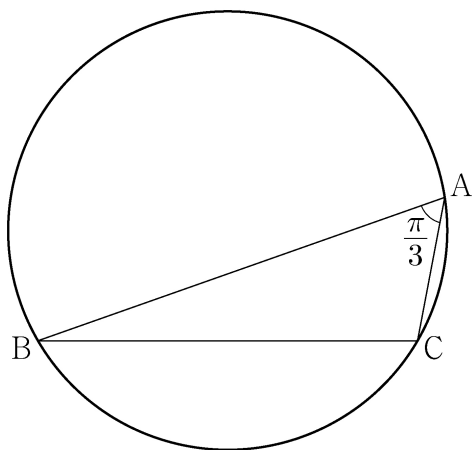


21학년도 수능 가형 10번

$\angle A = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 1$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

- ① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

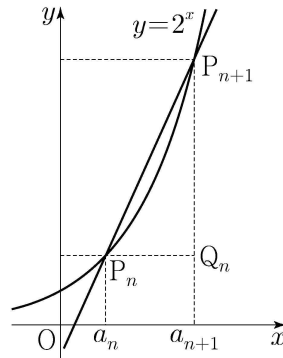


21학년도 수능 가형 16번

상수 $k(k > 1)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < a_{n+1}$ 이고 곡선 $y = 2^x$ 위의
 두 점 $P_n(a_n, 2^{a_n})$, $P_{n+1}(a_{n+1}, 2^{a_{n+1}})$ 을 지나는 직선의 기울기는 $k \times 2^{a_n}$ 이다.

점 P_n 을 지나고 x 축에 평행한 직선과 점 P_{n+1} 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n 이라 하고 삼각형 $P_n Q_n P_{n+1}$ 의 넓이를 A_n 이라 하자. 다음은 $a_1 = 1$, $\frac{A_3}{A_1} = 16$ 일 때, A_n 을 구하는 과정이다.



두 점 P_n, P_{n+1} 을 지나는 직선의 기울기가 $k \times a_n$ 이므로

$$2^{a_{n+1} - a_n} = k(a_{n+1} - a_n) + 1$$

이다. 즉, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} - a_n$ 은 방정식 $2^x = kx + 1$ 의 해이다.

$k > 1$ 이므로 방정식 $2^x = kx + 1$ 은 오직 하나의 양의 실근 d 를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} - a_n = d$ 이고, 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 d 인 등차수열이다.

점 Q_n 의 좌표가 $(a_{n+1}, 2^{a_n})$ 이므로

$$A_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)(2^{a_{n+1}} - 2^{a_n})$$

이다. $\frac{A_3}{A_1} = 16$ 이므로 d 의 값은 (가)이고,

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \text{(나)}$$

이다. 따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $A_n = \text{(다)}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $p + \frac{g(4)}{f(2)}$ 의 값은? [4점]

① 118

② 121

③ 124

④ 127

⑤ 130

21학년도 수능 가형 21번

수열 $\{a_n\}$ 은 $0 < a_1 < 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$$

$$(나) \ a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$$

$a_8 - a_{15} = 63$ 일 때, $\frac{a_8}{a_1}$ 의 값은? [4점]

① 91

② 92

③ 93

④ 94

⑤ 95

21학년도 수능 나형 12번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = -n^2 + n$$

을 만족시킨다. a_{11} 의 값은? [3점]

① 88

② 91

③ 94

④ 97

⑤ 100

21학년도 수능 나형 16번

$0 \leq x \leq 4\pi$ 일 때, 방정식

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 = 0$$

의 모든 해의 합은? [4점]

① 5π

② 6π

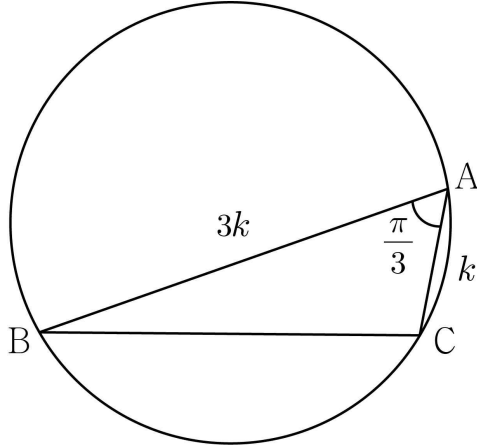
③ 7π

④ 8π

⑤ 9π

21학년도 수능 가형 10번

1. $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$ 이므로 $\overline{AB} = 3k$, $\overline{AC} = k$ 라 하자. 코사인법칙을 활용하여 $\overline{BC}$ 를 구하자.



