = \sin^2 \pi x$ 정의역을 ‘증감’을 기준으로 구간을 나눈다.

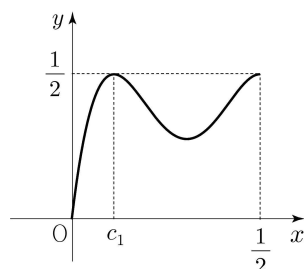
구간 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 에서 $y = \sin^2 \pi x$ 는 증가한다.

$\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 에서 $y = \sin^2 \pi x$ 의 치역은 $[0, 1]$ 이 된다.

$y = \sin^2 \pi x$ 의 치역은 함수 $f(x)$ 의 정의역이 된다.

$f(x)$ 에서 정의역 $[0, 1]$ 에 해당하는 ‘그래프 개형’을 ‘정방향’으로

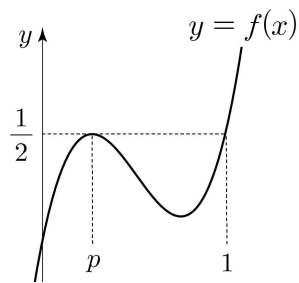
$y = g(x) = f(\sin^2 x)$ 의 정의역 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 에 그리면 된다.



$0 < x < 1$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극대가 되는 x 의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하려면

구간 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프 개형은 위와 같아야 한다.

2. 구간 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프 개형이 위와 같기 위해서는



$y = f(x)$ 의 그래프 개형은 위와 같아야 한다. 이를 식으로 정리하면 $f(x) = (x-1)(x-p)^2 + \frac{1}{2}$ 이다.

$y = g(x)$ 의 그래프 개형을 그릴 때, $y = f(x)$ 의 그래프 개형을 따오므로

$g(x)$ 의 최솟값은 $[0, 1]$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값과 같다.

$f(x)$ 의 최솟값의 후보로는 $f(0)$ 과 극솟값이 있다.

$f'(x) = (x-p)(3x-p-2)$ 이므로 $f(0) = -p^2 + \frac{1}{2} = 0$ 이거나 $f\left(\frac{p+2}{3}\right) = 0$ 이다.

$f\left(\frac{p+2}{3}\right) = \frac{4(p-1)^3}{27} + \frac{1}{2} = 0$ 에서는 $p = -\frac{1}{2}$ 이므로 $0 < p < 1$ 에 모순이고

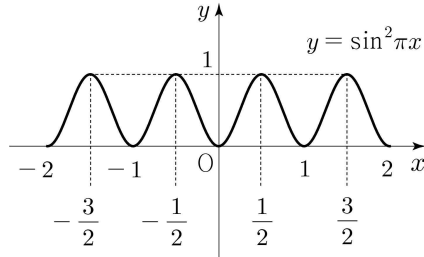
$f(0) = -p^2 + \frac{1}{2} = 0$ 에서 $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이면 조건에 맞는다.

$f(2) = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2\sqrt{2} = 5 - 2\sqrt{2}$ 에서 $a^2 + b^2 = 25 + 4 = 29$ 이다.

답은 29!!

※ 다른 풀이

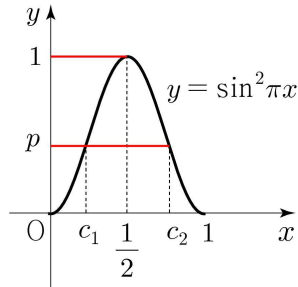
1. 곡선 $y = \sin^2 \pi x$ 의 개형은 다음과 같이 그려진다.



$y = f(x)$ 가 $x = p$ 에서 극대를 갖는다고 하자.

함수 $g(x)$ 가 극대가 되는 x 의 후보로는 $g'(x) = f'(\sin^2 \pi x) \times (\sin^2 \pi x)'$ 이므로

$y = \sin^2 \pi x$ 가 극대가 되는 x 와 방정식 $\sin^2 \pi x = p$ 의 해인 x 가 있다.



함수 $g(x) = f(\sin^2 \pi x)$ 가 구간 $(0, 1)$ 에서 극대가 되는 x 의 개수가 3이 되기 위해서는

구간 $(0, 1)$ 에서 $y = \sin^2 \pi x$ 가 극대가 되는 x 의 개수는 1이므로 방정식 $\sin^2 \pi x = p$ 의 해인 x 의 개수는 2여야 한다. 이를 만족하려면 $0 < p < 1$ 이어야 한다.

따라서 함수 $g(x)$ 가 극대가 되는 x 는 $\sin^2 \pi x = 1$ 이 되는 $x = \frac{1}{2}$ 와

$\sin^2 \pi x = p$ 이 되는 $x = c_1, x = c_2$ 이다. $p = \sin^2 \pi c_1 = \sin^2 \pi c_2$ 이다.

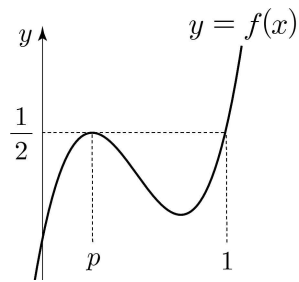
2. 함수 $g(x)$ 의 극댓값이 모두 동일하고, 최댓값이 $\frac{1}{2}$ 이므로 $g(c_1) = g(c_2) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 에서

$$f(p) = f(1) = \frac{1}{2} \text{이다.} \dots \textcircled{1}$$

$g'(x) = f'(\sin^2 \pi x) \times 2\pi \sin \pi x \cos \pi x$ 에서 $g'(c_1) = f'(p) \times 2\pi \sin \pi c_1 \cos \pi c_1 = 0$ 에서

$0 < c_1 < \frac{1}{2}$ 이므로 $\sin \pi c_1 \neq 0, \cos \pi c_1 \neq 0$ 이다.

따라서 $f'(p) = 0$ 이다. $\dots \textcircled{2}$



①, ②에 의하여 $f(x) = (x-1)(x-p)^2 + \frac{1}{2}$ 이다.

3. $g(x)$ 의 최솟값은 $[0, 1]$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값과 같다.

$f(x)$ 의 최솟값의 후보로는 $f(0)$ 과 극솟값이 있다.

$f'(x) = (x-p)(3x-p-2)$ 이므로 $f(0) = -p^2 + \frac{1}{2} = 0$ 이거나 $f\left(\frac{p+2}{3}\right) = 0$ 이다.

$f\left(\frac{p+2}{3}\right) = \frac{4(p-1)^3}{27} + \frac{1}{2} = 0$ 에서는 $p = -\frac{1}{2}$ 이므로 $0 < p < 1$ 에 모순이고

$f(0) = -p^2 + \frac{1}{2} = 0$ 에서 $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이면 조건에 맞는다.

$f(2) = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2\sqrt{2} = 5 - 2\sqrt{2}$ 에서 $a^2 + b^2 = 25 + 4 = 29$ 이다.

답은 29!!