

21학년도 수능 가형 4번

두 사건 A, B 에 대하여

$$P(B \mid A) = \frac{1}{4}, \quad P(A \mid B) = \frac{1}{3}, \quad P(A) + P(B) = \frac{7}{10}$$

일 때, $P(A \cap B)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{11}$

21학년도 수능 가형 12번

확률변수 X 는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y 는 평균이 m , 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다.

두 확률변수 X, Y 가

$$P(4 \leq X \leq 8) + P(Y \geq 8) = \frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $P\left(Y \leq 8 + \frac{2\sigma}{3}\right)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

- ① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

21학년도 수능 가형 17번

좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2이하이면 점 P를 x 축의 양의 방향으로 3만큼,
3이상이면 점 P를 y 축의 양의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x + 4y = 0$ 사이의 거리를 확률변수 X 라 하자.
 $E(X)$ 의 값은? [4점]

- ① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

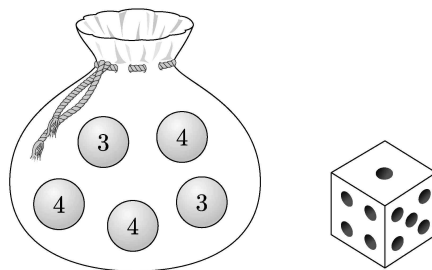
21학년도 수능 가형 19번

숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고, 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은? [4점]

- ① $\frac{13}{180}$ ② $\frac{41}{540}$ ③ $\frac{43}{540}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{47}{540}$



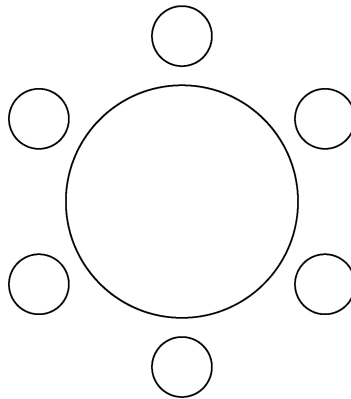
21학년도 수능 가형 26번

세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다.

이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오.(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) A와 B는 이웃한다.

(나) B와 C는 이웃하지 않는다.



21학년도 수능 가형 29번

네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.(단, 같은 색 모자끼리 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.

(나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4이상이다.

(다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명 뿐이다.

21학년도 수능 나형 13번

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$ 의 개수는? [3점]

$$f(2) \leq f(3) \leq f(4)$$

- ① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

21학년도 수능 가형 4번

1. $P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(A \cap B)=k$ 라 하자.

$P(B \mid A) = \frac{k}{a} = \frac{1}{4}$ 에서 $a=4k$, $P(A \mid B) = \frac{k}{b} = \frac{1}{3}$ 에서 $b=3k$ 이므로

$P(A)+P(B)=a+b=7k=\frac{7}{10}$ 에서 $k=\frac{1}{10}$ 이다. 답은 ④!!

21학년도 수능 가형 12번

1. 확률변수 X 가 정규분포 $N(8, 3^2)$ 을 따르고, 확률변수 Y 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 8) + P(Y \geq 8) &= P\left(\frac{4-8}{3} \leq \frac{X-8}{3} \leq \frac{8-8}{3}\right) + P\left(\frac{Y-m}{\sigma} \geq \frac{8-m}{\sigma}\right) \\ &= P\left(-\frac{4}{3} \leq Z \leq 0\right) + P\left(Z \geq \frac{8-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \text{에서} \end{aligned}$$

$$\frac{8-m}{\sigma} = \frac{4}{3}, \quad m = 8 - \frac{4\sigma}{3} \text{이다.}$$

2. $P\left(Y \leq 8 + \frac{2\sigma}{3}\right) = P\left(\frac{Y-m}{\sigma} \leq \frac{\left(8 + \frac{2\sigma}{3}\right) - \left(8 - \frac{4\sigma}{3}\right)}{\sigma}\right)$
 $= P(Z \leq 2) = P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772 \text{이다.}$

답은 ④!!

