[수능예보 1주차]

수학 영역

※ 최근 평가원. 특히 6월, 9월을 중심으로 짚어봐야 할 유형들을 모은 것입니다.
※ 대부분의 문항은 [/한성은 모의고사]에 수록되었던 문항입니다. 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
※ 1주차라고 써 놨지만 중요한 것은 거의 넣었어요. 2주차를 굳이 안 찾으셔도 됩니다당.
※ 제 예상은 거의 맞지 않습니다.

[나눠주기]

한 종류를 먼저 나눠준다든가,
개수로 분할한다든가 대충 각자 알아서.

6월, 9월이 그랬으니까 29번은 이쪽일 것 같은 삘.
아니면 난이도 있는 확률문제 정도 아닐까 싶은데..
[2021학년도 6월 29번], [2021학년도 9월 29번] 참고.

1. 같은 종류의 빵 10개를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주려고 한다. A보다 많은 개수의 빵을 받은 학생이 없도록 나누어 주는 방법의 수를 구하여라.1) (단, 빵은 찢어지지 않고, 빵을 1개도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

2. 같은 종류의 연필 4자루와 같은 종류의 볼펜 6자루를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 모든 학생이 연필과 볼펜을 합하여 2자루 이상 4자루 이하를 받도록 하는 경우의 수를 구하여라.2) [4점]

3. 검은색 볼펜 3자루, 파란색 볼펜 1자루, 빨간색 볼펜 1자루, 노란색 볼펜 1자루가 있다. 이 6자루의 볼펜을 4명의 회사원에게 남김없이 나누어줄 때 각 회사원이 적어도 1개의 볼펜을 받는 경우의 수를 구하여라.[3)](단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

4. 서로 다른 사탕 5개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 서로 구별할 수 없는 3개의 상자에 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하여라.[4)] [4점]

(가) 각 상자에 들어가는 사탕의 개수는 3 이하이다. (나) 각 상자에 들어가는 사탕의 개수와 초콜릿의 개수의 합은 2 이상이다.

5. 흰 공 8개와 파란 공 2개가 있다. 이 10개의 공을 5명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 공을 1개만 받는 학생이 2명이 되도록 나누어주는 경우의 수를 구하여라.[5] (단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않고, 모든 학생은 1개 이상의 공을 받는다.) [4점]

6. 빨간색, 파란색, 노란색 공 각각 1개씩과 흰 공 7개가 있다. 이 10개의 공을 세 개의 상자 A, B, C에 남김 없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 하는 경우의 수를 구하여라.[6] (단, 흰 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

[경우의 수/확률]

6월에 경우의 수/확률 문항이 어렵다고 난리쳤는데,
9월에는 딱히 이슈가 되는 문항이 없었다.
어쨌든 기벡 대신이라고 29번이 아닌 자리에도
약간 힘 준 문항이 출제되는 것이 가능하지 않을까?

[독립]이면서 [또는(이거나)] 확률을 물어본 문항이
6월, 9월에 모두 출제되었다는 것도 눈여겨 볼 점.

경우의 수/확률 문항에 난이도를 주면 유치해 보인다.
대부분 노가다 뛰는 것이 가능하기 때문. 어쩔 수 없지.
[2021학년도 6월 17번], [2021학년도 6월 19번] 참고.
[2021학년도 9월 17번], [2021학년도 9월 19번] 참고.

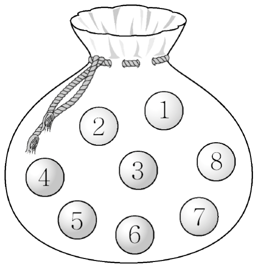
7. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 1이 적혀 있는 카드와 2가 적혀 있는 카드가 이웃하거나 2가 적혀 있는 카드와 3이 적혀 있는 카드가 이웃할 확률은?[7] [4점]

① $\frac{8}{15}$　② $\frac{17}{30}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{19}{30}$　⑤ $\frac{2}{3}$

8. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 임의로 일렬로 나열할 때, 짝수가 적혀 있는 카드는 작은 수부터 크기 순서로 왼쪽부터 나열되거나 어느 두 장도 이웃하지 않을 확률은?[8] [4점]

① $\frac{5}{14}$　② $\frac{17}{42}$　③ $\frac{19}{42}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{23}{42}$

9. 주머니에 숫자 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 공 8개가 들어 있다. A가 이 주머니에서 2개의 공을 임의로 꺼내고, B가 남아 있는 6개의 공 중에서 2개의 공을 임의로 꺼낸다. 이 시행에서 A가 꺼낸 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 4의 배수일 때, B가 꺼낸 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 짝수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.9) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



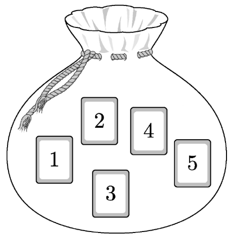
10. 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라.10) [4점]

(가) $x+y+z=19$ (나) x, y, z는 어떤 삼각형의 세 변의 길이이다.

11. 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 A에서 A로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.[11] (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $|f(1)-f(2)| \leq 1$
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

12. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 a_1, 큰 수를 a_2라 하고, 두 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 b_1, 큰 수를 b_2라 할 때, $a_1+a_2=b_1+b_2$를 만족시킬 확률은?[12] [4점]



① $\frac{2}{25}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{25}$
④ $\frac{7}{50}$ ⑤ $\frac{4}{25}$

13. 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 8개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는 시행을 세 번 반복할 때 꺼낸 공에 적힌 수를 차례로 a, b, c라 하자. $a+b+c>4$일 때, $(a-2)(b-2)(c-2)=0$일 확률은?[13] [4점]

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$
④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

14. 주머니에 1, 1, 2, 2, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀있는 수를 a, b, c라 할 때, $a \le b \le c$일 확률은?[14] [4점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

15. 집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 부분집합 31개 중에서 임의로 서로 다른 두 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고 나열된 순서대로 A, B라 할 때, A, B가 다음 조건을 만족시킬 확률은?15) [4점]

$n(A\cap B)=2$이고 $A\cup B=U$이다.