$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 9k^2 + k^2 - 3k^2 = 7k^2 \text{ 이므로 } \overline{BC} = \sqrt{7}k \text{ 이다.}$$

2. 사인법칙을 활용하자. $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이는 7이므로 $\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{7}k}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 14$ 에서

$$\overline{AC} = k = \sqrt{21} \text{ 이다. 답은 ㉔!!}$$

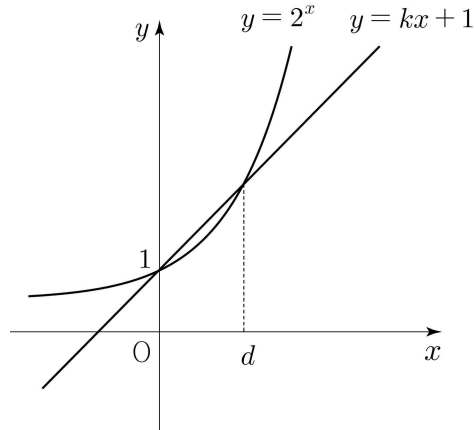
21학년도 수능 가형 16번

1. 수열 $\{a_n\}$ 이 공차가 d 인 등차수열임을 그래프를 그려가며 확인해보도록 하자.

직선 $P_n P_{n+1}$ 의 기울기는 $\frac{2^{a_{n+1}} - 2^{a_n}}{a_{n+1} - a_n} = k \times 2^{a_n}$ 이다. 양변을 $\frac{2^{a_n}}{a_{n+1} - a_n}$ 으로 나눠주면

$2^{a_{n+1} - a_n} - 1 = k(a_{n+1} - a_n)$ 에서 $2^{a_{n+1} - a_n} = k(a_{n+1} - a_n) + 1$ 이다. $a_{n+1} - a_n = x$ 로 치환하자.

$2^x = kx + 1$ 에서 $y = 2^x$ 의 그래프와 $y = kx + 1$ 의 그래프를 그려보자.



$k > 1$ 이므로 $y = 2^x$ 의 그래프와 $y = kx + 1$ 의 그래프는 $x > 0$ 에서 한 점에서 만난다.

그 교점의 x 좌표를 d 라 하면 $x = a_{n+1} - a_n = d$ 에서 $a_{n+1} = a_n + d$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 d 인 등차수열이다.

2. $2^{a_{n+1}} - 2^{a_n} = 2^{a_n + d} - 2^{a_n} = 2^{a_n}(2^d - 1)$ 을 이용하자.

$$A_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)(2^{a_{n+1}} - 2^{a_n}) = \frac{1}{2} \times d \times (2^d - 1) \times 2^{a_n} \text{이므로}$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\frac{1}{2} \times d \times (2^d - 1) \times 2^{a_3}}{\frac{1}{2} \times d \times (2^d - 1) \times 2^{a_1}} = \frac{2^{a_3}}{2^{a_1}} = 2^{a_3 - a_1} = 2^{2d} = 16 \text{에서 } d = 2 \text{이다. 따라서 } p = 2.$$

3. $a_1 = 1$ 이므로 $a_n = 2n - 1$ 이므로 $A_n = 2^{a_{n+1}} - 2^{a_n} = 2^{2n+1} - 2^{2n-1} = 3 \times 2^{2n-1}$ 이다.

따라서 $f(n) = 2n - 1$, $g(n) = 3 \times 2^{2n-1}$ 에서 $p + \frac{g(4)}{f(2)} = 2 + \frac{3 \times 2^7}{3} = 2 + 128 = 130$ 이다.

