제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\log 4+\log 25$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\log 4+\log 25=\log 100=2$

2. $\lim_{x\to 1}(3x^2+2)$ 의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$\lim_{x\to 1}(3x^2+2)=3+2=5$

3. $\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{81}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

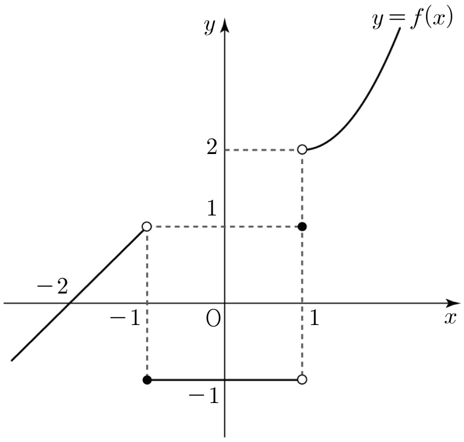
$\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{81}=-2+3=1$

4. $\cos\frac{2}{3}\pi$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to -1-} f(x) + \lim\limits_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=2$ $\therefore 1+2=3$

6. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이고, 넓이가 8π인 부채꼴의 반지름의 길이는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$\frac{1}{2}r^2 \times \frac{\pi}{4} = 8\pi$

$\therefore r^2 = 8^2$ $\therefore r=8$ $(\because r>0)$

7. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=2a_n+1$

을 만족시킨다. $a_4=31$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$a_{n+1}=2a_n+1$

$a_4=2a_3+1=31$ $\therefore a_3=15$

$a_3=2a_2+1=15$, $a_2=7$

8. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여

$$\log_2 a = \log_8 b$$

가 성립할 때, $\log_a b$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

$a^3 = b$

$\therefore \log_a b = 3$

9. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 4a_1 + 3a_2$$

일 때, $\frac{a_6}{a_4}$ 의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$ar^2 = 4a + 3ar$

$r^2 - 3r - 4 = 0$ $(r+1)(r-4) = 0$

$\therefore r = 4 (r>0)$

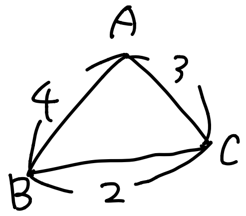
$\therefore \frac{a_6}{a_4} = r^2 = 16$

10. 삼각형 ABC 에서

$$\frac{2}{\sin A} = \frac{3}{\sin B} = \frac{4}{\sin C}$$

일 때, $\cos C$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$



$\cos C = \frac{4+9-16}{2\times6}$

$= -\frac{1}{4}$

11. 첫째항이 $\frac{1}{5}$ 이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_4 = 4a_2$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{3}{13}\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$을 만족시키는

자연수 n의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$a_n = \frac{1}{5}r^{n-1}$ $\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n} 2^{n-1} = \frac{3}{13}\times\frac{1}{25}\sum_{k=1}^{n} 4^{n-1}$

$r^2 = 4$ $\therefore r = 2\ (\because r > 0)$

$65\times(2^n - 1) = 4^n - 1$

$2^n + 1 = 65,\ 2^n = 64$ $\therefore n = 6$

12. $0 \le x < 2\pi$일 때, x에 대한 부등식

$$\sin^2 x - 4\sin x - 5k + 5 \ge 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

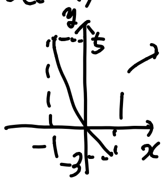
$\sin x = t$ $-1 \le t \le 1$

+답지에 답없는 버려...

