제 2 교시

수학 영역(가형&나형)

1,2번 ⇨ 수1
3,4번 ⇨ 확통
5,6번 ⇨ 수2
7,8번 ⇨ 미적분

→ 가형은 전문항 풀기, 나형은 1번~6번까지 풀기

5지선다형	단답형

1. 어떤 물체가 정지해 있던 상태에서 자유낙하를 시작한 지 $t\,(t \geq 0)$초가 되는 순간의 낙하 속도를 $v(t)$라 하면 관계식

$$t=\log_b\left(\frac{v(t)-c}{a}\right) \text{ (단, } a,\ b,\ c\text{는 상수)}$$

가 성립한다고 한다. 이때, 곡선 $y=v(t)$의 점근선의 방정식을 $y=T$라 하면 이 물체가 정지해 있던 상태에서 자유낙하를 시작한 지 10초가 되는 순간의 낙하 속도는 $\frac{2}{3}T$라고 한다. 이 물체가 정지해 있던 상태에서 자유낙하를 시작하여 낙하 속도가 $\frac{80}{81}T$가 될 때까지 걸리는 시간은? [4점] [랑데뷰수학]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

2. 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k=\left\{\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi \;\middle|\; m\text{은 자연수}\right\}$$

라 할 때 $n(A_k)=21$을 만족시키는 모든 k의 값의 합은? [4점] [랑데뷰수학]

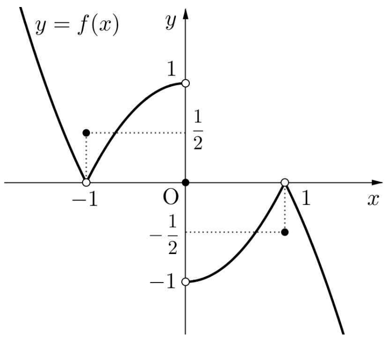
① 73 ② 75 ③ 77 ④ 79 ⑤ 81

3. 전체 학생 수가 900명인 어느 재수 종합학원을 대상으로 학원을 다닌 개월 수와 아침을 먹는지에 대하여 조사하였더니 6개월 이상 학원을 다닌 학생은 600명이었고, 아침을 먹는 학생 수는 300명이었다. 학원을 다닌 개월 수가 6개월 이상인 사건과 아침을 먹는 사건을 서로 독립이다. 이 학원의 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 아침을 먹지 않는 학생일 때, 그 학생의 학원을 다닌 개월 수가 6개월 이상일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점] [랑데뷰수학]

4. $a_1=1$, $a_{n+1}-a_n=2$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 ${}_9\mathrm{H}_0a_1+{}_8\mathrm{H}_1a_2+{}_7\mathrm{H}_2a_3+{}_6\mathrm{H}_3a_4+\cdots+{}_2\mathrm{H}_7a_8+{}_1\mathrm{H}_8a_9$의 값은? [4점]
[랑데뷰수학]

① 1280 ② 1404 ③ 2044 ④ 2304 ⑤ 2880

5. 원점에 대칭인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$g(x)=f(f(x))$라 할 때, $g(g(-1))+g(g(1))+\lim_{x\to-1-}g(x)+\lim_{x\to1+}g(x)$의 값은? [4점] [랑데뷰수학]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

6. 실수 a와 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 2$일 때, $f(x)=(x+1)(x-2)^2+a$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)-\frac{1}{3}a$이다.

[랑데뷰수학]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

7. 다음 조건을 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
>
> $$-e^{x^2}-1 \le ax+b \le e^{x^2}$$
>
> 이 성립한다.

