2021수능수학가형풀이

by 어차피 인생은 정시? [866752]

2021.01.30

1. [계산] 30″ 수학1 지수 계산 (유형 2)

1. $\sqrt[3]{9} \times 3^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $3^{\frac{1}{2}}$ ③ 3 ④ $3^{\frac{3}{2}}$ ⑤ 9

$$3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3^1 = 3$$

[답] ③

[comment]

전형적인 1번 문제이다. 빠르고 정확하게.

참고로 6평 1번, 9평 1번도 지수 계산이었다.

2. [계산] 30″ 미적분 함수의 극한 유리화

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}{4n^2+2n+1-4n^2}$$
$$= \frac{\sqrt{4}+2}{2} = 2$$

[답] ②

[comment]

전형적인 1 페이지 문제이다. 빠르고 정확하게.

3. [계산] 30″ 수학 1 삼각함수 부호 (유형 12)

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \sin\theta > 0,\ \cos\theta < 0,\ \tan\theta < 0$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{7} \xrightarrow[\sin^2\theta+\cos^2\theta=1]{} \cos\theta = -\frac{\sqrt{28}}{7}$$
$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[답] ①

[comment]

1 페이지에 나올 만한 유형이다.

다만 부호에 주의해야 한다! θ 의 범위에

주목하지 않으면 5 번을 고르게 된다.

4. [계산] 1′ 확통 조건부확률 계산

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B\,|\,A) = \frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A\,|\,B) = \frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B) = \frac{7}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(A \cap B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{11}$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4},\quad P(A) = 4P(A\cap B)$$
$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3},\quad P(B) = 3P(A\cap B)$$
$$\therefore P(A)+P(B) = 7P(A\cap B) = \frac{7}{10},\quad P(A\cap B) = \frac{1}{10}$$

[답] ④

[comment]

조건부확률의 개념을 알고 있다면 금방 해결할

수 있다.

5. [계산] 1′ 수학1 지수 부등식 (유형 7)

5. 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$3^{-2x} < 3^{21-4x}$

$\Leftrightarrow$ $-2x < 21-4x$

$\Leftrightarrow$ $2x < 21$, $x < 10.5$

$\therefore$ $x = 1 \sim 10$, 10개

[답]⑤

[comment]

지수 부등식의 쉬운 유형이다. 보자마자 풀이가 나오면 된다.

6. [계산] 1′ 확통 표본평균의 평균, 표준편차

6. 정규분포 $\mathrm{N}(20, 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})$의 값은? [3점]

① $\frac{83}{4}$ ② $\frac{85}{4}$ ③ $\frac{87}{4}$ ④ $\frac{89}{4}$ ⑤ $\frac{91}{4}$

$E(X) = 20,\ \sigma(X) = 5$

$E(\bar{X}) = E(X) = 20$

$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$

$\therefore E(\bar{X}) + \sigma(\bar{X}) = 20 + \frac{5}{4} = \frac{85}{4}$

[답]②

[comment]

표본평균의 평균 = 모평균

$$\text{표본평균의 표준편차} = \frac{\text{모표준편차}}{\sqrt{\text{표본 개수}}}$$

통계 공식은 반드시 수능, 모의고사 1주전에 복습해서 잊지 않도록 하자.

7. [계산] 1′30″ 미적분 극값 계산

7. 함수 $f(x) = (x^2-2x-7)e^x$의 극댓값과 극솟값을 각각 a, b라 할 때, $a\times b$의 값은? [3점]

① -32 ② -30 ③ -28 ④ -26 ⑤ -24

$f'(x) = e^x\{(x^2-2x-7)+2x-2\}$

$= e^x(x^2-9) = 0$ 인 경우 : $x=3,\ x=-3$

$f(3) = (9-6-7)e^3 = -4e^3$ $(=b)$

$f(-3) = (9+6-7)e^{-3} = 8e^{-3}$ $(=a)$

$\therefore a\times b = -32$

[답]①

계산 Tip!

$e^x(ax^2+bx+c)$ 미분 빠르게!

$\Rightarrow e^x\{\underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{이차식 그대로}} + \underbrace{2ax+b}_{\text{이차식 1번 미분}}\}$

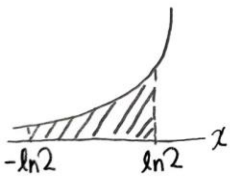
[comment]

극점에서 기울기가 0이라는 점을 이용하면 쉽게 풀린다. f(x)가 자주 나오는 형태이므로 계산 Tip의 미분하는 방법을 기억해두면 좋다.

8. [계산] 1′ 미적분 넓이 계산

8. 곡선 $y=e^{2x}$과 x축 및 두 직선 $x=\ln\frac{1}{2}$, $x=\ln 2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ $\frac{15}{7}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3



$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{2x}\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-\ln 2}^{\ln 2}$

$= \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$

[답]②

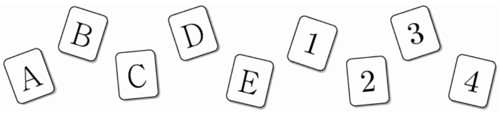
[comment]

간단한 적분 문제이다.