$t^2 - 4t - 5k + 5 \ge 0$ (주의! 실수전체 X 판별식 $D \le 0$ 사용 X)

$t^2 - 4t \ge 5k - 5$

$t(t-4)$



$5k - 5 \le -3$

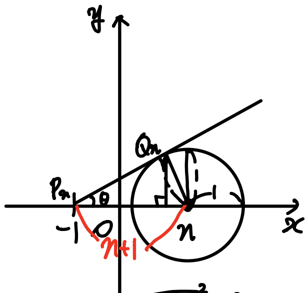
$5k \le 2$

$k \le \frac{2}{5}$

따라서 k의 최대 $\frac{2}{5}$

13. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $(n,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 O_n이라 하자.
점 $(-1,\ 0)$을 지나고 원 O_n과 제1사분면에서 접하는 직선의 기울기를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5} {a_n}^2$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{23}{42}$ ③ $\frac{25}{42}$ ✓ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{29}{42}$



$\overline{P_nQ_n}^2 = n^2+2n$

↳ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} = a_n$

∴ $\sum_{n=1}^{5} a_n^2 = \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{50}{42}\right) = \frac{25}{42}$

14. $0 \le x < \pi$일 때, x에 대한 방정식

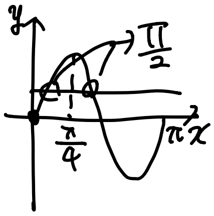
$$\sin nx = \frac{1}{5} \quad (n\text{은 자연수})$$

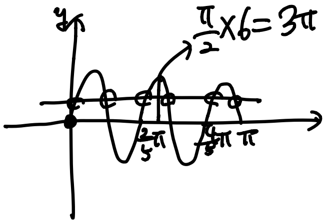
의 모든 해의 합을 $f(n)$이라 하자. $f(2)+f(5)$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$ ✓

f(2) 주기 π

f(5) 주기 $\frac{2}{5}\pi$





$\frac{\pi}{2}\times 6 = 3\pi$

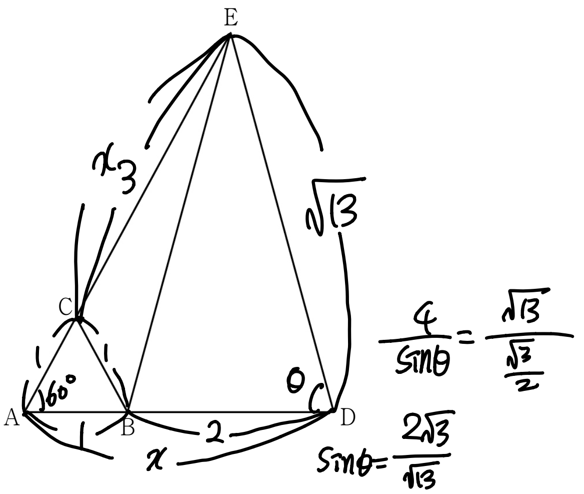
∴ $\frac{\pi}{2}+3\pi = \frac{7}{2}\pi$

15. $-1 \le x \le 1$ 에서 정의된 함수 $f(x) = -\log_3(mx+5)$ 에 대하여 $f(-1) < f(1)$ 이 되도록 하는 모든 정수 m 의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(-1) = -\log_3(-m+5)$
$f(1) = -\log_3(m+5)$
$-m+5 > m+5$
$2m<0 \quad m<0$
$-m+5 \le mx+5 \le m+5$
$-m+5>0, \ m+5>0$
$m<5 \quad m>-5$
$-5<m<0$
$-4, -3, -2, -1 \sim 4$개

16. 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정삼각형 ABC 에서 선분 AB 의 연장선과 선분 AC 의 연장선 위에 $\overline{AD} = \overline{CE}$ 가 되도록 두 점 D, E 를 잡는다. $\overline{DE} = \sqrt{13}$ 일 때, 삼각형 BDE 의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

$(1+x)^2 + x^2 - (x+1)x = 13$
$x^2 + x + 1 = 13, \quad x^2 + x - 12 = 0 \quad (x-3)(x+4) = 0$
$\therefore x = 3 \ (x>0)$
$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{13} \times \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{3}$

17. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_7 = 37$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{13} a_k$ 이다.

