

21학년도 수능 나형 17번

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{xg(x)} = 2$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 에 대하여 $h'(0)$ 의 값은? [4점]

① 27

② 30

③ 33

④ 36

⑤ 39

21학년도 수능 나형 20번

실수 $a(a > 1)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x) = x^2 \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 최댓값은? [4점]

- ① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

21학년도 수능 나형 26번

함수

$$f(x) = \begin{cases} -3x + a & (x \leq 1) \\ \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x > 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 상수이다.) [4점]

21학년도 수능 나형 30번

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$ 는 일차함수이다. 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \begin{cases} |f(x) - g(x)| & (x < 1) \\ f(x) + g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,

$h(0) = 0$, $h(2) = 5$ 일 때, $h(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

21학년도 수능 나형 17번

1. $p(x) = f(x) + g(x)$ 라 하자. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x} = 3$ 에서 $p(0) = f(0) + g(0) = 0$,
 $p'(0) = f'(0) + g'(0) = 3$ 을 뽑아낸다.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{xg(x)} = 2$ 을 보자. $x \rightarrow 0$ 일 때, 분모가 0으로 수렴하므로 분자 또한 0으로 수렴한다.
 $f(0) = -3$, $g(0) = 3$ 을 뽑아낸다.
따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) + 3}{x} \times \frac{1}{g(x)} \right) = \frac{f'(0)}{g(0)} = \frac{f'(0)}{3} = 2$ 이므로
 $f'(0) = 6$, $g'(0) = -3$ 이다.
3. $h(x) = f(x)g(x)$ 에서 $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이므로
 $h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 6 \times 3 + (-3) \times (-3) = 27$ 이다. 답은 ①!!

21학년도 수능 나형 20번

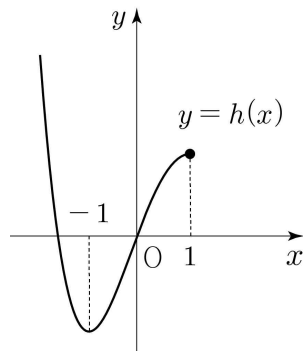
1. $g(x) = x^2 \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t^2 f(t)dt$ 은 정적분으로 정의된 함수의 기본형이므로 $g(0) = 0$,

$g'(x) = 2x \int_0^x f(t)dt$ 를 뽑아내자. 함수 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 $\int_0^x f(t)dt$ 는 사차함수,
 $g'(x)$ 는 오차함수이다.

2. $h(x) = \int_0^x f(t)dt$ 라 하고 그래프를 그려보자. $h'(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$ 이므로

함수 $h(x)$ 는 $x = -1$, $x = a$ 에서 극소, $x = 1$ 에서 극대이다.

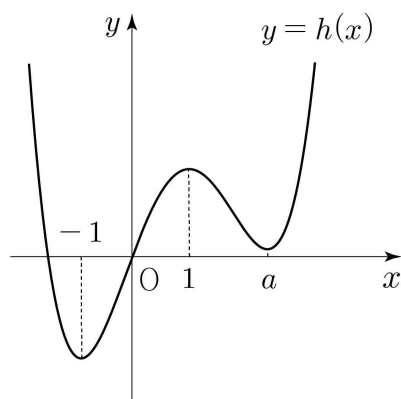
$h(0) = 0$ 이므로 $x \leq 1$ 에서 함수 $h(x)$ 의 개형은 다음과 같이 그려진다.



함수 $h(x)$ 는 $x = 0$ 에서 부호가 변하지만, $y = 2x$ 또한 $x = 0$ 에서 부호가 변하므로
 $g'(x) = 2xh(x)$ 는 $x = 0$ 에서 부호가 변하지 않는다.

함수 $h(x)$ 가 $x < -1$ 에서 부호가 한 번 변하고, $y = 2x$ 는 $x < -1$ 에서 부호가 변하지 않으므로
 함수 $g'(x)$ 또한 $x < -1$ 에서 부호가 한 번 변한다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x < -1$ 에서 오직 하나의 극값을 가져야 하므로 $h(a) \geq 0$ 이다.



$$h(a) = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a (t-1)(t+1)(t-a)dt = \int_0^a (t^3 - at^2 - t + a)dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{a}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + at \right]_0^a = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^2 + a^2 = -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{2}a^2 \geq 0 \text{에서}$$

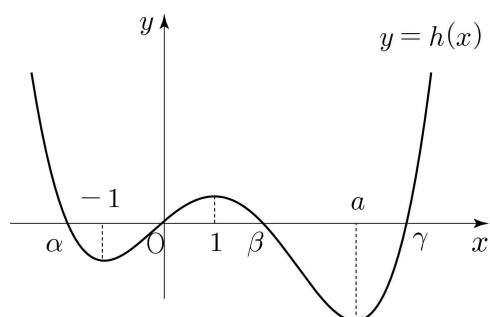
$a^2 - 6 \leq 0$ 이므로 $-\sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{6}$ 이다. $a > 1$ 이므로 $1 < a \leq \sqrt{6}$ 에서 a 의 최댓값은 $\sqrt{6}$ 이다.