[랑데뷰수학]

$M-m=pe+q$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)[4점]

8. 닫힌구간 $[-1,1]$에서 정의된 $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$에 대하여 함수 $g(x)$의 역함수를 $g^{-1}(x)$라 하자. 닫힌구간 $[-1,1]$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_{-1}^{1}\left|x-g^{-1}(t)\right|dt$$

일 때, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|x\left(\frac{f(x)}{2}-1+\ln 2\right)\right|dx=a\ln 2+b$이다.

a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.)[4점]

[랑데뷰수학]

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

랑데뷰 쉬사준킬 제162회 해설

1	2	3	4
②	⑤	5	④
5	6	7	8
①	64	5	5

출제
송원학원 황보백 선생님

1) 정답 ②
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

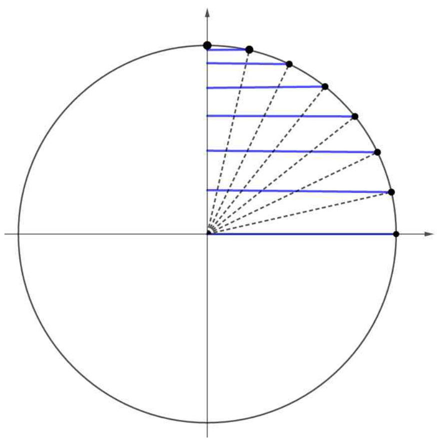
$t=\log_b\left(\frac{v(t)-c}{a}\right)\to b^t=\frac{v(t)-c}{a}\to v(t)=a\times b^t+c$에서 곡선 $v(t)$의 점근선은 $y=c$이다.
따라서 $c=T$
또한 $v(0)=0$이므로
$v(0)=a+c=0$에서 $a=-c$이다.
$\therefore\ a=-T$
$v(t)=-T\times b^t+T$
$v(10)=\frac{2}{3}T$이므로
$-T\cdot b^{10}+T=\frac{2}{3}T$
$b^{10}=\frac{1}{3}$
$\therefore\ b=3^{-\frac{1}{10}}$
$\therefore\ v(t)=-T\times 3^{-\frac{t}{10}}+T$
따라서, $v(t)=\frac{80}{81}T$인 t를 구하면
$-T\times 3^{-\frac{t}{10}}+T=\frac{80}{81}T$
$3^{-\frac{t}{10}}=\frac{1}{81}$
$-\frac{t}{10}=-4$
$\therefore\ t=40$

2) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

단위원 위의 한 점에서 cos값은 x값이므로 $\cos\theta$의 θ가 일정하게 커질 때 마다 단위원의 x축 위의 1에서 시작하여 제1사분면과, 제2사분면에 연속적으로 나타난다.

$\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi$에서 $n(A_k)=21$가 되기 위해서는 m에 1부터 21까지 $\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi$에 대입할 때 모두 다른 값 21개가 나오고 $m=22$을 대입하면서 같은 값이 나와야 한다.
$m=21$일 때, $\cos\frac{40}{k}\pi$이다.
(i) k가 짝수일 때
$k=40$이면 21개의 cos값을 갖는다.
$\cos\frac{40}{40}\pi=-1,\ \cos\frac{42}{40}\pi=\cos\frac{38}{40}\pi,\ \cos\frac{44}{40}\pi=\cos\frac{36}{40}\pi,\ \cdots$
(ii) k가 홀수일 때
$k=41$이면 21개의 cos값을 갖는다.
$\cos\frac{40}{41}\pi,\ \cos\frac{42}{41}\pi=\cos\frac{40}{41}\pi,\ \cos\frac{44}{41}\pi=\cos\frac{38}{41}\pi,\ \cdots$
(i), (ii)에서 $k=40$, $k=41$이다.
따라서 모든 k의 값의 합은 81이다.

[다른 풀이]
(i) $\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi$에서 k가 짝수일 때, 자연수 a와 0이상 정수 b에 대하여
$\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi=\cos\frac{b}{a}\pi$ 이라 할 수 있다.
$A=\left\{\cos\frac{b}{a}\pi \,\middle|\, a\text{은 자연수}, b\text{는 0이상 정수}\right\}$는
$b=0$일 때 $1\in A$, $b=a$일 때 $-1\in A$이므로
$n(A)=21$이기 위해서는 $\cos\frac{b}{a}\pi$의 값이 1과 -1을 제외하고 19개의 서로 다른 값을 나타내야 한다. $y=\cos x$는 y축 대칭이므로 cos값이 0을 포함해야 값의 개수가 홀수개가 될 수 있다. 즉 $\left|\cos\frac{b}{a}\pi\right|$의 값은 반드시 0을 포함하고 1을 제외한 값의 개수가 9이다.
따라서 a는 다시 짝수이어야 한다. ⇨ [즉, k는 4의 배수이다.]
다음 그림과 같이 한 가지 경우가 된다. ($\cos\frac{b}{a}\pi<0$을 나타내는 경우는 생략, 각의 등분으로 만들어지는 모든 부채꼴의 중심각의 크기는 같다.)