9. [활용] 1′30″ 확통 확률 계산

9. 문자 A, B, C, D, E가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드와 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 이 9장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 각각 숫자가 적혀 있는 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{12}$



sol 1)

전체 경우의 수 : $9!$

문제 조건에 맞는 경우의 수:

$(\_A\_)$, B, C, D, E, _, _

$4 \times 3 \times 7! = 12 \times 7!$

A 양 옆 숫자 배치

$(_A_)$와 나머지 6개 순서

$\therefore \frac{12 \times 7!}{9!} = \frac{12}{9 \times 8} = \frac{1}{6}$

[답] ④

sol 2)

_ _ _ _ _ _ _ _ _

이 중 하나가 A

$\frac{7}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{6}$

A 위치

A 왼쪽: 남은 8개 중 숫자 4개

A 오른쪽: 남은 7개 중 숫자 3개

[답] ④

[comment]

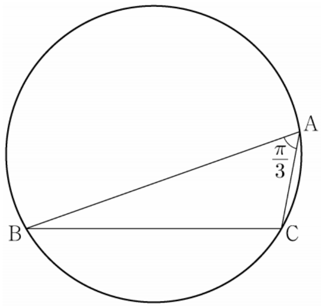
확률 문제는 경우의 수나 곱셈법칙으로 계산할 수 있다. 경우의 수를 이용한 풀이는 계산이 긴 경우가 많지만 항상 풀리고, 곱셈법칙을 이용한 풀이는 대칭성이 적은 경우 아이디어가 필요하지만 계산이 짧다. 두 풀이를 모두 익혀 두는 것이 좋다. 참고로 필자는 수능 시험장에서 첫 번째 풀이로 풀었다.

10. [활용] 1′30″

수학1 사인법칙(유형 15), 코사인법칙(유형 16)

10. $\angle A = \frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$



① cos법칙

$\overline{AB} = 3a,\ \overline{AC} = a \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{(3a)^2 + a^2 - 2 \times 3a \times a \times \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\cos\frac{\pi}{3}}}$

$= \sqrt{7}a$

② sin법칙

$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{7}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \times 7 \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} a \times \cancel{2} = \cancel{2} \times \frac{7}{\sqrt{7}}$

$\therefore a = \sqrt{21}$

[답] ②

도형이 나오면 sin, cos 법칙!

[comment]

삼각형이 나오는 도형문제라면 사인법칙, 코사인법칙을 적용해보자!

11. [계산] 1′30″ 미적분 정적분과 급수

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 의 값은? [3점]

① $4\sqrt{3}-6$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $5\sqrt{3}-8$
④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $3\sqrt{3}-5$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}$$
$$=\int_0^1\sqrt{\frac{3}{3+x}}\,dx$$
$$=\sqrt{3}\left[2\sqrt{x+3}\right]_0^1=2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=4\sqrt{3}-6$$

[답]①

[comment]
정적분과 급수 부분에서 계산이 간단한 편인 문제이다. 자주 나오는 유형이므로 원리를 정확히 숙지해두자.

12. [계산] 1′ 확통 표준화

12. 확률변수 X는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y가

$$\mathrm{P}(4\le X\le 8)+\mathrm{P}(Y\ge 8)=\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(Y\le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

$\mathrm{P}(4\le X\le 8)=\mathrm{P}(-\frac{4}{3}\le Z\le 0)$
$\mathrm{P}(Y\ge 8)=\mathrm{P}(Z\ge\frac{4}{3})$ 이어야 함.
$\Rightarrow \mathrm{P}(Y\le 8+\frac{2\sigma}{3})=\mathrm{P}(Z\le\frac{4}{3}+\frac{2}{3})=\mathrm{P}(Z\le 2)$
$=0.5+0.4772=0.9772$

[답]④

[comment]
통계에서 표준화, 정규분포 문제는 자주 출제되므로 유형을 익혀서 빠르게 풀 수 있도록 연습하자! 2~3점 문제에서 시간단축을 할 수 있으면 좋다.

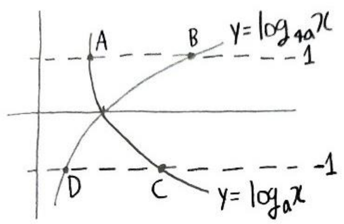
13. [활용] 2′30″

수학1 지수, 로그 ㄱㄴㄷ (유형 9)

13. $\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a}x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>
ㄱ. 선분 AB를 1:4로 외분하는 점의 좌표는 (0, 1)이다.
ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.
ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$\frac{1}{4}<a<1$
$1<4a<4$

$A(a,1)$ $B(4a,1)$ $C(\frac{1}{a},-1)$ $D(\frac{1}{4a},-1)$

ㄱ. $A(a,1)$ $B(4a,1)$ 1:4 외분 $\Rightarrow(0,1)$

ㄴ. □ABCD 직사각형
$\Leftrightarrow$ A와 D의 x좌표 동일 : $a=\frac{1}{4a}$, $a=\frac{1}{2}$
B와 C의 x좌표 동일 : $4a=\frac{1}{a}$, $a=\frac{1}{2}$

~~ㄷ.~~ $\overline{AB}=4a-a=3a$
$\overline{CD}=\frac{1}{a}-\frac{1}{4a}=\frac{3}{4a}$
$3a<\frac{3}{4a}\Leftrightarrow a^2<\frac{1}{4}\Leftrightarrow a<\frac{1}{2}$