① $\frac{2}{31}$ ② $\frac{7}{93}$ ③ $\frac{8}{93}$
④ $\frac{3}{31}$ ⑤ $\frac{10}{93}$

16. 부등식 $1\le x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le 6$을 만족시키는 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍이

$x_1<x_2$ 또는 $x_3<x_4$

를 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.16) [4점]

[점화식의 적용]

점화식을 따라서 갈림길이 생기는데 잘 고르라든가 하는 문항.
개인적으로 21번 삘. [2021학년도 9월(나형) 21번] 참고.
[2021학년도 9월(가형) 21번]은 신경 ㄲ자. 반복되기는
힘들 것 같아서. 근데 내기 이렇게 말하면 나오던데.

21번은 일단 수1이라고 치고.. (미적분 가능할까?)
등차수열이나 삼각형도 적당한 문항을 뽑을 수 있긴 하겠지.
그래도 21번 예상으로 하나 골라보라고 하면 얘로.

17. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+1$$

이 성립한다. $a_1=a_7=1$일 때, $\sum_{k=1}^{7}a_k$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.17) [4점]

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우})\\[2mm] \dfrac{a_n+(-1)^n}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_6=2$일 때, a_1의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.18) [4점]

19. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우})\\ \dfrac{a_n+1}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. 5 이하의 자연수 n에 대하여 $a_n a_{n+1}$이 짝수일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 최솟값은?[19) [4점]

① 40 ② 43 ③ 46
④ 49 ⑤ 52

20. 수열 $\{a_n\}$은 상수 a와 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+a & (a_n\le n)\\ a_n-n & (a_n>n)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4=6$, $a_8=8$이 되도록 하는 실수 a, a_2의 모든 순서쌍 $(a,\ a_2)$의 개수는?[20) [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 = 1$이고 $a_9 \le 100$이다.
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $a_{n+1}^2 - 3a_n a_{n+1} + 2a_n^2 = 0$
> 이다.
> (다) $2 \le i \le 8$이고 $a_i^2 \ne a_{i-1}a_{i+1}$인
> 자연수 i의 개수는 2이다.

$\sum_{n=1}^{9} a_n$의 최댓값을 구하여라.[21] [4점]

22. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n} = n$이다.
> (나) 2 이상의 자연수 n에 대하여
> $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n-1} a_k$이다.

$\sum_{k=1}^{64} a_k = 256$일 때, a_1의 값은?[22] [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

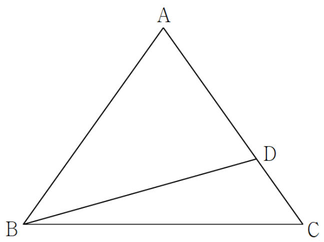
[삼각형 분석]

올해 가장 신경쓰이게 하는 문항.
기존과 접근 방법이 완전히 달라야 하겠다.

[직각삼각형을 찾아라]라는 가형의 도형과 극한 풀이양식과 [원/부채꼴에서 직각삼각형 찾아서 피타고라스]라는 나형의 등비급수와 도형의 풀이양식을 박살내는 문항이 6월, 9월에 출제되었다. [2021학년도 6월 20번], [2021학년도 9월 28번].

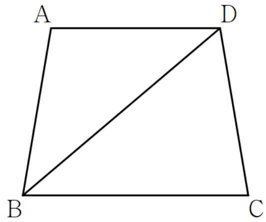
방멱은 6월에 출제되었지만 설마 반복할까 싶긴 함.
사인법칙, 코사인법칙을 활용하는 연습이 중요.
특히 사인법칙은 [직각삼각형을 찾아라]로 다루기 힘든 경우가 많다. 의미 체크 필수. 각을 모두 알면, 한 변의 길이를 다른 변의 길이로 옮길 수 있다.

23. $\overline{AB}=\overline{AC}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB}=\overline{BD}$가 되도록 잡는다. $\overline{AD}=4$일 때, 선분 BC의 길이는?[23] [3점]

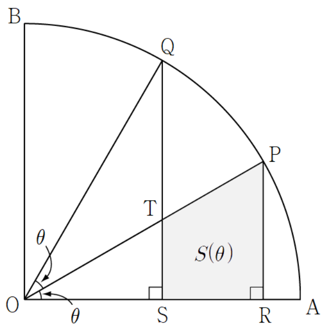


① $4\sqrt{2}$　② 6　③ $2\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{11}$　⑤ $4\sqrt{3}$

24. 두 변 AD와 BC가 서로 평행한 사다리꼴 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AD}=6$이고 $\overline{BD}=2\sqrt{21}$일 때, 선분 BC의 길이를 구하여라.[24] [3점]



25. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. $\angle POA = \angle POQ = \theta$인 호 AB 위의 두 점 P, Q에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 각각 R, S, 두 직선 OP, QS의 교점을 T, 사각형 SRPT의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = a$일 때, $60a$의 값을 구하여라.25) (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