$a_{13} > 0$
$a_{14} < 0$

$\sum_{k=1}^{21} |a_k|$ 의 값은? [4점]

① 681 ② 683 ③ 685 ④ 687 ⑤ 689

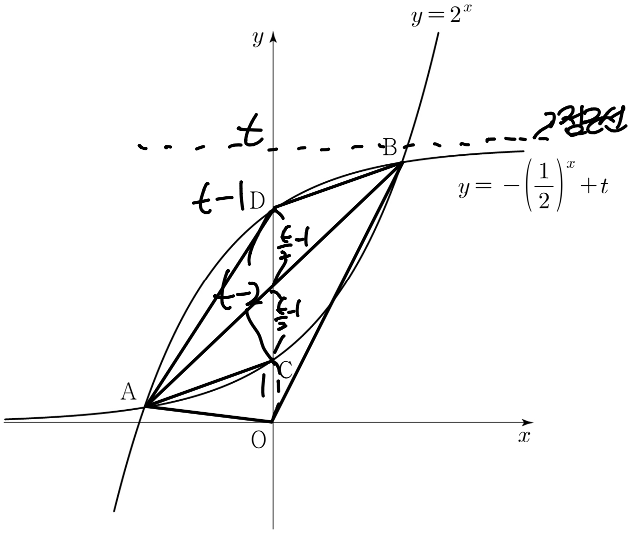
$6d > -37$ $d > -6.xx$
$7d < -37$ $d < -5.xx$ → $d = -6$ (정수)

$a_1 = 37 + 36 = 73$, $a_{13} = 37 - 36 = 1$, $a_{14} = -5$, $a_{21} = -47$

$\sum_{k=1}^{21} |a_k| = \frac{13(73+1)}{2} - \frac{8(-5-47)}{2}$

$= 481 - (-208) = 689$

18. 그림과 같이 2보다 큰 실수 t에 대하여 두 곡선 $y = 2^x$과 $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + t$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y = 2^x$, $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + t$가 y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.) [4점]



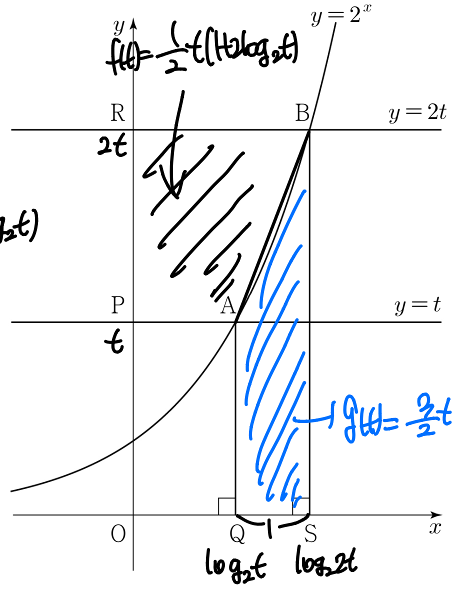
<보 기>

ㄱ. $\overline{CD} = t - 2$
ㄴ. $\overline{AC} = \overline{DB}$
ㄷ. 삼각형 ABD의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{t-2}{t}$ 배이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\overline{CD} = t-1-1 = t-2$ (참)
ㄴ. $(0, \frac{t}{2})$ 점대칭 → 같을 수밖에 없다 (참)
ㄷ. $\frac{t}{2}-1 : \frac{t}{2}$, $\frac{t-2}{2} : \frac{t}{2}$, ∴ $\frac{t-2}{t} : 1$ (높이 동일)
$\frac{t-2}{t}$배 (참)

19. 그림과 같이 실수 t $(1 < t < 100)$에 대하여 점 $\mathrm{P}(0,\ t)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y = 2^x$과 만나는 점을 A, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 점 $\mathrm{R}(0,\ 2t)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y = 2^x$과 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 S라 하자. 사각형 ABRP의 넓이를 $f(t)$, 사각형 AQSB의 넓이를 $g(t)$라 할 때, $\dfrac{f(t)}{g(t)}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 t의 값의 곱은? [4점]