$\therefore$ ㄱ, ㄴ

[답]③

주의!
ㄱ. 외분점 : 수학(상),(하)에 나오는 개념
$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ $m:n$ 외분점
$\Rightarrow\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$

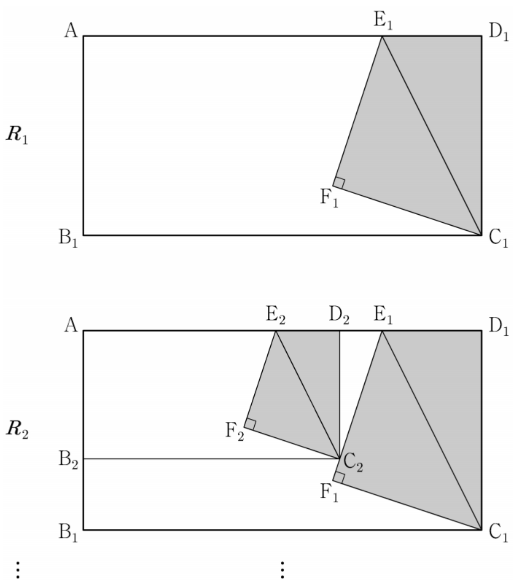
예) $A(a,1)$ $B(4a,1)$
$\Rightarrow \overline{AB}$ 1:4 외분점 $\left(\frac{1\cdot 4a-4\cdot a}{1-4},\ 1\right)\Rightarrow(0,1)$

13번 [comment]

지수, 로그 ㄱㄴㄷ 유형인데도 13번에 3점으로 출제되었고, ㄱ에서는 다소 생소한 외분점 개념을 물어봤다는 점이 특이하다. 이 유형은 지수, 로그에서 가장 까다로운 유형 중 하나이고, 2021학년도 6평 가형 18번도 이 유형에 해당하니 풀어보자. (그리고 답이 5번이 아니다.)

14. [활용] 2’30” 미적분 수열의 극한 도형

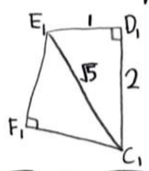
14. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다. 사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$ ④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

<14번 풀이>

수열의 극한 ⇒ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ 공비 r, 첫째 도형 넓이 a



$a = \frac{1}{2}\times1\times2 + \frac{1}{4}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$
$= \frac{9}{4}$

"tan덧셈정리"

$\overline{AD_2}=2k$, $\overline{D_2C_2}=k$, $\overline{D_2E_1}=3-2k$

$\angle D_1E_1C_1=\theta$, $\tan\theta=2$, $\tan\angle D_2E_1C_2=\tan(\pi-\frac{\pi}{4}-\theta)$
$=\tan(\frac{3}{4}\pi-\theta)=\frac{-1-2}{1+(-1)\cdot2}=3$

$\frac{k}{3-2k}=3 \Rightarrow k=\frac{9}{7}$, $r=\left(\frac{\frac{9}{7}}{2}\right)^2=\frac{81}{196}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{81}{196}} = \frac{441}{115}$ [답]③

14번 [comment]

수열의 극한 대표 유형이다. 도형 등비급수 문제는 공비와 첫째 도형 넓이를 구하면 풀린다. 이 문제에서는 공비를 구할 때 탄젠트 덧셈정리를 이용해야 하는데, 최근 기출에서는 잘 나오지 않은 개념이므로 잊지 말고 기억해 두자.

15. [활용] 2′ 미적분 부정적분

15. $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2},\quad f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은? [4점]

> (가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다.
> (나) $f(2)+g(-2)=9$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)=2x+\frac{3}{x}+C,\ f(1)=5+C=5 \ \therefore C=0$

$g'(x)=f'(-x)=2-\frac{3}{(-x)^2}=2-\frac{3}{x^2}\quad (x<0)$

$g(x)=2x+\frac{3}{x}+C'$

$\left.\begin{array}{l} f(2)=4+\frac{3}{2} \\ g(-2)=-4-\frac{3}{2}+C' \end{array}\right] f(2)+g(-2)=C'=9$

$\therefore g(-3)=-6-1+9=2$

[답]②

[comment]

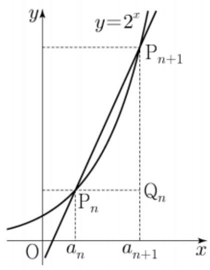
부정적분에서 적분상수를 고려하지 않으면 문제가 풀리지 않으니 주의하자. 그리고 (가)에서 x<0이라는 범위가 있는 점도 다른 문제에서는 활용될 수 있으니 눈여겨보자.

16. [활용] 2′30″ 수학1 등비수열(유형 17)

16. 상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고
> 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}_n(a_n,\ 2^{a_n})$, $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ 2^{a_{n+1}})$을 지나는 직선의 기울기는 $k\times 2^{a_n}$이다.

점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자.



다음은 $a_1=1$, $\frac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.