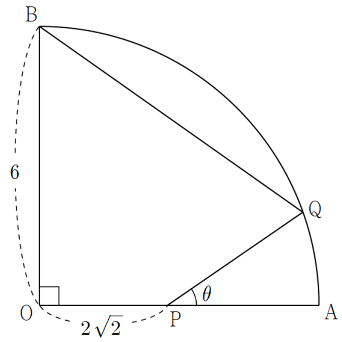


26. 그림과 같이 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA 위의 점 P와 호 AB 위의 점 Q는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{OP} = 2\sqrt{2}$

(나) $\angle QPA = \theta$라 할 때 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\overline{BQ}$의 값은?26) [4점]



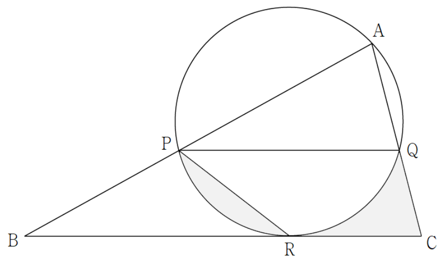
① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ 8 ⑤ $4\sqrt{5}$

27. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=2$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{4}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 P, 선분 AC 위의 점 Q에 대하여 직선 PQ는 직선 BC와 평행하며 세 점 A, P, Q를 지나는 원이 직선 BC와 점 R에서 접한다. 두 선분 CQ, CR과 호 QR로 둘러싸인 부분과 선분 PR과 호 PR로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

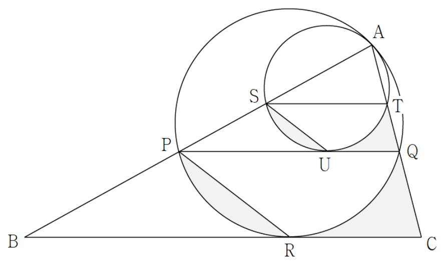
그림 R_1에서 선분 AP 위의 점 S, 선분 AQ 위의 점 T에 대하여 직선 ST는 직선 PQ와 평행하며 세 점 A, S, T를 지나는 원이 직선 PQ와 점 U에서 접한다. 두 선분 QT, QU와 호 TU로 둘러싸인 부분과 선분 SU와 호 SU로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[27)]

[4점]



R_1

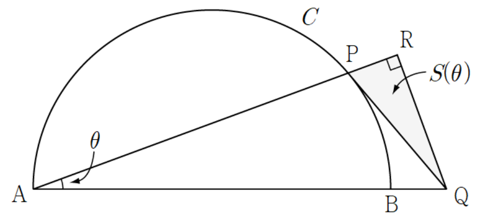


R_2

① $\frac{\sqrt{15}}{14}$　② $\frac{\sqrt{15}}{7}$　③ $\frac{3\sqrt{15}}{14}$
④ $\frac{2\sqrt{15}}{7}$　⑤ $\frac{5\sqrt{15}}{14}$

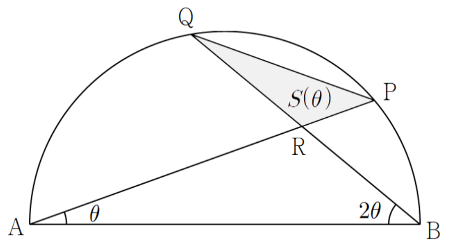
28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 C와 반원의 호 위의 점 P가 있다. 반원 C 위의 점 P에서의 접선과 선분 AB의 연장선이 만나는 점을 Q, 점 Q에서 선분 AP의 연장선 위에 내린 수선의 발을 R이라 하고, $\angle PAB=\theta$라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?[28)] $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

[4점]



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ 2　⑤ 4

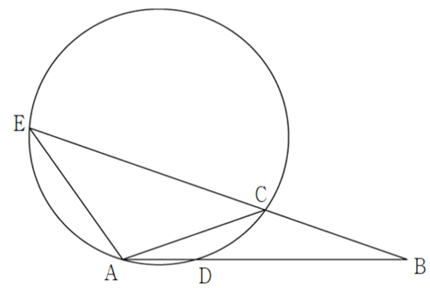
29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 두 점 P, Q는 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$, $\angle \mathrm{QBA} = 2\theta$를 만족시킨다. 두 선분 AP, BQ의 교점을 R, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{q}{p}$일 때, $p^2 + q^2$의 값을 구하여라.[29] (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 그림과 같이

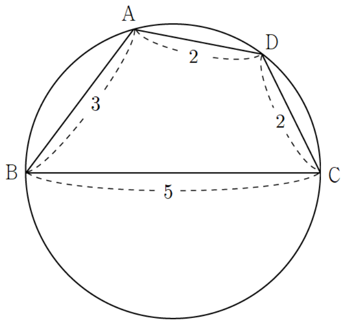
$$\overline{\mathrm{AB}} = 4\sqrt{2}, \quad \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CA}} = 3$$

인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 1 : 3 내분점을 D, 세 점 A, C, D를 지나는 원이 선분 BC의 연장선과 만나는 점을 E라 할 때, $\sin(\angle \mathrm{EAC})$의 값은?[30] [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{9}$　② $\frac{2\sqrt{3}}{9}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$　⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

31. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CD}=2$, $\overline{DA}=2$인 사각형 ABCD가 원에 내접할 때, $\cos(\angle BCD)$의 값은?31) [4점]

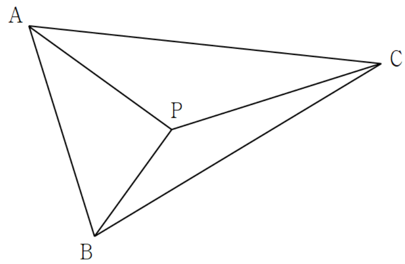


① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{6}$

32. $\overline{AB}=5$인 삼각형 ABC의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

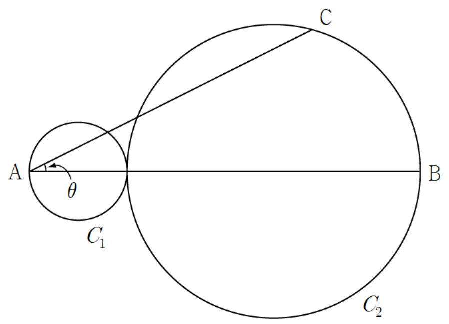
(가) $\overline{PA}=4$, $\overline{PB}=3$, $\overline{PC}=5$이다.
(나) 두 삼각형 ACP, BCP의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면 $9S_1=16S_2$이다.