21학년도 수능 가형 17번

1. 주사위를 15번 던져 눈의 수가 2 이하가 나온 횟수를 확률변수 Y 라 하면

Y 는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로 $E(Y) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$ 이다.

2. 2 이하의 눈이 Y 번 나왔을 때 3 이상의 눈은 $15 - Y$ 번 나오므로 점 P 의 좌표는 $(3Y, 15 - Y)$ 이다.

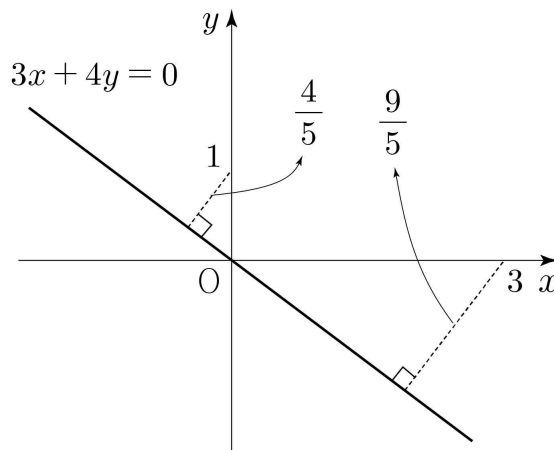
따라서 확률변수 $X = \frac{|3 \times 3Y + 4 \times (15 - Y)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5Y + 60|}{5} = Y + 12$ 에서

$E(X) = E(Y + 12) = E(Y) + 12 = 17$ 이다. 답은 ③!!

※ 도형을 이용한 풀이

1. 주사위를 15번 던져 눈의 수가 2 이하가 나온 횟수를 Y 라 하면

눈의 수가 3 이상이 나온 횟수는 $15 - Y$ 이다.



점 P 가 x 축 방향으로 3만큼 이동하면 직선 $3x + 4y = 0$ 과의 거리가 $\frac{9}{5}$ 만큼,

y 축 방향으로 1만큼 이동하면 직선 $3x + 4y = 0$ 과의 거리가 $\frac{4}{5}$ 만큼 증가하므로

$X = \frac{9}{5}Y + \frac{4}{5}(15 - Y) = Y + 12$ 이다.

2. 확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로 $E(Y) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$ 이다.

따라서 $E(X) = E(Y + 12) = E(Y) + 12 = 17$ 이다. 답은 ③!!

21학년도 수능 가형 19번

1. 주머니에서 3이 적힌 공이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$, 4가 적힌 공이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$ 이므로

3이 적힌 공이 나온 경우와 4가 적힌 공이 나온 경우로 CASE를 분류하자.

2. 3이 적힌 공이 나온 경우

세 주사위의 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면 (6, 3, 1), (6, 2, 2), (5, 4, 1), (5, 3, 2), (4, 4, 2), (4, 3, 3)이고, 각각의 경우의 수는 $3!$, $\frac{3!}{2!}$, $3!$, $3!$, $\frac{3!}{2!}$, $\frac{3!}{2!}$ 이다.

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{2}{5} \times 3 \times \left(3! + \frac{3!}{2!}\right) \times \frac{1}{6^3} = \frac{2}{5} \times 27 \times \frac{1}{6^3}$ 이다.

3. 4가 적힌 공이 나온 경우

네 주사위의 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면 (6, 2, 1, 1), (5, 3, 1, 1), (5, 2, 2, 1), (4, 4, 1, 1), (4, 3, 2, 1), (4, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 1), (3, 3, 2, 2)이고,

각각의 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}$, $\frac{4!}{2!}$, $\frac{4!}{2!}$, $\frac{4!}{2!2!}$, $4!$, $\frac{4!}{3!}$, $\frac{4!}{3!}$, $\frac{4!}{2!2!}$ 이다.