> 두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k\times 2^{a_n}$이므로
>
> $2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$
>
> 이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은 방정식 $2^x=kx+1$의 해이다.
> $k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.
> 점 Q_n의 좌표가 $(a_{n+1},\ 2^{a_n})$이므로
>
> $A_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$
>
> 이다. $\frac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 $\boxed{\text{(가)}}$이고,
> 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
>
> $a_n=\boxed{\text{(나)}}$
>
> 이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+\frac{g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

① 118 ② 121 ③ 124 ④ 127 ⑤ 130

$a_{n+1}-a_n=d$

$\Rightarrow \frac{A_3}{A_1}=\frac{\frac{1}{2}\cdot d\cdot(2^{a_4}-2^{a_3})}{\frac{1}{2}\cdot d\cdot(2^{a_2}-2^{a_1})}=2^{2d}=16 \quad \therefore d=2=p$

$a_1=1,\ d=2 \Rightarrow a_n=2(n-1)+1=2n-1=f(n)$

$A_n=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2^{2n+1}-2^{2n-1})=\frac{3}{2}\cdot 2^{2n}=g(n)$

$p+\frac{g(4)}{f(2)}=2+\frac{\frac{3}{2}\cdot 2^8}{3}=2+128=130$ [답]⑤

[comment]

과정을 따라가며 빈칸을 구하고, 빈칸의 식과 수를 정확히 정리해서 실수하지 말도록 하자.

17. [준킬러] 2'30" 확통 기댓값

17. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 2 이하이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼,
> 3 이상이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼
> 이동시킨다.

이 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

i) 주사위 2 이하 : 확률 $\frac{2}{6}$

x축 +3 이동 : ($3x+4y=0$에서의 거리)

$= \frac{|3\cdot 3+4\cdot 0+0|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{9}{5}$

ii) 주사위 3이상 : 확률 $\frac{4}{6}$

y축 +1 이동 : ($3x+4y=0$에서의 거리)

$= \frac{|3\cdot 0+4\cdot 1+0|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}$

1번 이동 ⇒ $3x+4y=0$에서의 거리 기댓값

$= \frac{1}{3}\times\frac{9}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{17}{15}$

$\therefore E(X) = 15\cdot\frac{17}{15} = 17$

15번 이동

[답] ③

[comment]

점과 직선 사이의 거리 공식을 기억하는 것이 좋다. 이 문제는 통계의 형식을 띠고 있지만 기존의 확통 문제와 풀이법은 비슷하다.

18. [준킬러] 3' 미적분 함수의 극한

18. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

라 하자. $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a-2}{3}x & (x>1)\\ \frac{a}{4} & (x=1)\\ 2x & (-1<x<1)\\ -\frac{a}{4} & (x=-1)\\ \frac{a-2}{3}x & (x<-1)\end{cases}$$

$(f\circ f)(1) = f(\frac{a}{4}) = \frac{5}{4}$

i) $\frac{a}{4}>1$: $f(\frac{a}{4}) = \frac{a-2}{3}\cdot\frac{a}{4} = \frac{5}{4}$

$(a>4)$ $a(a-2)=15$, $a^2-2a-15=0$

$\therefore a=5, \cancel{-3}$

ii) $\frac{a}{4}=1$: $f(\frac{a}{4})=f(1)=1$ (x)

$(a=4)$

iii) $-1<\frac{a}{4}<1$: $f(\frac{a}{4}) = 2\cdot\frac{a}{4} = \frac{a}{2} = \frac{5}{4}$ $\therefore a=\frac{5}{2}$

$(-4<a<4)$

iv) $\frac{a}{4}=-1$: $f(\frac{a}{4})=f(-1)=1$ (x)

$(a=-4)$

v) $\frac{a}{4}<-1$: $f(\frac{a}{4}) = \frac{a-2}{3}\cdot\frac{a}{4} = \frac{5}{4}$

$(a<-4)$ $a(a-2)=15$, $a^2-2a-15=0$

$\therefore a=\cancel{5}, \cancel{-3}$ (x)

⇒ $a=5, \frac{5}{2}$ → a 합 $\frac{15}{2}$

[답] ③

[comment]

발상이 필요하지는 않지만 계산량이 많은 문제이다. 모든 경우의 수를 생각해서 빠뜨리지 말고 구해보자.

19. [준킬러] 4′ 확통 확률 계산

19. 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
> 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고,
> 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은? [4점]

① $\frac{13}{180}$ ② $\frac{41}{540}$ ③ $\frac{43}{540}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{47}{540}$

i) 주머니 공이 3 : 확률 $\frac{2}{5}$

주사위 3번 눈 $a, b, c \Rightarrow a+b+c=10$

$a \geq 1,\ b \geq 1,\ c \geq 1 \Rightarrow a'=a-1,\ b'=b-1,\ c'=c-1$

$a' \geq 0,\ b' \geq 0,\ c' \geq 0$

$a'+b'+c'=7 \rightsquigarrow a', b', c'$ 중 6, 7은 없어야 함

전체: ${}_3H_7 = {}_9C_2 = 36$

제외 : $\{a', b', c'\} = \{0, 1, 6\}$, $\{0, 0, 7\}$
6가지 3가지

∴ i) 경우의 수 $= 36-6-3=27$

i) 주사위 확률 $= \frac{27}{6^3} = \frac{1}{8}$

ii) 주머니 공이 4 : 확률 $\frac{3}{5}$

i)과 같은 방법으로 계산 됨

$a+b+c+d=10,\ a'+b'+c'+d'=6$

전체: ${}_4H_6 = {}_9C_3 = 84$

제외: $\{a', b', c', d'\} = \{0, 0, 0, 6\}$: 4가지

∴ ii) 주사위 확률 $= \frac{84-4}{6^4} = \frac{5}{81}$

$\Rightarrow$ 종합 확률 $= \frac{2}{5} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{81} = \frac{1}{20} + \frac{1}{27} = \frac{47}{540}$