따라서 m은 1부터 21까지 값이 다르고 $m=22$일 때 $m=20$일 때의 cos값과 같아져야 집합의 원소의 개수가 21개다.

따라서 $m=21$일 때 $\cos\frac{40}{k}\pi=-1$이어야 하므로 $k=40$이다.

(ii) $\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi$에서 k가 홀수일 때

자연수 a에 대하여 $k=2a-1$라 하면

$\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi=\cos\frac{2(m-1)}{2a-1}\pi$에서 $2(m-1)$이 0이상의 짝수이고

분모 $2a-1$이 홀수이므로 $\cos\frac{2(m-1)}{2a-1}\pi\neq 0$이므로 $n(A_k)=21$을 만족하기 위해서는 1을 제외한 $\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi>0$ 인 값 10개, $\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi<0$인 값 10개이면 된다.

따라서 m은 1부터 21까지 cos값이 다르고 $m=22$일 때 $m=20$일 때의 cos값과 같아져야 집합의 원소의 개수가 21개다.

따라서 $m=21$일 때

$\cos\frac{40}{k}\pi=\cos\frac{42}{k}\pi$을 만족해야 한다. $k=41$

(i), (ii)에서 $k=40$, $k=41$이다.

따라서 모든 k의 값의 합은 81이다.

3) 정답 5

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

다음 표와 같은 상황이다.

	아침 먹음	아침 먹지 않음	
6개월 이상	x		600
6개월 미만			
	300		

학원을 다닌 개월 수가 6개월 이상인 사건을 A

아침을 먹는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{600}{900}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{300}{900}=\frac{1}{3}$

$n(A\cap B)=x$이라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{900}$이고

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\frac{x}{900}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$

에서 $x=200$이다.

따라서 다음 표가 완성된다.

	아침 먹음	아침 먹지 않음	계
6개월 이상	200	400	600
6개월 미만	100	200	300
계	300	600	

그러므로

이 학원의 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 아침을 먹지 않는 학생일 때, 그 학생의 학원을 다닌 개월 수가 6개월 이상일 확률 $\frac{400}{600}=\frac{2}{3}$

$p=3$, $q=2$이므로 $p+q=5$

4) 정답 ④

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$a_n=2n-1$이고

${}_9\mathrm{H}_0a_1+{}_8\mathrm{H}_1a_2+{}_7\mathrm{H}_2a_3+{}_6\mathrm{H}_3a_4+\cdots+{}_2\mathrm{H}_7a_8+{}_1\mathrm{H}_8a_9$

$={}_8\mathrm{C}_0a_1+{}_8\mathrm{C}_1a_2+{}_8\mathrm{C}_2a_3+{}_8\mathrm{C}_3a_4+\cdots+{}_8\mathrm{C}_7a_8+{}_8\mathrm{C}_8a_9$

$=\sum_{r=0}^{8}{}_8\mathrm{C}_r\,a_{r+1}$

$=\sum_{r=0}^{8}{}_8\mathrm{C}_r(2r+1)$

$=2\sum_{r=0}^{8}r\,{}_8\mathrm{C}_r+\sum_{r=0}^{8}{}_8\mathrm{C}_r$

$=2\times(8\times 2^7)+2^8$

$=2048+256=2304$

[랑데뷰팁]

$\sum_{r=0}^{n}r\,{}_n\mathrm{C}_r=n\times 2^{n-1}$

5) 정답 ①

[출제자 : 이현일 수클래스 학원 010-2681-9501]

$y=f(x)$는 원점대칭함수이므로

$g(-x)=f(f(-x))=(f(-f(x)))=-f(f(x))=-g(x)$

즉, $y=g(x)$는 원점대칭함수이다.