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{3}{5} \times \left(\frac{4!}{2!} \times 3 + \frac{4!}{3!} \times 2 + \frac{4!}{2!2!} \times 2 + 4!\right) \times \frac{1}{6^4} = \frac{3}{5} \times 80 \times \frac{1}{6^4}$ 이다.

※ 자연수 분할을 실수 없이 하는 방법을 알고 싶다면 Chapter 9의 '자연수 분할 검토 방법'을 확인하고 오자.

4. 구하고자 하는 확률은

$$\left(\frac{2}{5} \times 24 \times \frac{1}{6^3}\right) + \left(\frac{3}{5} \times 80 \times \frac{1}{6^4}\right) = \frac{1}{5 \times 6^3} \times \left(2 \times 27 + \frac{3 \times 80}{6}\right) = \frac{54 + 40}{5 \times 6^3} = \frac{47}{540} \text{이다. 답은 ㉔!}$$

※ 중복조합을 이용한 풀이

1. 주머니에서 3이 적힌 공이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$, 4가 적힌 공이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$ 이므로

3이 적힌 공이 나온 경우와 4가 적힌 공이 나온 경우로 CASE를 분류하자.

2. 3이 적힌 공이 나온 경우

주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합이 10이므로 $a + b + c = 10$,

$1 \leq a \leq 6$, $1 \leq b \leq 6$, $1 \leq c \leq 6$ 을 동시에 만족하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하자.

$a' = a - 1$, $b' = b - 1$, $c' = c - 1$ 이라 하면 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $a' + b' + c' = 7$,

$0 \leq a' \leq 5$, $0 \leq b' \leq 5$, $0 \leq c' \leq 5$ 를 동시에 만족하는 순서쌍 (a', b', c') 의 개수와 같다.

단순히 $a' + b' + c' = 7$ ($0 \leq a'$, $0 \leq b'$, $0 \leq c'$)을 만족하는 순서쌍 (a', b', c') 의 개수는 중복조합($_3H_7$)을 쓰든 조합($_9C_2$)을 쓰든 36개이다.

이제 배제해야 하는 순서쌍의 개수를 구하자.

$a' = 6$ 일 때 $a' + b' + c' = 7$ 을 만족하는 순서쌍의 개수는 2,
 $a' = 7$ 일 때 $a' + b' + c' = 7$ 을 만족하는 순서쌍의 개수는 1이므로
 $a' \geq 6$ 일 때 $a' + b' + c' = 7$ 을 만족하는 순서쌍의 개수는 3이다.

위와 같은 방법으로 $b' \geq 6$ 일 때 $a' + b' + c' = 7$ 을 만족하는 순서쌍의 개수는 3,
 $c' \geq 6$ 일 때 $a' + b' + c' = 7$ 을 만족하는 순서쌍의 개수는 3이므로
 배제해야 하는 순서쌍의 개수는 9개이다.

따라서 3이 적힌 공이 나온 경우, 세 눈의 수의 합이 10일 확률은 $\frac{2}{5} \times \frac{36-9}{6^3} = \frac{54}{5 \times 6^3}$ 이다.

3. 4가 적힌 공이 나온 경우

주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합이 10이므로 $a + b + c + d = 10$,
 $1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6, 1 \leq c \leq 6, 1 \leq d \leq 6$ 을 동시에 만족하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의
 개수를 구하자.

$a' = a - 1, b' = b - 1, c' = c - 1, d' = d - 1$ 이라 하면 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는
 $a' + b' + c' + d' = 6, 0 \leq a' \leq 5, 0 \leq b' \leq 5, 0 \leq c' \leq 5, 0 \leq d' \leq 5$ 를 동시에 만족하는
 순서쌍 (a', b', c', d') 의 개수와 같다.

단순히 $a' + b' + c' + d' = 6$ ($0 \leq a', 0 \leq b', 0 \leq c', 0 \leq d'$)을 만족하는 순서쌍 (a', b', c', d') 의
 개수는 중복조합($_4H_6$)을 쓰든 조합($_9C_3$)을 쓰든 84개이다.