$\overline{AC}^2$의 값을 구하여라.32) [4점]



33. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1, 3인 두 원 C_1, C_2가 서로 외접하고 있다. 원 C_1 위의 점 A, 원 C_2 위의 점 B는 $\overline{\mathrm{AB}}=8$를 만족시키고, 원 C_2 위의 점 C에 대하여 $\angle \mathrm{CAB}=\theta$일 때, $\tan\theta=\frac{1}{2}$이다. $\overline{\mathrm{CA}}$의 길이는?[33)]

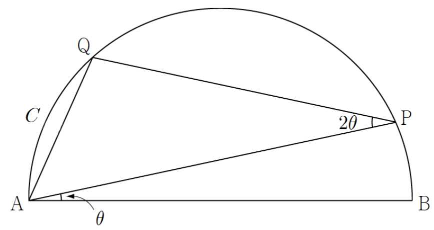
(단, $\overline{\mathrm{CA}}>4$이다.) [4점]



① 5 ② 6 ③ 7
④ $2\sqrt{5}+1$ ⑤ $2\sqrt{5}+2$

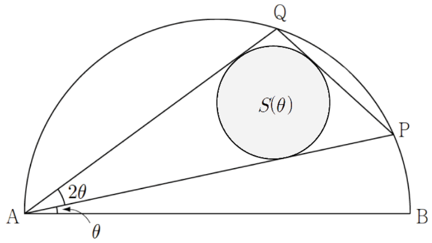
34. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 O가 있다. 반원의 호 위의 두 점 P, Q는 $2\angle \mathrm{PAB}=\angle \mathrm{QPA}$를 만족시킨다. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=f(\theta)$, $\overline{\mathrm{AQ}}=g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{2-f(\theta)}{\{g(\theta)\}^2}$의 값은?[34)]

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [3점]



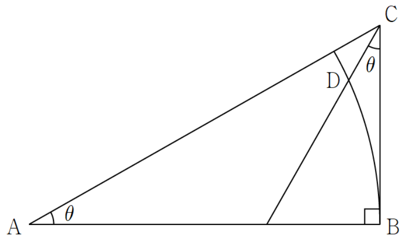
① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{9}{16}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

35. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 O가 있다. 반원의 호 위의 두 점 P, Q는 $2\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{QAP}$를 만족시킨다. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 삼각형 APQ의 내접원의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은?[35] (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π
④ 2π ⑤ 4π

36. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=1$, $\angle\mathrm{A}=\theta$, $\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 점 A를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원 위의 점 D는 $\angle\mathrm{BCD}=\theta$를 만족시킨다. 선분 CD의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}$의 값은?[36] (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이고 점 D는 삼각형 ABC 내부의 점이다.) [4점]



① 1 ② $2-\sqrt{3}$ ③ 2
④ $2+\sqrt{3}$ ⑤ 4

[정적분의 연산]

미적분은 다들 잘 하니까 아무거나.

하나 강조한다면 [역함수를 이용한 치환적분]이다.
[2020학년도 6월 30번]과 [2022 예비시행 미적분 27번]
항상 치환 잘 못 잡아내는 학생이 나온다. 반드시 확인.

[항등식의 양 변 적분]은 다시 나오면 좀 이상할 것 같지만,
그래도 바로 작년 최고 이슈였는데, 확인 해두시고.

37. 다항함수 $p(x)$가

$$\int_0^\pi (p(x)+p''(x))\cos x dx = -5$$

를 만족시킨다. $p'(0)=2$일 때, $p'(\pi)$의 값은?[37)] [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

38. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $\int_2^x \frac{t}{f(t)}dt$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $\int_0^2 f(g(x))dx = 6$일 때, $g(2)$의 값은?[38)] (단, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.) [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

39. 실수 전체의 집합에서 연속인 도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1,\ f(2)=4$
(나) $\int_{0}^{\ln 2} f'(e^x)dx=4$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(\frac{1}{x}\right)dx$의 값은?39) [4점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

40. 함수 $f(x)=\sqrt{x^2+2}$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\int_{0}^{x}(x-t)f'(t)dt$$

이다. $\int_{0}^{4} xg'(x)dx$의 값은?40) [4점]

① $8\sqrt{2}$ ② $\frac{26\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{28\sqrt{2}}{3}$ ④ $10\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{32\sqrt{2}}{3}$

41. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\int_{1}^{x} f(t)dt$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\int_{0}^{1} f(e^{x})dx=4, \quad \int_{1}^{e} \frac{g(x)}{x^2}dx=2$$

를 만족시킬 때, $g(e)$의 값은?41) [4점]

① e ② $2e$ ③ $3e$
④ $4e$ ⑤ $5e$

42. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g'(x)=\int_{0}^{1} x^3\sqrt{t}\sin(x\sqrt{t})dt$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극대인 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $k\pi < a_6 < (k+1)\pi$인 자연수 k의 값은?42) [4점]

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

43. $x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)=xe^x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_0^e xg'(x)g(x)dx$의 값은?[43] [4점]