따라서 $y=g(g(x))$또한 원점대칭함수이다.

$\therefore g(g(-1))+g(g(1))=0\cdots$ ①

$\lim_{x\to-1-}g(x)$에서 $t=-x$라 하자.

그러면 $x\to-1-$일 때, $t\to1+$이므로

$\lim_{x\to-1-}g(x)=\lim_{t\to1+}g(-t)=-\lim_{t\to1+}g(t)$

$\therefore \lim_{x\to -1-} g(x) + \lim_{x\to 1+} g(x) = 0 \cdots ②$

따라서 $g(g(-1)) + g(g(1)) + \lim_{x\to -1-} g(x) + \lim_{x\to 1+} g(x) = 0$

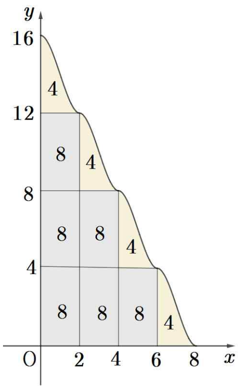
6) 정답 64
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

(가),(나)에서 $\lim_{x\to 2-} f(x) = f(2)$이므로 $a = f(0) - \frac{1}{3}a$이 성립한다.

따라서 $f(0) = 4 + a$에서 $a = 4 + a - \frac{1}{3}a$이므로 $a = 12$이다.

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x-2)^2 + 12 & (0 \le x < 2) \\ (x-1)(x-4)^2 + 8 & (2 \le x < 4) \\ (x-3)(x-6)^2 + 4 & (4 \le x < 6) \\ (x-5)(x-8)^2 & (6 \le x < 8) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$\int_0^2 (x+1)(x-2)^2 dx = 4$이므로



넓이의 합은 $8 \times 3 + 8 \times 2 + 8 \times 1 + 4 \times 4 = 64$이다.

7) 정답 5
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

(i) $y = e^{x^2}$ 위의 점 (t, e^{t^2})에서의 접선의 방정식을 구하면

$y' = 2xe^{x^2}$이므로

$y = 2te^{t^2}(x-t) + e^{t^2} = 2te^{t^2}x + e^{t^2}(1-2t^2)$

따라서 $a = 2te^{t^2}$, $b = e^{t^2}(1-2t^2)$

$a + b = e^{t^2}(-2t^2 + 2t + 1)$이다.

$a + b = f(t)$라 하면

$f(t) = e^{t^2}(-2t^2 + 2t + 1)$에서

$f'(t) = 2te^{t^2}(-2t^2 + 2t + 1) + e^{t^2}(-4t + 2)$

$\quad = e^{t^2}(-4t^3 + 4t^2 + 2t - 4t + 2)$

$\quad = -2e^{t^2}(2t^3 - 2t^2 + t - 1)$

$f'(t) = 0$의 실근은 $2t^3 - 2t^2 + t - 1 = 0$

$(t-1)(2t^2+1) = 0$에서 $t = 1$뿐이고 그 점에서 극대이자 최소이다.

따라서 $M = f(1) = e$이다.

(ii) $y = -e^{x^2} - 1$ 위의 점 $(s, -e^{s^2} - 1)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$y' = -2xe^{-x^2}$이므로

$y = -2se^{s^2}(x-s) - e^{s^2} - 1 = -2se^{s^2}x - e^{s^2}(1-2s^2) - 1$

따라서 $a = -2se^{s^2}$, $b = -e^{s^2}(1-2s^2) - 1$

$a + b = -e^{s^2}(-2s^2 + 2s + 1) - 1$이다.