[답] ⑤

[comment]

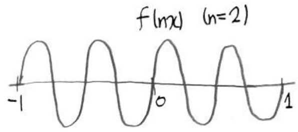
계산량이 많은 편이지만 부정방정식과 중복조합을 이용하는 전형적인 문제이다. a′=a-1로 설정하는 방법은 정말 자주 사용하므로 반드시 익혀두자.

20. [킬러] 6′ 미적분 부분적분

20. 함수 $f(x) = \pi \sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

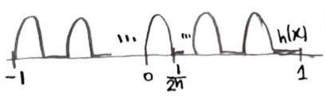
> 함수 $h(x) = f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2, \quad \int_{-1}^{1} xh(x)dx = -\frac{1}{32}$$
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16



$g(x) = 0$ or 1

$\int_{-1}^{1} h(x)dx$ 가 최대인 경우를 보면,



왼쪽 그림처럼

$f(nx)<0$일 때 $g(x)=0$

$f(nx) \geq 0$일 때 $g(x)=1$

$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2n\int_0^{\frac{1}{2n}} \pi \sin 2n\pi x\, dx$

$2n\pi x = t$

$2n\pi\, dx = dt$

$= \int_0^{\pi} \sin t\, dt$

$= [-\cos t]_0^{\pi} = 1-(-1) = 2$

∴ $h(x)$의 그래프는 위의 경우로 결정됨.

$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \frac{1}{32}$로 n을 구하자.

[풀이1]

$\int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} xh(x)dx = \pi\int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} x\sin 2n\pi x\, dx$

$2n\pi x = t$

$2n\pi\, dx = dt$

$= \frac{1}{4n^2\pi}\int_{-2n\pi}^{-2n\pi+\pi} t\sin t\, dt$

$= \frac{1}{4n^2\pi}\left\{[-t\cos t]_{-2n\pi}^{-2n\pi+\pi} - \int_{-2n\pi}^{-2n\pi+\pi} -\cos t\, dt\right\}$

$= \frac{1}{4n^2\pi}\left\{(-2n\pi+\pi)+(-2n\pi) + \cancel{[\sin t]_{-2n\pi}^{-2n\pi+\pi}}\right\}$

같은 방법으로,

$\int_{-1+\frac{2}{2n}}^{-1+\frac{3}{2n}} xh(x)dx = \frac{1}{4n^2\pi}\{(-2n\pi+3\pi)+(-2n\pi+2\pi)\}$

⋮

$\int_{1-\frac{2}{2n}}^{1-\frac{1}{2n}} xh(x)dx = \frac{1}{4n^2\pi}\{(2n\pi-2\pi)+(2n\pi-\pi)\}$

∴ $\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \frac{1}{4n^2\pi}\cdot\pi\cdot\{(-2n)+\cancel{(-2n+1)}+\cancel{(-2n+2)}+\cdots+\cancel{(2n-2)}+\cancel{(2n-1)}\}$

$= -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$ ∴ $n=16$

[풀이 2]

$\underset{\text{기함수}}{x}\ \underset{\text{기함수}}{\underline{\sin 2n\pi x}} \Rightarrow$ 우함수

$$\int_{-1}^{1} xh(x)\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} x\sin 2n\pi x\,dx}_{\to \int_{1-\frac{1}{2n}}^{1} x\sin 2n\pi x\,dx} + \underbrace{\int_{-1+\frac{2}{2n}}^{-1+\frac{3}{2n}} x\sin 2n\pi x\,dx}_{\to \int_{1-\frac{3}{2n}}^{1-\frac{2}{2n}} x\sin 2n\pi x\,dx}$$

$$+ \cdots + \int_{0}^{\frac{1}{2n}} x\sin 2n\pi x\,dx + \cdots + \int_{1-\frac{2}{2n}}^{1-\frac{1}{2n}} x\sin 2n\pi x\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} x\sin 2n\pi x\,dx \qquad \begin{cases} 2n\pi x = t \\ 2n\pi\,dx = dt \end{cases}$$

$$= \frac{1}{4n^2\pi}\int_{0}^{2n\pi} t\sin t\,dt$$

$$= \frac{1}{4n^2\pi}\left\{\left[-t\cos t\right]_{0}^{2n\pi} - \int_{0}^{2n\pi} -\cos t\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{4n^2\pi}\left\{-2n\pi - 0 + \cancel{\left[\sin t\right]_{0}^{2n\pi}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32} \qquad \therefore n=16$$

[답]⑤

[comment]

20번이지만 21번 급으로 문제의 난이도가 높은 편이다. 이 문제에서 시간 소모가 커서 시험 운영에 어려움을 겪은 수험생들이 많을 것이다.