① $e-2$ ② $e-1$ ③ e
④ $2e-2$ ⑤ $2e-1$

44. $x > \frac{1}{e}$에서 정의된 함수 $f(x)=x\ln x+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_1^{e+1} \ln g(x)dx$의 값은?[44] [4점]

① $e-2$ ② $e-1$ ③ e
④ $e+1$ ⑤ $e+2$

45. 실수 전체의 집합에서 연속인 도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt+1$$

이다. $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)f'(x)+\{f(x)\}^2=\frac{1}{2}\cos x$$

를 만족시킬 때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은?45) [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

46. 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
(나) $\int \frac{f''(x)}{f(x)}=\frac{2x}{1+x^2}+\int \left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}^2 dx$

$f(0)=1$, $f'(0)=2$일 때, $f(1)$의 값은?46) [4점]

① 1 ② e ③ $2e$
④ e^2 ⑤ $2e^2$

1) 81

네 학생이 받는 빵의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면 $a+b+c+d=10$이다.

Case1) a가 5 이상인 경우의 수 : $(a-5)+b+c+d=5$에서 ${}_4\mathrm{H}_5=56$이다.

Case2) $a=4$인 경우의 수 : b, c, d가 취할 수 있는 값이

[4, 2, 0], [4, 1, 1], [3, 3, 0], [3, 2, 1], [2, 2, 2]이고 각각 6, 3, 3, 6, 1로 모두 19이다.

Case3) $a=3$인 경우 : b, c, d가 취할 수 있는 값이 [3, 3, 1], [3, 2, 2]이고 각각 3, 3으로 모두 6이다.

2) 75

풀이1) 연필을 나눠주는 묶음의 수로 분할하면

Case1) 4/0/0인 경우 $3\times3=9$가지 Case2) 3/1/0인 경우 $(3\times2)\times5=30$가지

Case3) 2/2/0인 경우 $3\times6=18$가지 Case4) 2/1/1인 경우 $3\times6=18$가지

풀이2) 모두 나눠주는 묶음의 수로 분할하면 연필을 나눠주는 경우로 다시 찢는 노가다를 쳐줘야 한다.

Case1) 4/4/2인 경우 36가지 Case2) 4/3/3인 경우 39가지

3) 388

검은색이 아닌 색 볼펜을 몇 명에게 나눠주는지로 분류하자.

Case1) 모든 색 볼펜을 한 명에게 줄 때 : 회사원 선택 4가지, 검은색 나눠주는 방법 $1(={}_4\mathrm{H}_0)$가지.

Case2) 색 볼펜을 두 명에게 줄 때 : 색 볼펜 분할 3가지, 회사원 선택 4×3가지, 검은색 나눠주는 방법 $4(={}_4\mathrm{H}_1)$가지.

Case2) 색 볼펜을 세 명에게 줄 때 : 회사원 선택 $4\times3\times2$가지, 검은색 나눠주는 방법 $10(={}_4\mathrm{H}_2)$가지.

4) 425

사탕을 나누어 넣는 개수로 분할하면

Case1) 3/2/0 $\Rightarrow$ ${}_5\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{H}_3$

Case2) 3/1/1 $\Rightarrow$ ${}_5\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{2!}\times{}_3\mathrm{H}_3$

Case3) 2/2/1 $\Rightarrow$ ${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2\times\dfrac{1}{2!}\times{}_3\mathrm{H}_4$

※ 서로 구별할 수 없는 상자이므로 사탕을 넣을 때는 분배가 아니라 분할만 하면 되고,

사탕을 넣고 나면 서로 구별 가능한 상자가 된다.

5) 780

1개의 공을 받는 두 명이 받는 공의 종류에 따라 분류하자.

Case1) 둘 모두 파란 공을 받을 때 : ${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{H}_2=60$가지.

Case2) 하나는 파란 공 하나는 흰 공을 받을 때 : $({}_5\mathrm{C}_2\times2)\times(3\times{}_3\mathrm{H}_2)=360$가지.

Case3) 둘 모두 흰 공을 받을 때 : ${}_5\mathrm{C}_2\times(6\times{}_3\mathrm{H}_2)=360$

6) 390

빨파노를 몇 개씩 묶는지에 따라 분류하자.

Case1) 3/0/0인 경우 : $3\times{}_3\mathrm{H}_3=30$

Case2) 2/1/0인 경우 : ${}_3\mathrm{C}_2\times3!\times{}_3\mathrm{H}_4=270$

Case3) 1/1/1인 경우 : $3!\times{}_3\mathrm{H}_4=90$

7) ③

8) ②

9) 12

$\mathrm{P}(\mathrm{A}$가 4의 배수$)=\dfrac{1}{2}$이고, $\mathrm{P}(\mathrm{A}$가 4의 배수$\cap\mathrm{B}$가 홀수$)=\dfrac{1}{7}$이다. 여사건을 이용하여 구하는 확률은

$$1-\mathrm{P}(\mathrm{B}\text{가 홀수}|\mathrm{A}\text{가 4의 배수})=1-\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\text{가 4의 배수}\cap\mathrm{B}\text{가 홀수})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\text{가 4의 배수})}=\frac{5}{7}$$

이다.

10) 45

세 자연수 x, y, z 중 어느 하나가 다른 두 수의 합보다 작아야 한다.

$\Rightarrow$ 가장 큰 자연수가 9 이하이다.

전체 경우의 수 ${}_3\mathrm{H}_{16}$에서 어느 하나가 10 이상인 경우의 수 ${}_3\mathrm{H}_7\times3$을 빼면 된당.

11) 85

전체 경우의 수는 $4^4=256$, 사건의 경우의 수는 아래와 같이 84이다.