$a + b = g(s)$라 하면

$g(s) = -e^{s^2}(-2s^2 + 2s + 1) - 1$에서

$g'(s) = -2se^{s^2}(-2s^2 + 2s + 1) - e^{s^2}(-4s + 2)$

$\quad = -e^{s^2}(-4s^3 + 4s^2 + 2s - 4s + 2)$

$\quad = 2e^{s^2}(2s^3 - 2s^2 + s - 1)$

$g'(s) = 0$의 실근은 $2s^3 - 2s^2 + s - 1 = 0$

$(t-1)(2t^2+1) = 0$에서 $s = 1$뿐이고 그 점에서 극소이자 최소이다.

따라서 $m = g(-1) = -e - 1$이다.

따라서 $M - m = e - (-e-1) = 2e + 1$

$p = 2$, $q = 1$이므로 $p^2 + q^2 = 4 + 1 = 5$

[랑데뷰팁]

(ii) $y = e^{x^2}$과 $y = -e^{x^2} - 1$의 대칭과 평행이동 관계를 생각하면 극솟값은 $x = 1$일 때, $-e - 1$임을 알 수 있다.

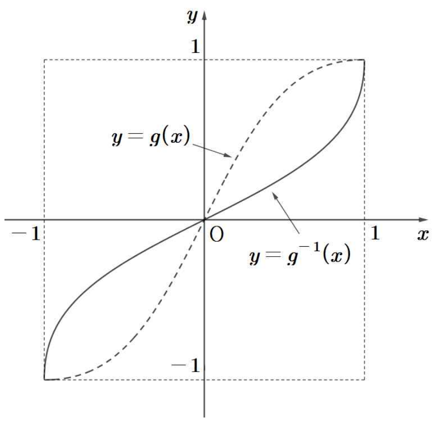
8) 정답 5
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$g'(x) = \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$이므로

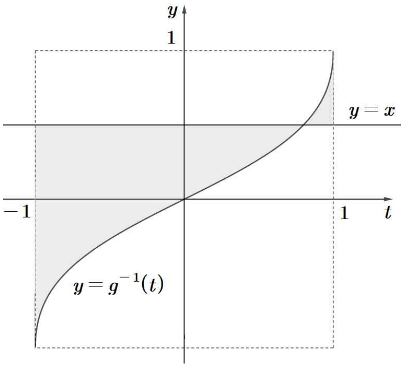
함수 $g(x)$은 $x = -1$에서 극솟값 $g(-1) = -1$, $x = 1$에서 극솟값 1을 갖는 그래프이다.

$g(-x) = -g(x)$에서 함수 $g(x)$는 원점대칭이다.

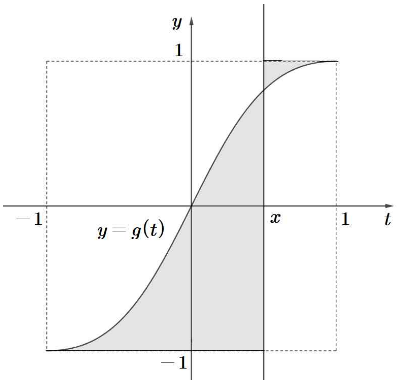
$-1 \le x \le 1$에서 함수 $g(x)$와 함수 $g^{-1}(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$를 그림으로 나타내면 〔그림1〕과 같고 식으로 나타내기 위해 $y=x$에 대칭이동시켜 보면 〔그림2〕와 같다.



〔그림1〕



〔그림2〕

[그림2]에서

$f(x)$

$=\int_{-1}^{x}\{g(t)-(-1)\}dt+(1-x)\times 2$

$\quad -\int_{x}^{1}\{g(t)-(-1)\}dt\cdots$㉠

$=\int_{-1}^{x}\left\{\frac{2t}{t^2+1}+1\right\}dt+(1-x)\times 2-\int_{x}^{1}\left\{\frac{2t}{t^2+1}+1\right\}dt$

$=\left[\ln(t^2+1)+t\right]_{-1}^{x}+2-2x-\left[\ln(t^2+1)+t\right]_{x}^{1}$

$=\ln(x^2+1)+x-\ln2+1+2-2x-\ln2-1+\ln(x^2+1)+x$

$=2\ln(x^2+1)+2-2\ln2$

따라서

$\frac{f(x)}{2}=\ln(x^2+1)+1-\ln2$이고

$x\left(\frac{f(x)}{2}-1+\ln2\right)=x\ln(x^2+1)$이다.