이제 배제해야 하는 순서쌍의 개수를 구하자.

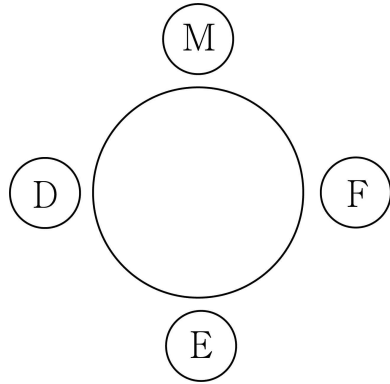
$a' = 6$ 일 때 $a' + b' + c' + d' = 6$ 을 만족하는 순서쌍의 개수는 1이다.
 마찬가지로, $b' = 6, c' = 6, d' = 6$ 일 때 $a' + b' + c' + d' = 6$ 을 만족하는 순서쌍의 개수는
 각각 1이다. 배제해야 하는 순서쌍의 개수는 총 4개이다.

따라서 4가 적힌 공이 나온 경우 네 눈의 수의 합이 10일 확률은 $\frac{3}{5} \times \frac{84-4}{6^4} = \frac{40}{5 \times 6^3}$ 이다.

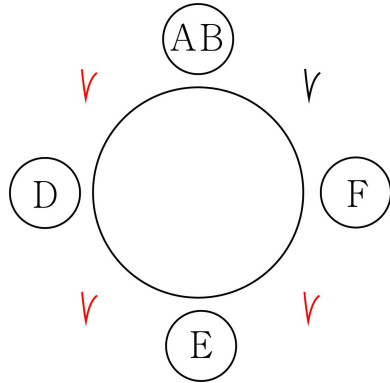
4. 구하고자 하는 확률은 $\frac{54}{5 \times 6^3} + \frac{40}{5 \times 6^3} = \frac{94}{5 \times 6^3} = \frac{47}{5 \times 3 \times 36} = \frac{47}{540}$ 이다. 답은 ㉔!!

21학년도 수능 가형 26번

1. 학생 A와 학생 B가 이웃하니 두 학생 A, B를 하나의 그룹 M라고 하자.
 그룹 M과 학생 D, E, F를 원순열로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$ 가지



그룹 M에서 학생 A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$ 가지



학생 B와 학생 C가 이웃하지 않게 학생 C를 배치하는 경우의 수는 3가지이므로
 구하고자 하는 경우의 수는 $6 \times 2 \times 3 = 36$ 이다. **답은 36!!**

※ 다른 풀이

우선 A를 앉혀 탁자를 고정시킨다. 회전하여 같은 것은 같은 것으로 보기 때문에 A를 앉히는 경우의 수는 1이다. 다음으로 B를 A와 이웃하게 앉히는 경우의 수는 2이다. B의 옆에는 A가 있다. C를 B와 이웃하지 않게 앉히는 경우의 수는 3이다. 나머지 세 사람을 앉히는 경우의 수는 $3!$ 이다. 따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $1 \times 2 \times 3 \times 3! = 36$ 이다.

21학년도 수능 가형 29번

1. 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 줘야 한다.
학생 A가 받는 검은색 모자의 개수가 4 이상이므로
검은색 모자를 먼저 학생 A, B, C, D에게 나누어 준 후에 흰색 모자를 나누어 주도록 하자.

흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이므로
검은색 모자 6개를 4명의 학생에게 나누어 주는 방법은

- (1) $4+2+0+0$
(2) $4+1+1+0$
(3) $5+1+0+0$

3가지의 경우로 나뉜다.

※ $6+0+0+0$ 의 경우, 조건 (다)를 만족할 수 없기에 배제된다. 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생이 A 밖에 없기 때문이다.

2. 네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 흰색 모자의 개수를 각각 a, b, c, d 라 하자.