우선 h(x)의 식을 결정해야 하는데, 위의 풀이처럼 h(x)의 정적분 값이 최대인 상황을 가정하는 것이 시험장에서 구사하기에 적절한 풀이이다. h(x)가 연속함수임을 고려하면, h(x)의 식이 1가지로 결정되는 것을 증명할 수 있다.

두 번째로 xh(x)의 정적분을 계산해야 하는데, 부분적분 계산이 다소 복잡하므로 집중해서 계산해야 한다.

(-1/32라는 숫자를 통해 답이 32의 약수인 1번 혹은 5번이라는 점을 추측할 수 있다.)

21. [킬러] 5′ 수학1 수열 대입 – hard (유형 24)

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0<a_1<1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_2\times a_n+1$
(나) $a_{2n+1}=a_2\times a_n-2$

$a_8-a_{15}=63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91 ② 92 ③ 93 ④ 94 ⑤ 95

수열 킬러 : 해 보기! 미지수 몇 개로 정리하기!

$a_2=a_2\times a_1+1$

$a_3=a_2\times a_1-2=a_2-3$

$\vdots$

$\Rightarrow a_2=A$라 두고, $a_8-a_{15}=63$, $0<a_1<1$을 이용해 A를 구해서 답을 구하자.

(가) $\Rightarrow a_4=A^2+1$, $a_8=A(A^2+1)+1=A^3+A+1$

(나) $\Rightarrow a_7=A(A-3)-2$, $a_{15}=A\{A(A-3)-2\}-2$

$=A^3-3A^2-2A-2$

$a_8-a_{15}=3A^2+3A+3=63$

$A^2+A-20=0 \Rightarrow A=-5$ or 4

i) $A=-5 \Rightarrow -5=-5\cdot a_1+1$, $a_1=\frac{6}{5}$ (x)

$\because 0<a_1<1$ (x)

ii) $A=4 \Rightarrow 4=4a_1+1$, $a_1=\frac{3}{4}$ (o)

$a_8=A^3+A+1=69$

$\therefore \dfrac{a_8}{a_1}=\dfrac{\cancel{69}\,23}{\frac{\cancel{3}}{4}}=92$

[답]②

[comment]

2020학년도 수능 나형 21번에서도 수열 문제가 출제된 적이 있었다. 2021학년도 수능 가형 21번 문제는 그에 비해 평이하게 출제되었고, a_2를 미지수로 잡아 이차방정식을 도출하는 것이 핵심이었다.

22. [계산] 30″ 확통 이항정리 계산

22. $\left(x+\frac{3}{x^2}\right)^5$ 의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오. [3점]

$$(x)^4 \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^1 \cdot {}_5C_1 = 15 \cdot x^2$$

[답] 15

[comment]

자주 나오는 유형이니 빠르게 계산하자.

23. [계산] 1′ 미적분 미분 계산

23. 함수 $f(x)=\frac{x^2-2x-6}{x-1}$ 에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오. [3점]

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1} - \frac{7}{x-1}$$
$$= x-1-\frac{7}{x-1} \quad (x \neq 1)$$
$$f'(x) = 1 + \frac{7}{(x-1)^2}$$
$$\therefore f'(0) = 1+7 = 8$$

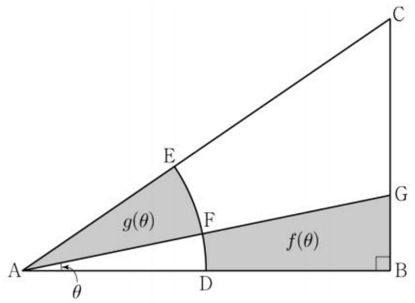
[답] 8

[comment]

단순한 미분 문제이다. 계산 실수를 주의하자.

24. [활용] 2′ 미적분 함수의 극한 도형

24. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자.
호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자.
$\angle BAG=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ 의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [3점]



F가 $\widehat{DE}$의 3등분점 중 D에 가까움 ⇒ $\angle EAF = 2\theta$

$f(\theta) = \triangle ABG - (\text{부채꼴 } ADF)$

$= \frac{1}{2}\times2\times2\tan\theta - \frac{1}{2}\times1\times1\times\theta = 2\underbrace{\tan\theta}_{\to\theta\ (\theta\to0+)} - \frac{1}{2}\theta$

$g(\theta) = \frac{1}{2}\times1\times1\times2\theta = \theta$

$\therefore 40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = 40\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta-\frac{1}{2}\theta}{\theta} = 40\times\frac{3}{2} = 60$

[답] 60

[comment]

함수의 극한 도형 문제이다. 3점으로 평이하게 출제되었다.

25. [계산] 1′30″

수학1 자연수의 거듭제곱의 합 (유형 21)

25. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 55$일 때, $\sum_{k=1}^{5} k(a_k - 3)$의 값을 구하시오. [3점]

$55 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_3$, $a_3 = 11$

$d = \frac{a_3 - a_1}{2} = \frac{11-3}{2} = 4$

$a_n = 4(n-1)+3$

$\sum_{k=1}^{5} k(a_k - 3) = \sum_{k=1}^{5} 4k(k-1) = 4\sum_{k=1}^{5} k^2 - 4\sum_{k=1}^{5} k$

$= 4 \cdot \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 11}{\cancel{6}} - 4 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2}$

$= 220 - 60 = 160$

[답] 160

[comment]

등차수열과 자연수의 거듭제곱의 합을 엮은 문제이다. 자연수의 거듭제곱의 합 공식은 반드시 기억해야 하고, 기억이 나지 않으면 당황하지 말고 직접 계산할 수도 있다.