그러므로

$\int_{-1}^{1}\left|x\left(\frac{f(x)}{2}-1+\ln2\right)\right|dx$

$=\int_{-1}^{1}\left|x\ln(x^2+1)\right|dx$

$=2\int_{0}^{1}x\ln(x^2+1)dx$

$x^2+1=t$라 두면 $2x\,dx=dt$이므로

$=\int_{1}^{2}\ln t\,dt$

$=[t\ln t-t]_{1}^{2}$

$=2\ln2-2+1$

$=2\ln2-1$

따라서 $a=2,\ b=-1$이다.

$a^2+b^2=5$

[다른 풀이]1

㉠에서 양변 미분하면

$f'(x)=g(x)+1-2+g(x)+1=2g(x)=\frac{4x}{x^2+1}$

$f(x)=2\ln(x^2+1)+C$ 이고

$f(1)=2\ln2+C$

이고 ㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2\left(\because \text{정사각형 넓이의 } \frac{1}{2}\right)$이다.

따라서 $C=2\ln2-2$

$f(x)=2\ln(x^2+1)+2-2\ln2$

[다른 풀이]2-Sumath 임성일t

$t-y$좌표평면에서 $y=g^{-1}(t)$와 $y=x$(상수함수)의 교점의 t좌표를 α라 하면

$g^{-1}(\alpha)=x$에서 $g(x)=\alpha$이다.

따라서

$f(x)$

$=\int_{-1}^{1}\left|x-g^{-1}(t)\right|dt$

$=\int_{-1}^{\alpha}\{x-g^{-1}(t)\}dt+\int_{\alpha}^{1}\{g^{-1}(t)-x\}dt$

$=\int_{-1}^{g(x)}\{x-g^{-1}(t)\}dt+\int_{g(x)}^{1}\{g^{-1}(t)-x\}dt$이다.

$=\left[xt-G^{-1}(t)\right]_{-1}^{g(x)}+\left[G^{-1}(t)-xt\right]_{g(x)}^{1}$

$=xg(x)-G^{-1}(g(x))+x+G^{-1}(-1)$

$\quad +G^{-1}(1)-x-G^{-1}(g(x))+xg(x)$

양변 x에 관해 미분하면

$f'(x)=g(x)+xg'(x)-g^{-1}(g(x))g'(x)+1$

$\quad -1-g^{-1}(g(x))g'(x)+g(x)+xg'(x)$

$\quad =g(x)+xg'(x)-xg'(x)+1$

$\quad -1-xg'(x)+g(x)+xg'(x)$

$\quad =2g(x)$

$\quad =\frac{4x}{x^2+1}$

$f(x)=\int\frac{4x}{x^2+1}dx=2\ln(x^2+1)+C\ \cdots$㉡

한편,

$f(0)=\int_{-1}^{1}\left|g^{-1}(t)\right|dt=2\times\left(1-\int_{0}^{1}g(x)dx\right)\cdots☆$

$$= 2\times\left(1-\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx\right)$$
$$= 2\times\left(1-\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1\right)$$
$$= 2(1-\ln 2) = 2-2\ln 2$$

㉠에서 $f(0) = C = 2-2\ln 2$
따라서 $f(x) = 2\ln(x^2+1)+2-2\ln 2$

[랑데뷰팁]
㉠, ㉡에서
$f(x) = 2\ln(x^2+1)+C$ 이고
$f(x) = \int_{-1}^{1}\left|x-g^{-1}(t)\right|dt$에서
$f(1)$ 또는 $f(-1)$은 한 변의 길이가 2인 정사각형 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로
$f(1) = f(-1) = 2\ln 2 + C = 2$
$\therefore\ C = 2-2\ln 2$
이다.