Case1) $f(1)=f(2)$일 때 24가지

치역 선택 ${}_4\mathrm{C}_3$에 $f(1)=f(2)$, $f(3)$, $f(4)$를 대응시켜 줘야 한다.

Case2) $f(1)\neq f(2)$일 때 60가지

$\{f(1),\ f(2)\}$ 선택 3가지, 대응 2가지.

$f(1)$, $f(2)$가 아닌 치역의 원소 선택 2가지, $f(3)$, $f(4)$ 선택 3^2-2^2가지.

12) ⑤

$a_1+a_2=b_1+b_2$의 값이 3, 4, 8, 9일 확률은 각각 $\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}$이고,

$a_1+a_2=b_1+b_2$의 값이 5, 6, 7일 확률은 각각 $\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}$이다.

13) ②

$a+b+c>4$일 확률은 여사건을 이용, (전체)$-$([1, 1, 1])$-$([1, 1, 2])에서,

$$\frac{8\times7\times6-4\times3\times2-3\times(4\times3\times2)}{8\times7\times6}$$

$a+b+c>4$이면서 $(a-2)(b-2)(c-2)=0$일 확률은 ([1, 2, 2])$+$([2, 2, 3])$+$([1, 2, 3])$+$([2, 3, 3])에서,

$$\frac{3\times(4\times2\times1)+3\times(2\times1\times2)+6\times(4\times2\times2)+3\times(2\times2\times1)}{8\times7\times6}$$

14) ④

모두 다른 공으로 봐야 한다. 전체 경우의 수는 $6\times5\times4$이다.

사건의 경우의 수는 $a<b<c$인 경우의 수가 $2^3=8$이고

a, b, c 중 어느 두 수가 같은 경우의 수가 ${}_3\mathrm{C}_2\times2\times2^2=32$이다.

15) ③

전체 경우의 수는 31×30이고, 사건의 경우의 수는 80이다.

벤 다이어그램에서 $A\cap B$ 영역에 오는 원소를 선택하는 경우의 수 ${}_5\mathrm{C}_2$와,

나머지 원소를 $A-B$ 영역 또는 $B-A$ 영역에 넣는 경우의 수 2^3의 곱이다.

16) 11

$1\le x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le6$을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는 ${}_6\mathrm{H}_4$이다.

$1\le x_1<x_2\le x_3\le x_4\le6$을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는 ${}_5\mathrm{H}_4$이다.

$\Rightarrow$ $1\le x_1\le(x_2-1)\le(x_3-1)\le(x_4-1)\le5$로 보고 구하면 개꿀.

$1\le x_1\le x_2\le x_3<x_4\le6$을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는 ${}_5\mathrm{H}_4$이다.

$1\le x_1<x_2\le x_3<x_4\le6$을 만족시키는 모든 순서쌍의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_4$이다.

구하는 값은 $\frac{{}_5\mathrm{H}_4+{}_5\mathrm{H}_4-{}_4\mathrm{H}_4}{{}_6\mathrm{H}_4}=\frac{5}{6}$이다.

17) 26

18) 139

a_5는 4 또는 5이다.

a_4는 7 또는 8 또는 9 또는 10이다.

a_3은 14 또는 15 또는 16 또는 17 또는 18 또는 19 또는 20 또는 21이다.

a_2는 27 또는 28 또는 29 또는 $\cdots$, 42이다.

a_1은 54 또는 55 또는 56 또는, $\cdots$, 85이다.

19) ④

아무 자연수나 a_n에 넣고 뒤로 진행시켜봐. 나중에는 1, 1, 1, 1, $\cdots$ 이 나온다.

그 바로 전 항은 2이다. 그 전 항은 3 또는 4, $\cdots$ 이런 식이라는 것을 눈치 까야 한다.

$\sum_{k=1}^{10}a_k$가 최소가 되려면 그냥 $a_1=1$, 1, 1, $\cdots$, $a_{10}=1$이면 좋겠는데

'5 이하의 자연수 n에 대하여 a_na_{n+1}이 짝수'

조건이 그것을 허락하지 않는군. $a_5=2$로 두는 것이 최소각이다.

이제 a_4는 3 또는 4인데 최소로 가려면 $a_4=3$이고, a_3은 5 또는 6인데 a_3a_4가 짝수로 가야 하므로 $a_3=6$이고, $\cdots$

뭐 이런 식으로. $a_2=11$, $a_1=22$일 때가 최소이다. 다른 길로 가보려니까.. 그냥 망한다.

20) ④

$a_5=2$, $a_6=a+2$이고, a_7은 $2a+2$ 또는 $a-4$,

a_8은 $3a+2$ 또는 $2a-5$ 또는 $2a-4$ 또는 $a-11$이다.

$a_8=8$에서 a의 값은 2, 6, 19가 가능하다.

6.5는 점화식을 선택하는 범위를 만족시키지 않는다.

a_3은 9 또는 $6-a$이고 a_2는 11 또는 $9-a$ 또는 $8-a$, $6-2a$이다. 이 중

점화식을 선택하는 범위를 만족시키는 순서쌍 (a, a_2)는

(2, 11), (6, 11), (6, -6), (19, 11), (19, -10), (19, -32)

가 가능하다.

21) 192

$1-1-2-4-8-16-32-64-64$일 때 192다.

$1-2-4-8-16-32-32-32-64$는 191이 뜬다.