- (1) $4+2+0+0$

2개의 검은색 모자를 학생 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는
모자를 받을 학생 한 명을 정하는 경우의 수이므로 ${}_3C_1 = 3$ 이다.

학생 B가 검은색 모자 2개를 받았다고 생각하자.

각 학생이 1개 이상의 모자를 받아야 하므로 학생 C, D 각각에게 흰색 모자를 1개씩 나눠주자.

남은 흰색 모자 4개를 네 명의 학생 A, B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_4H_4 = {}_7C_3 = 35 \text{이다.}$$

이제 배제해야 하는 경우를 생각해보자.

학생 C, D는 이미 검은색 모자보다 흰색 모자를 더 많이 받았다.

학생 A, B가 조건 (다)를 만족해야 하므로 $0 \leq a \leq 3, 0 \leq b \leq 1$ 이다.

$a = 4$ 일 때, $b = 0, c = 1, d = 1$ 이므로 경우의 수는 1

$b \geq 2$ 일 때, 학생 B에게 흰색 모자를 2개 나누어주고,

남은 2개의 모자를 네 명의 학생 A, B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10 \text{이다.}$$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $3 \times (35 - 1 - 10) = 3 \times 24 = 72$ 이다.

(2) $4 + 1 + 1 + 0$

2개의 검은색 모자를 학생 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는
모자를 받지 않을 학생 한 명을 정하는 경우의 수이므로 ${}_3C_1 = 3$ 이다.

학생 B와 C가 각각 검은색 모자를 1개씩 받았다고 생각하자.

각 학생이 1개 이상의 모자를 받아야 하므로 우선 학생 D에게 흰색 모자 1개를 나눠주자.

흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생이 A를 포함하여 2명이므로
학생 B, C 중 한 명이 흰색 모자를 1개 이상 받는 경우의 수는 2이다.

학생 C가 흰색 모자 1개를 받았다고 생각하자.

학생 B가 받은 검은색 모자의 개수는 1이므로 흰색 모자를 받아서는 안 된다.

남은 흰색 모자 4개를 세 명의 학생 A, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는
 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$ 이다.

이제 배제해야 하는 경우를 생각해보자.

학생 A, B가 조건 (다)를 만족해야 하므로 $0 \leq a \leq 3, b = 0$ 이다.

$a = 4$ 일 때, $b = 0, c = 1, d = 1$ 이므로 경우의 수는 1이다.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $3 \times 2 \times (15 - 1) = 6 \times 14 = 84$ 이다.

(3) $5 + 1 + 0 + 0$

1개의 검은색 모자를 학생 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는
모자를 받을 학생 한 명을 정하는 경우의 수이므로 ${}_3C_1 = 3$ 이다.

학생 B가 검은색 모자 1개를 받았다고 생각하자.

각 학생이 1개 이상의 모자를 받아야 하므로 학생 C, D 각각에게 흰색 모자를 1개씩 나눠주자.

학생 C, D는 이미 검은색 모자보다 흰색 모자를 더 많이 받았다.

학생 A, B가 조건 (다)를 만족해야 하므로 $0 \leq a \leq 4, b = 0$ 이다.

남은 흰색 모자 4개를 세 명의 학생 A, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는
 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$ 이다. $0 \leq a \leq 4$ 이므로 배제해야 하는 경우는 없다.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $3 \times 15 = 45$ 이다.

(1), (2), (3)에 의하여 구하고자 하는 경우의 수는 $72 + 84 + 45 = 201$ 이다. **답은 201!!**

※ 계산 편의를 위하여 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생을 A, B로 고정해두고
문제 풀이를 진행한 후에 마지막에 3을 곱하여 정답 201을 얻는 방법도 있다.

21학년도 수능 나형 13번

1. $f(1)$ 은 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4 중 어느 것이 되어도 상관없다. $f(1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 4이다.

$f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 를 만족시키도록 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는
1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$ 이다.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $4 \times 20 = 80$ 이다. 답은 ㉔!!