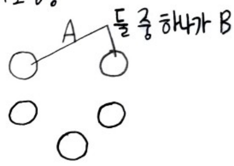
26. [계산] 1′30″ 확통 원순열

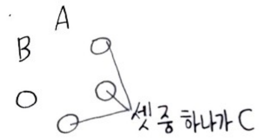
26. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) A와 B는 이웃한다. (나) B와 C는 이웃하지 않는다.

원순열 ⇒ 한 명을 고정한 후 계산

A 고정 후





나머지 3명 : 3!

$\therefore 2 \times 3 \times 3! = 36$

[답] 36

[comment]

4점이지만 무난한 원순열 문제이다. 원순열 문제는 한 사람을 고정시킨 후 순열로 푸는 것이 좋다.

27. [활용] 2′

수학 1 지수, 로그 개수 세기 (유형 10)

27. $\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$ 의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$

$= \log_4 2n^2 - \log_4 \sqrt{n}$

$= \frac{1+3\log_4 n}{2}$ ⇒ 40 이하의 자연수

$1+3\log_4 n$ ⇒ 80 이하의 짝수

n : 자연수 $n \ge 1 \rightarrow \log_4 n \ge 0$

$\log_4 n = 1, 3, 5, \cdots, 25$ 의 홀수 ⇒ 13개

[답] 13

[comment]

문제는 27 번 치고 어렵지 않다. 하지만 주관식이기 때문에, 개수를 잘못 세면 틀릴 수 있으니 조심하자. 문제에 나온 로그식이 40 이하의 자연수이며, n 이 자연수라는 2 개의 조건에 집중해서 풀면 된다.

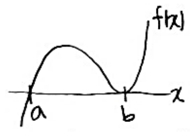
28. [킬러] 7′ 미적분 합성함수, 역함수 미분

28. 두 상수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)\,|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$



$g'(x)=3x^2+1>0$

$\therefore g(x)$, $g^{-1}(x)$ 증가함수

$a<b$, $f(x)=(x-a)(x-b)^2$

(가) $\underline{h(x)=0}$ 인 경우에만 $(x-1)|h(x)|$가 미분불가능일 수 있다.

⇒ $g^{-1}(x)=a$, $g^{-1}(x)=b$ 인 경우에 주목하자.

↳ $x=g(a)$ ↳ $x=g(b)$

i) $g^{-1}(x)=b$, $x=g(b)$ (← $f(x)$가 $x=b$에서 접하므로, $|h(x)|$가 미분가능할 것 같다.)

$h'(x)=f'(g^{-1}(x))\cdot(g^{-1})'(x)$

$h'(g(b))=f'(b)\cdot(g^{-1})'(g(b))=\underbrace{f'(b)}_{0}\cdot\frac{1}{\underbrace{g'(b)}_{\neq 0}}$

$\therefore h'(g(b))=0$ 이므로, $x=g(b)$에서 $|h(x)|$, $(x-1)|h(x)|$ 미분가능

ii) $g^{-1}(x)=a$, $x=g(a)$

$h'(g(a))=\frac{f'(a)\neq 0}{g'(a)\neq 0}$ $\therefore |h(x)|$는 $x=g(a)$에서 미분불가

$(x-1)|h(x)|$ 미분 → $\underbrace{|h(x)|}_{연속}+\underbrace{(x-1)}_{연속}\cdot\underbrace{\{|h(x)|\}'}_{불연속}$ ⇒ $x-1=0$이어야 연속이다.

if) $x=g(a)$

$\therefore g(a)=1 \rightarrow a^3+a+1=1$, $a=0$

(나) $h'(3)=2$

$h'(3)=f'(g^{-1}(3))\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(3))}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{f'(1)}{4}=2$ $\therefore f'(1)=8$

$g(1)=3$ 이므로 $g^{-1}(3)=1$

$g'(x)=3x^2+1$ $\therefore g'(1)=4$

$a=0 \rightarrow f(x)=x(x-b)^2$, $f'(x)=3x^2-4bx+b^2$

$f'(1)=b^2-4b+3=8$

$b^2-4b-5=0 \rightarrow b=\cancel{-1}, 5$ ($\because a<b$)

$\therefore f(x)=x(x-5)^2$, $f(8)=8\times 3^2=72$ [답] 72

[comment]

28 번으로 난이도 있게 출제되었다. 3 차함수의 식을 결정하는 과정에서 (가) 조건을 해석하는 것이 핵심이다.

29. [킬러] 6′ 확통 중복조합

29. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
> (나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이다.
> (다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

case 분류 기준 잡기

⇒ A의 검은색 모자 수를 기준으로!

4, 5, ~~6~~ ← (다)에 해당하는 학생은 검은색 모자 가짐.