22) ④

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하자. $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=n+1}^{2n-1}a_k$의 양 변에 $\sum_{k=1}^{n}a_k$를 더하면 $2S_n=S_{2n-1}$이다.

$$\begin{aligned} S_{64} &= a_{64} + S_{63} = a_{64} + 2S_{32} \\ &= a_{64} + (2a_{32} + 2S_{31}) = a_{64} + 2a_{32} + 4S_{16} \\ &= a_{64} + 2a_{32} + (4a_{16} + 4S_{15}) = a_{64} + 2a_{32} + 4a_{16} + 8S_8 \\ &= a_{64} + 2a_{32} + 4a_{16} + (8a_8 + 8S_7) = a_{64} + 2a_{32} + 4a_{16} + 8a_8 + 16S_4 \\ &= a_{64} + 2a_{32} + 4a_{16} + 8a_8 + (16a_4 + 16S_3) = a_{64} + 2a_{32} + 4a_{16} + 8a_8 + 16a_4 + 32S_2 \\ &= a_{64} + 2a_{32} + 4a_{16} + 8a_8 + 16a_4 + 32a_2 + 32a_1 \end{aligned}$$

23) ⑤

24) 8

$\angle ABD = \theta$라 하자. $\angle ADB = \angle DBC = \theta$이다. 이등변삼각형 ABD에서 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{6}$이다.

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH} = \overline{BD} \times \cos\theta = 7$이다.

대충 대칭성에 의해 $\overline{CH} = 1$, $\overline{BC} = 8$이다.

25) 90

$\overline{OS} = \cos 2\theta$이므로 $\overline{TS} = \cos 2\theta \times \tan\theta$이다. $\overline{PR} = \sin\theta$이고 $\overline{RS} = \cos\theta - \cos 2\theta$이므로

사다리꼴 SRPT의 넓이는 $\dfrac{\sin\theta + \cos 2\theta \tan\theta}{2}(\cos\theta - \cos 2\theta)$이다.

$\dfrac{\sin\theta + \cos 2\theta \tan\theta}{2}$는 대충 $\dfrac{\theta + \theta}{2} = \theta$이고 $\cos\theta - \cos 2\theta = (1 - \cos 2\theta) - (1 - \cos\theta)$는 대충 $\dfrac{1}{2}(2\theta)^2 - \dfrac{1}{2}\theta^2 = \dfrac{3}{2}\theta^2$이다.

26) ③

$\overline{PQ} = x$라 할 때, 삼각형 OPQ에서 코사인 돌리면

$$6^2 = (2\sqrt{2})^2 + x^2 - 4\sqrt{2}x \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \Leftrightarrow (\sqrt{3}x - 6)(\sqrt{3}x + 14) = 0$$

이므로 $x = 2\sqrt{3}$이다. 사인 돌리면 $\sin(\angle POQ) = \dfrac{1}{3}$이다.

$\angle BOQ = \dfrac{\pi}{2} - \angle POQ$이므로 $\cos(\angle BOQ) = \dfrac{1}{3}$이다. 삼각형 BOQ에서 코사인.

27) ③

삼각형 ABC에서 코사인 돌리면 $\overline{BC} = 4$이다.

$\overline{BP} = 4t$, $\overline{CQ} = 2t$라 두자. 방멱 돌리면 $\overline{BR} = 4\sqrt{t}$, $\overline{CR} = 2\sqrt{t}$이므로 $t = \dfrac{4}{9}$이다.

$\overline{BR} : \overline{CR} = 2:1$이므로 AR은 각 BAC의 이등분선이다. $\overline{PR} = \overline{QR}$이고 R_1의 색칠한 도형의 넓이는 $\dfrac{4\sqrt{15}}{27}$이다.

닮음비는 $1:(1-t)$이므로 $9:5$, 넓이비는 $81:25$, 공비는 $\dfrac{25}{81}$이다.

28) ④

$\overline{AQ} = 1 + \dfrac{1}{\cos 2\theta}$, $\overline{PR} = \overline{AR} - \overline{AP} = \left(1 + \dfrac{1}{\cos 2\theta}\right) \times \cos\theta - 2\cos\theta$, $\overline{QR} = \left(1 + \dfrac{1}{\cos 2\theta}\right) \times \sin\theta$이므로

$S(\theta) = \dfrac{\cos\theta(\cos 2\theta + 1)}{2\cos^2 2\theta} \times \sin\theta(1 - \cos 2\theta)$이다.

29) 25

삼각형 ABR에서 사인법칙 쓰고 싶은 각이다. $\overline{PR} = \overline{AP} - \overline{AR} = 2\cos\theta - \dfrac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$이다.

$S(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \left(2\cos\theta - \dfrac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta}\right) \times \left(2\cos 2\theta - \dfrac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}\right) \times \sin 3\theta$이고 $\dfrac{q}{p} = \dfrac{4}{3}$이다.

30) ⑤

방멱 $\overline{BD} \times \overline{BA} = \overline{BC} \times \overline{BE}$ 때리면 $\overline{EC} = 5$이다.

삼각형 ACE에서 사인법칙을 돌리자. $\sin(\angle AEC) = \sin(\angle CDB) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

참고) 삼각형 ABE에서 $\overline{AE}$를 구하고 삼각형 ACE에서 코사인 돌려도 가능.

31) ③

$\angle BCD = \theta$라 하면 $\angle BAC = \pi - \theta$이다.

선분 BD를 긋고 두 삼각형에서 코사인법칙을 때리면

$$5^2 + 2^2 - 20\cos\theta = 3^2 + 2^2 - 12\cos(\pi - \theta)$$

이다.

32) 65

$\angle APC = \theta$라 하면 $S_1 = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin\theta = 10\sin\theta$, $S_2 = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin\left(\dfrac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\dfrac{15}{2}\cos\theta$이다.