답은 ④!!

※ 다른 풀이

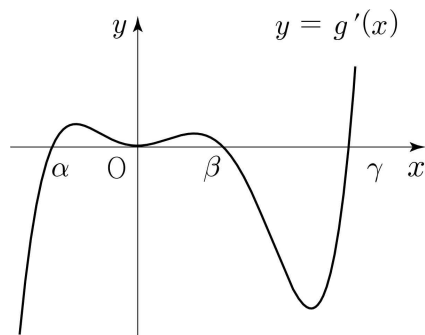
수2 교육과정에서 요구되는 풀이는 아니지만, 참고로 알아두면 나쁠건 없다.

예를 들어서 $y = h(x)$ 의 그래프가 다음과 같다고 하자.



이때 $y = g'(x) = 2xh(x) = \frac{1}{2}x^2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ 이므로

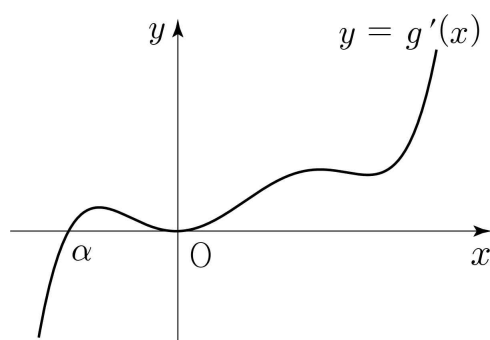
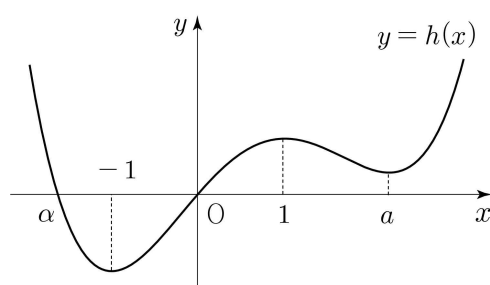
$y = g'(x)$ 의 그래프는 다음과 같이 그려진다.



이 경우 $y = g'(x)$ 는 $x = \alpha, \beta, \gamma$ 세 점에서 부호가 변하므로 $g(x)$ 는 세 개의 극값을 갖는다.

$y = g'(x)$ 는 $x < -1$ 에서 부호가 변하므로 $g(x)$ 가 오직 하나의 극값을 가지기 위해서는

아래 그림과 같이 $h(a) \geq 0$ 이어야 한다.



21학년도 수능 나형 26번

1. 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 1$ 에서 연속이다.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - 3, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} \text{이다.}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}$ 을 살펴보자. $x \rightarrow 1^+$ 일 때, 분모는 0으로 수렴하므로 분자 또한 0으로 수렴한다. $b+1=0$ 이므로 $b=-1$ 이다.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3}+2) = 4 \text{이므로,}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a-3 \text{에서 } a=7 \text{이다. } a+b=6. \text{ 답은 6!!}$$

21학년도 수능 나형 30번

1. 절댓값 안의 함수를 새로운 함수로 작성하자. 차이함수 $p(x) = f(x) - g(x)$ 라 하자.
 $|p(0)| = 0$ 이고, $|p(x)|$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능해야 하므로 $p'(0) = f'(0) - g'(0) = 0$ 이다.
 $p(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $p(x) = x^2(x - a)$ 라 하자.
 $h(2) = f(2) + g(2) = p(2) + 2g(2) = 4 \times (2 - a) + 2g(2) = 5$ 이므로 $g(2) = 2a - \frac{3}{2}$ 이다.
2. 함수 $h(x)$ 는 $x = 1$ 에서 미분가능하므로 $p(1) \geq 0$ 일 때와 $p(1) < 0$ 일 때로 CASE를 분류하자.

(1) $p(1) \geq 0$

$|p(1)| = p(1) = f(1) - g(1) = f(1) + g(1)$ 에서 $g(1) = 0$ 이다.

$p'(1) = f'(1) - g'(1) = f'(1) + g'(1)$ 이므로 $g'(1) = 0$ 이다.

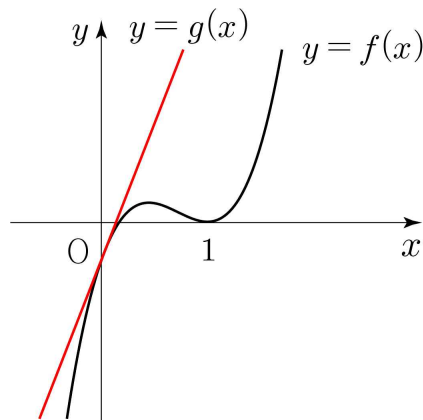
이것은 함수 $g(x)$ 가 일차함수라는 조건에 모순이다.