① 2^{11} ② 2^{12} ③ 2^{13} ④ 2^{14} ⑤ 2^{15}

20. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \quad \cdots\cdots \quad (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> $(\bigstar)$에서
>
> $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$이라 하자.
>
> (i) $n = 1$일 때,
>
> $S_1 =$ (가) $= T_1$이므로 $(\bigstar)$이 성립한다.
>
> (ii) $n = m$일 때,
>
> $(\bigstar)$이 성립한다고 가정하면 $S_m = T_m$이다.
>
> $n = m+1$일 때, $(\bigstar)$이 성립함을 보이자.
>
> $S_{m+1} = S_m + \dfrac{1}{2m+1} +$ (나),
>
> $T_{m+1} = T_m +$ (다) $+ \dfrac{1}{2m+1} + \dfrac{1}{2m+2}$이다.
>
> $S_{m+1} - T_{m+1} = S_m - T_m$이고,
>
> $S_m = T_m$이므로 $S_{m+1} = T_{m+1}$이다.
>
> 따라서 $n = m+1$일 때도 $(\bigstar)$이 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여
>
> 모든 자연수 n에 대하여 $(\bigstar)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $a + \dfrac{g(5)}{f(14)}$의 값은? [4점]

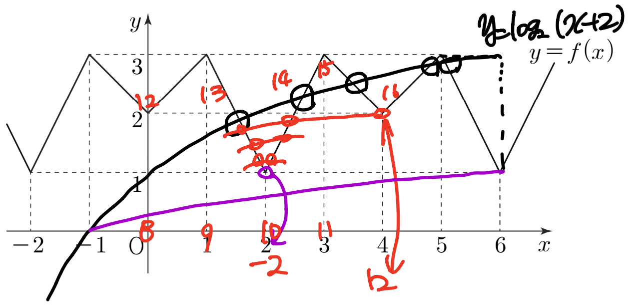
① $\dfrac{7}{2}$ ② $\dfrac{9}{2}$ ③ $\dfrac{11}{2}$ ④ $\dfrac{13}{2}$ ⑤ $\dfrac{15}{2}$

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=\begin{cases} x+2 & (0 \le x < 1) \\ -2x+5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $f(-x)=f(x)$이고 $f(x)=f(x+4)$이다.

n이 자연수일 때, 함수 $y=\log_{2^n}(x+2n)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 모든 점의 개수를 a_n이라 하자. $a_1+a_2+a_3$의 값은? [4점]

① 532 ② 535 ③ 538 ④ 541 ⑤ 544



① $n=1$, $y=\log_2(x+2)$
5개

② $n=2$, $y=\log_4(x+4)$
(0) (1) (2) (3)
$-3 \to 0 \to 12 \to 60$
7개 (2점동시)
$12 \to 16 \to 20 \to 24 \to 28 \to \cdots \to 60$
3 4 4 4
$3+4\times 11=47$
$\sim 7+47=54$

③ $n=3$, $y=\log_8(x+6)$
(0) (1) (2) (3)
$-5 \to 2 \to 58 \to 506$
$58 \to 66 \to 74 \to 82 \to \cdots \to 506$
8 8 8 8 8
$56\times 8=448$
$2 \to 10 \to 18 \to 26 \to 34 \to 42 \to 50 \to 58$
3 4 4 4 4 4 4 ~ 27
$\sim 1+27+448=476$

$\therefore 5+54+476=535$

단 답 형

22. $3^4 \times 9^{-1}$의 값을 구하시오. [3점]

$3^4 \times 3^{-2}=3^2=9$ 9

23. 네 수 x, 7, y, 13이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $x+2y$의 값을 구하시오. [3점]

공차가 3이므로 3
$x=4$, $y=10$
$\therefore x+2y=4+20=24$ 24

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n-b_n)=10,\ \sum_{n=1}^{6}(2a_n-2b_n)=56$$

ㄴ㉠ ㄴ㉡

일 때, a_6-b_6의 값을 구하시오. [3점]

18

㉡-2㉠ = $2a_6-2b_6=36$

$\therefore a_6-b_6=18$

25. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$일 때,

ㄴ $\sin\theta=\frac{4}{5}$

$5\sin(\pi+\theta)+10\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$의 값을 구하시오. [3점]

$=-5\sin\theta+10\sin\theta=5\sin\theta$

4

$\therefore 5\sin\theta=5\times\frac{4}{5}=4$

26. 지수함수 $y=5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

함수 $y=\frac{1}{9}\times5^{x-1}+2$의 그래프와 일치한다.