(다)에 해당하는 학생을 B라고 가정하자. 그리고 마지막에 3을 곱하자.

i) A 검은색 모자 4개

① B 검은색 모자 1개

→ C 검은색 모자 1개라고 가정하자. ⇒ 마지막에 2 곱함

	A	B	C	D
검	4	1	1	0
흰	0~3 (a)	0 (b)	1~ (c)	1~ (d)

⇒ 흰색 모자 수

$c \geq 1 \rightarrow c' = c-1 \geq 0$, $d \geq 1 \rightarrow d' = d-1 \geq 0$

$a+c+d=6$, $a+c'+d'=4 \Rightarrow {}_3H_4 = {}_6C_2 = 15$

$a=4, c=1, d=1$ 제외

∴ i)① ⇒ $2 \times (15-1) = 28$ ← C 가정

② B 검은색 모자 2개

	A	B	C	D
검	4	2	0	0
흰	0~3	0~1	1~	1~

(1) $b=0 \rightarrow a+c+d=6 \rightarrow a+c'+d'=4$

$a=4, c=1, d=1$ 제외 ∴ ${}_3H_4 - 1 = {}_6C_2 - 1 = 14$

(2) $b=1 \rightarrow a+c+d=5 \rightarrow a+c'+d'=3$

∴ ${}_3H_3 = {}_5C_2 = 10$

∴ i)② ⇒ $14 + 10 = 24$

ii) A 검은색 모자 5개 → B 검은색 모자 1개

	A	B	C	D
검	5	1	0	0
흰	0~4	0	1~	1~

$a+c+d=6$, $a+c'+d'=4$

∴ ii) ⇒ ${}_3H_4 = {}_6C_2 = 15$

전체 경우의 수 $= (28+24+15) \times 3 = 201$

[답] 201

29번 [comment]

2021학년도 6평 29번, 2021학년도 9평 29번에서도 출제된 중복조합 유형이므로 익숙할 것이다. 하지만 이 문제는 케이스 분류가 복잡한 편이므로, 실수하지 않도록 주의해야 한다.

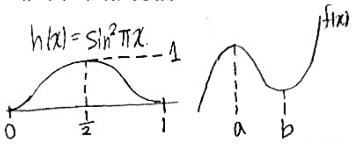
시험장에서 확통 29번은 반드시 검토하자!

30. [킬러] 8′ 미적분 합성함수 미분

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

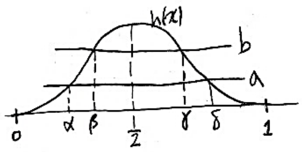
$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



∵최고차항 계수>0

(가) 극대, 극소가 반복됨, 극대가 3번이므로 극값은 5개 이상
연속함수에서

극값이 5개인 경우는 아래 뿐임 (극값이 6개 이상일 수는 X)



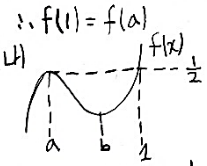
$0<a<b<1$

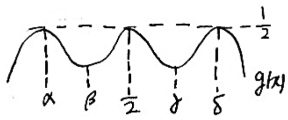
극대: $x=\alpha,\ x=\frac{1}{2},\ x=\delta$

⇒(가)에 의해 $f(h(\alpha))=f(h(\frac{1}{2}))=f(h(\delta))$

∴ $f(1)=f(a)$

(나)





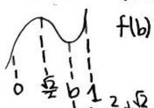
$f(x)=(x-a)^2(x-1)+\frac{1}{2}$ ⇒ g(x) 최댓값$=\frac{1}{2}$ 설명됨

g(x) 최솟값 ⇒ $g(0)$ or $g(\beta)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\ \ \|\quad\quad\ \ \|$

$\quad\quad\quad\quad\quad f(0)\quad\ f(b)$

i) $f(0)\le f(b)$ → $f(0)=0,\ \ -a^2+\frac{1}{2}=0,\ \ a=\frac{\sqrt{2}}{2}$



$f(b)>f(0)$ (o)

∴ $f(x)=(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2(x-1)+\frac{1}{2}$

$f(2)=(2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}$

$=5-2\sqrt{2}$ ∴ $a^2+b^2=29$

[답]29

30번 [comment]

2021학년도 평가원 가형 30번 문제들은 기존의 30번에 비해 난이도가 높지 않은 편이었다. 수능 가형 30번 또한 이런 기조를 이어 가서 합성함수에 대한 이해가 충분하다면 풀 만한 수준으로 출제되었다.

<풀이 보충>

1) 풀이에 이용한 개념: 연속함수에서 극대, 극소가 반복된다. (극대이면서 극소인 기울기가 0인 구간이 없을 경우)

-> 극대가 3번이려면 극값은 5개 이상

2) a와 b의 크기 범위 결정: g(x)가 극값을 가지려면 g(x)=f(h(x))의 속함수가 극값을 가지는 경우 1가지 (x=1/2), 겉함수가 극값을 가지는 경우 최대 4가지가 있다. 겉함수가 극값을 가지는 경우가 4가지려면 $0<a<b<1$이어야 한다는 점을 찾아내면 된다.

3) $f(0)<f(b)$라고 가정한 후 풀면 바로 답이 나온다. $f(0)>f(b)$이면 $f(1)=1/2$, $f(b)=0$일 때 $a<0$이므로 불가능하다.