(2) $p(1) < 0$

$|p(1)| = -p(1) = g(1) - f(1) = f(1) + g(1)$ 에서 $f(1) = 0$ 이다.

$-p'(1) = g'(1) - f'(1) = f'(1) + g'(1)$ 이므로 $f'(1) = 0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)$ 의 그래프 개형은 다음과 같이 그려진다.



3. 1.에서 $g(2) = 2a - \frac{3}{2}$ 을, 2-(2).에서 $-p(1) = g(1)$, $-p'(1) = g'(1)$ 을 알아냈다.

$g(x)$ 는 일차함수이므로 미분계수 = 평균변화율, 즉 $g'(1) = \frac{g(2) - g(1)}{2 - 1}$ 을 이용하자.

$-p(1) = g(1)$ 에서 $g(1) = a - 1$, $-p'(1) = g'(1)$ 에서 $g'(1) = 2a - 3$ 이고

$g'(1) = \frac{g(2) - g(1)}{2 - 1}$ 에서 $2a - 3 = \left(2a - \frac{3}{2}\right) - (a - 1) = a - \frac{1}{2}$ 이므로 $a = \frac{5}{2}$ 이다.

$p(x) = x^2\left(x - \frac{5}{2}\right)$, $g(x) = g'(1)(x - 1) + g(1) = (2a - 3)(x - 1) + (a - 1) = 2(x - 1) + \frac{3}{2}$ 이므로

$h(4) = f(4) + g(4) = p(4) + 2g(4) = 16 \times \frac{3}{2} + 2 \times \left(6 + \frac{3}{2}\right) = 24 + 12 + 3 = 39$ 이다. **답은 39!!**

※ 다른 풀이

1. 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 미분가능하다.

$f(1)-g(1) \geq 0$ 일 때와 $f(1)-g(1) < 0$ 일 때로 CASE를 분류하자.

(1) $f(1)-g(1) \geq 0$: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$ 이다.

$f(1)-g(1)=f(1)+g(1)$ 에서 $g(1)=0$ 이다.

$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$ 이므로 $g'(1)=0$ 이다.

이것은 함수 $g(x)$ 가 일차함수라는 조건에 모순이다.

(2) $f(1)-g(1) < 0$: $|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)$ 이다.

$g(1)-f(1)=f(1)+g(1)$ 에서 $f(1)=0$ 이다.

$g'(1)-f'(1)=f'(1)+g'(1)$ 이므로 $f'(1)=0$ 이다.

함수 $f(x)=(x-1)^2(x-a)$ (a 는 상수)라 하자.

2. 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 미분가능하다.

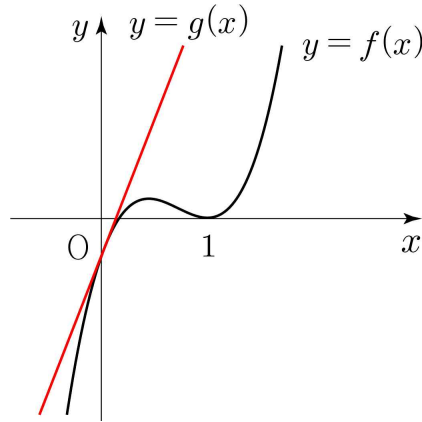
$h(0)=|f(0)-g(0)|=0$ 에서 함수 $|f(x)-g(x)|$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하려면

$x=0$ 에서의 미분계수 또한 0이어야 한다.

따라서 $h'(0)=0$ 이므로 $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$ 이므로 $f(0)=-a$, $f'(0)=1+2a$ 에서

$g(x)=(1+2a)x-a$ 이다.

함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)$ 의 그래프 개형은 다음과 같이 그려진다.



3. $h(2)=f(2)+g(2)=(2-a)+(3a+2)=2a+4=5$ 에서 $a=\frac{1}{2}$ 이므로

$f(x)=(x-1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $g(x)=2x-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $h(4)=f(4)+g(4)=9 \times \left(4-\frac{1}{2}\right) + \left(8-\frac{1}{2}\right) = 36 - \frac{9}{2} + 8 - \frac{1}{2} = 44 - 5 = 39$ 이다.

답은 39!!

문제 Comment

포인트는 두 가지이다.

1. $f(x) - g(x) = p(x)$ 라 할 때, $h(x) = |p(x)|$ ($x < 1$)이다.

이때, $p(0) = 0$ 이고 $y = |p(x)|$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능해야 하므로 $p'(0) = 0$ 이다.

2. $h(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능하므로 연속이다. 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} h(x)$ 을 만족해야 한다.

이때, $x < 1$ 에서 $h(x) = |p(x)|$ 이므로 $p(1) \geq 0$ 일 때와 $p(1) < 0$ 일 때로 CASE를 분류해야 한다.