5^a+b의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

$y=5^{x-a}+b$

47

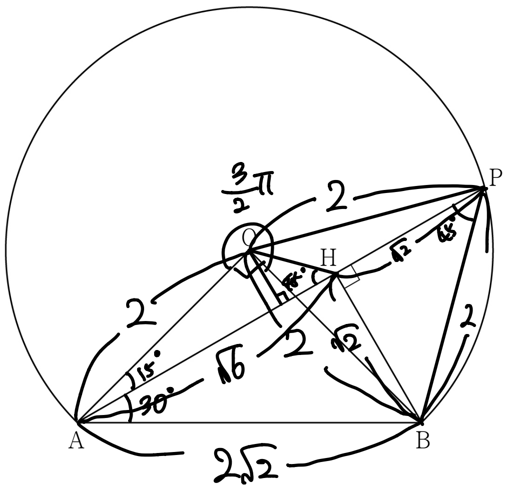
$=\frac{1}{9}\times5^{x-1}+2$

$=5^{x-1-\log_5 9}+2$

$\therefore b=2,\ a=1+\log_5 9$

$5^a+b=5\times9+2=47$

27. 그림과 같이 반지름의 길이가 2 이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$ 인 부채꼴 OBA 가 있다. 호 BA 위에 점 P 를 $\angle BAP = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 잡고, 점 B 에서 선분 AP 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\overline{OH}^2$ 의 값은 $m+n\sqrt{3}$ 이다. m^2+n^2 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 유리수이다.) [4점]



$\overline{OH}^2+2+2\sqrt{2}\,\overline{OH}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$ [20]

$\overline{OH}^2+2\overline{OH}-2=0$

$\overline{OH}=-1+\sqrt{1+2}=-1+\sqrt{3}$

$\overline{OH}^2=4-2\sqrt{3}=m+n\sqrt{3}$

$\therefore m^2+n^2=16+4=20$

28. x 에 대한 부등식

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x-(3n+16)\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+48n\le 0$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수가 2 가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 개수를 구하시오. [4점]

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-3n\right\}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-16\right\}\le 0$ [12]

$3n\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 16$ $x=-4$, $x=-3$ → $\frac{4}{3}<n\le\frac{8}{3}$ ∴ $n=2$ ⇒ 1개

or

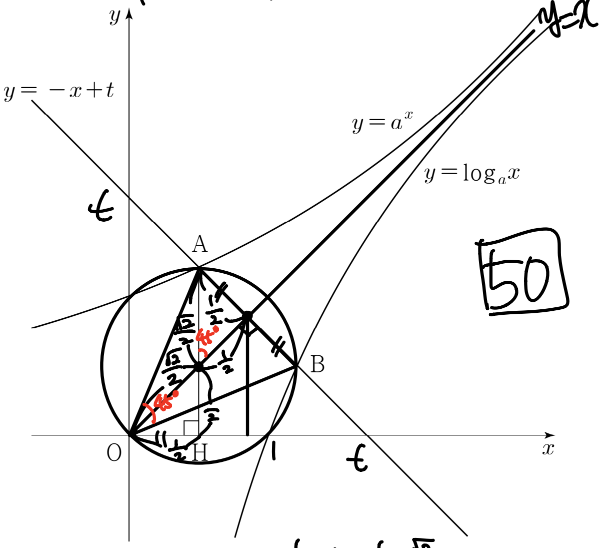
$16\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 3n$ $x=-4$, $x=-5$ $\frac{32}{3}\le n<\frac{64}{3}$ ∴ $n=11\sim21$ ⇒ 11개

$\therefore 11+1=12$

29. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, t에 대하여 직선 $y=-x+t$가 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 세 점 A, B, H는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OH}} : \overline{\mathrm{AB}} = 1 : 2$
(나) 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

$200(t-a)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



30. 이차함수 $f(x)=x^2+2x+2$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ |f(-x)-t| & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 모든 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\lim_{t\to\alpha-} h(t) \neq \lim_{t\to\alpha+} h(t)$$

인 모든 실수 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{k=1}^{m}\{4\alpha_k \times h(\alpha_k)\}$의 값을 구하시오. [4점]

＊ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.