답은 ⑥!!

21학년도 수능 가형 21번

1. 박스 안의 조건과 $a_8 - a_{15} = 63$ 을 활용하기 위해 a_8, a_{15} 를 먼저 구해보자.

$$a_8 = a_2 \times a_4 + 1, \quad a_{15} = a_2 \times a_7 - 2$$

$$a_4 = a_2 \times a_2 + 1, \quad a_7 = a_2 \times a_3 - 2$$

$$a_2 = a_2 \times a_1 + 1, \quad a_3 = a_2 \times a_1 - 2 = a_2 - 3 \text{ 이다.}$$

모든 항을 a_2 에 대하여 정리하면

$$a_4 = a_2^2 + 1, \quad a_8 = a_2^3 + a_2 + 1, \quad a_7 = a_2^2 - 3a_2 - 2, \quad a_{15} = a_2^3 - 3a_2^2 - 2a_2 - 2 \text{ 이므로}$$

$$a_8 - a_{15} = 3a_2^2 + 3a_2 + 3 = 63 \text{ 에서 } 3a_2^2 + 3a_2 - 60 = 3(a_2 - 4)(a_2 + 5) = 0 \text{ 이다.}$$

※ 원한다면 a_8 과 a_{15} 를 a_2 대신 a_1 을 기준으로 정리할 수 있다. 다만, a_1 을 기준으로 한다면

$a_2 = \frac{1}{1-a_1}$ 이기에 식 정리가 복잡해진다. 따라서 a_8 과 a_{15} 를 a_2 에 대하여 정리하는 것이 효율적이다.

2. $0 < a_1 < 1$ 이므로 CASE를 분류하여 a_1 을 구해보자.

(1) $a_2 = 4$

$$a_2 = a_2 \times a_1 + 1 \text{ 에서 } 4 = 4a_1 + 1, \quad a_1 = \frac{3}{4} \text{ 이다.}$$

(2) $a_2 = -5$

$$a_2 = a_2 \times a_1 + 1 \text{ 에서 } -5 = -5a_1 + 1, \quad a_1 = \frac{6}{5} \text{ 이므로 } 0 < a_1 < 1 \text{ 라는 조건에 모순이다.}$$

(1), (2)에 의하여 $a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 4$ 이므로 $a_8 = a_2^3 + a_2 + 1 = 4^3 + 4 + 1 = 69,$

$$\frac{a_8}{a_1} = \frac{69}{\frac{3}{4}} = 92 \text{ 이다. 답은 ㉔!!}$$

21학년도 수능 나형 12번

1. $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})$ 을 전개해보자.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 - a_{n+1} = 1 - a_{n+1} = -n^2 + n \quad \text{이므로 } a_{n+1} = n^2 - n + 1 \text{이다.}\end{aligned}$$

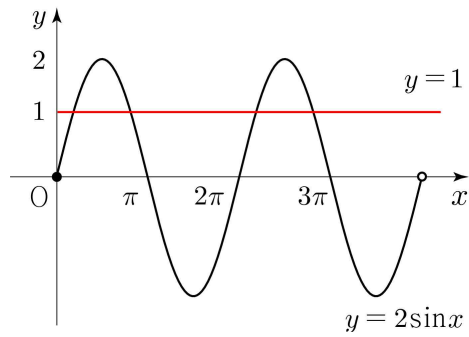
$n = 10$ 일 때, $a_{11} = 10^2 - 10 + 1 = 91$ 이다. 답은 ㉔!!

21학년도 수능 나형 16번

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ 를 활용하자.

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 = 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = (2\sin x + 3)(2\sin x - 1) = 0 \text{이므로}$$
$$2\sin x = 1 \text{이다.}$$

2. $y = 2\sin x$ 의 그래프를 그려서 확인하자.



사인함수의 대칭성에 의하여 모든 해의 합은 $\pi + 5\pi = 6\pi$ 이다. 답은 ②!!