$9S_1 = 16S_2$에서 $-4\cos\theta = 3\sin\theta$이므로 $\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$, $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$이다. 삼각형 ACP에서 코사인 쳐라.

33) ⑤

$\overline{CA}=x$, 원 C_2의 중심을 O라 하자. $\overline{AO}=5$, $\overline{OC}=3$, $\cos(\angle CAO)=\frac{2}{\sqrt{5}}$이므로 코사인법칙에서

$$3^2=x^2+5^2-2\cdot x\cdot 5\cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

이다. 풀면 $x=2\sqrt{5}\pm 2$이다. 이 중 짧은 것은 $\overline{CA}>4$에 모순, $2\sqrt{5}+2$가 답이다.

※ 원의 중심 O에서 현 AC에 수선을 내려서 푼 애들도 잘했어요.

34) ③

$\angle PAQ=\frac{\pi}{2}-3\theta$, $\angle AQP=\frac{\pi}{2}+\theta$인 것을 봤으면 어떻게든 풀었겠지. 원에 내접하는 사각형 ABPQ를 봐도 좋고, $\angle APQ$의 중심각 $\angle AOQ=4\theta$로 가도 좋고. $f(\theta)=2\cos 3\theta$이고, $g(\theta)=2\sin 2\theta$이다.

35) ⑤

$\overline{AP}=2\cos\theta$, $\overline{AQ}=2\cos 3\theta$, $\overline{PQ}=2\sin 2\theta$이다. $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ 하세영.

36) ②

풀이1) $\overline{AC}=1$, $\overline{AD}=\cos\theta$, $\angle ACD=\frac{\pi}{2}-2\theta$이다. 코사인 돌리자.

풀이2) $\overline{CD}=a$라 하자. 점 D에서 두 선분 AB, BC에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면 $\overline{AP}=\cos\theta-a\sin\theta$, $\overline{DP}=\sin\theta-a\cos\theta$이다 삼각형 APD에서 피타고라스를 치자.

37) ③

38) ②

$h(x)=\int_2^x \frac{t}{f(t)}dt$라 하자. $h(2)=0$이므로 $g(0)=2$이다.

$\int_2^{g(x)} \frac{t}{f(t)}dt=x$의 양 변을 미분하면 $\frac{g(x)}{f(g(x))}g'(x)=1$에서 $f(g(x))=g(x)g'(x)$이다.

$\int_0^2 f(g(x))dx=\int_0^2 g(x)g'(x)dx=\left[\frac{1}{2}\{g(x)\}^2\right]_0^2$이므로 $\{g(2)\}^2=16$이다. $g(x)$는 증가하므로 $g(2)=4$이다.

39) ③

(나)의 정적분에서 $e^x=t$로 치환하면 $\int_1^2 \frac{f'(t)}{t}dt=4$이다.

구하는 정적분 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right)dx$에서 $\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $\int_1^2 \frac{f(t)}{t^2}dt$이다.

부분적분각이군요. $\int_1^2 \frac{f'(t)}{t}dt=\left[\frac{f(t)}{t}\right]_1^2+\int_1^2 \frac{f(t)}{t^2}dt$이다.

40) ③

$g'(x)=\int_0^x f'(t)dt=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}$이다.

$\int_0^4 xg'(x)dx=\int_0^4 \left\{x\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}x\right\}dx$는 계산된다.

41) ②

$\int_0^1 f(e^x)dx=4$에서 $e^x=t$로 치환하면 $\int_1^e \frac{f(t)}{t}dt=4$이다.

$\int_1^e \frac{g(x)}{x^2}dx$에서 $g(x)$를 미분, $\frac{1}{x^2}$을 적분하는 부분적분을 때리자.

42) ①

$g'(x)=\int_0^1 x^3\sqrt{t}\sin(x\sqrt{t})dt$에서 $x\sqrt{t}=u$로 치환하면

$$g'(x)=\int_0^x 2u^2\sin u\,du$$

이다. $g''(x)=2x^2\sin x$는 $x=\pi$, $x=2\pi$, $x=3\pi$, $\cdots$에서 0이고 사이사이의 넓이를 째려보면 $g'(x)=0$의 근이 구간 $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, $\cdots$에 각각 하나씩 존재한다.

이 중 $g(x)$가 극대가 되는 x값은 구간 $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, $(5\pi, 6\pi)$, $\cdots$에 있는 것들이다.

43) ①

$g(x)=t$로 치환하면 $\int_0^1 tf(t)dt$이다.

44) ②

45) ①

$F(x)f'(x)+\{f(x)\}^2=\frac{1}{2}\cos x$의 양 변을 적분하면 $F(x)f(x)=\frac{1}{2}\sin x+C$이다.

$f(0)=0$이므로 $F(x)f(x)=\frac{1}{2}\sin x$이다. 다시 양 변을 적분하면 $\frac{1}{2}\{F(x)\}^2=\frac{1}{2}(-\cos x)+C$이다.

$f(0)=0$, $F(0)=1$이므로 $\{F(x)\}^2=2-\cos x$이다. $F(0)>0$이고 연속이므로 $F(x)=\sqrt{2-\cos x}$이다.

$f(x)=\dfrac{\sin x}{2\sqrt{2-\cos x}}$ 에서 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 이다.

46) ⑤

$\displaystyle\int \frac{f''(x)}{f(x)}dx=\frac{f'(x)}{f(x)}+\int\left\{\frac{f''(x)}{f(x)}\right\}^2 dx$ 이므로 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2x}{1+x^2}+C$이다.

조건에서 $C=2$, 양 변을 적분하면 $\ln f(x)=\ln(1+x^2)+2x+D$이다. $f(x)=(1+x^2)e^{2x}$ 이다.