제 2 교시

수학 영역

1. [2024년 수능 (공통) 1번]

$\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅰ 〉 지수로그
〉 Ⅰ 지수법칙 p98

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$$
$$=\left(2^3\times 3\right)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$$
$$=2\times 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2\times 3$$
$$=6$$

2. [2024년 수능 (공통) 9번]

수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅰ 〉 지수로그
〉 10 로그방정식과 로그부등식 p109

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표

$$\frac{m\log_5 12+(1-m)\log_5 3}{m+(1-m)}=1$$
$$\Leftrightarrow m\log_5 4+\log_5 3=1$$
$$\Leftrightarrow \log_5\left(4^m\times 3\right)=1$$
$$\Leftrightarrow 4^m\times 3=5$$
$$\therefore\ 4^m=\frac{5}{3}$$

제 2 교시

수학 영역

3. [2024년 수능 (공통) 16번]

방정식 $3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

[수학의 단권화 적용 개념]

수학 I 〉 지수로그
〉 10 지수방정식과 지수부등식 p108

2

$3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x}$

$\Leftrightarrow\ 3^{x-8}=3^{-3x}$

$\Leftrightarrow\ x-8=-3x$

$\therefore\ x=2$

4. [2024년 수능 (공통) 21번]

양수 a에 대하여 $x\geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+6x & (-1\leq x<6)\\ a\log_4(x-5) & (x\geq 6)\end{cases}$$

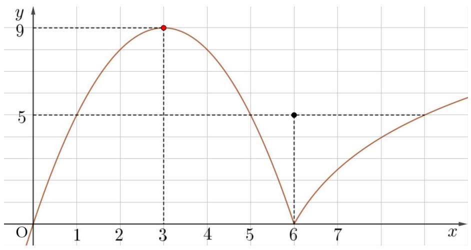
이다. $t\geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

[수학의 단권화 적용 개념]

수학 I 〉 지수로그
〉 8 로그함수 p107

10

아무 생각 없이 풀려고 들지 말고
극댓값이 있는 $x=3$, 함수식이 바뀌는 $x=6$
기준으로 관찰해야겠다는 생각을 할 줄 알아야 한다!

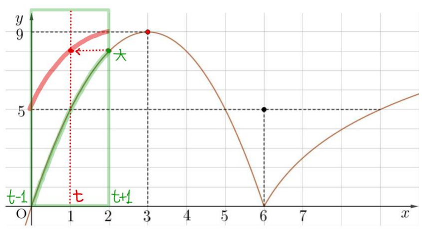


i) $0<t<2$인 경우

$t+1<3$이므로

$[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

$g(t)=f(t+1)$



제 2 교시

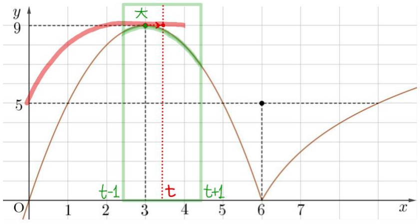
수학 영역

ii) $2 \le t \le 4$인 경우

$t-1 \le 3 \le t+1$이므로

$[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

$g(t)=f(3)=9$

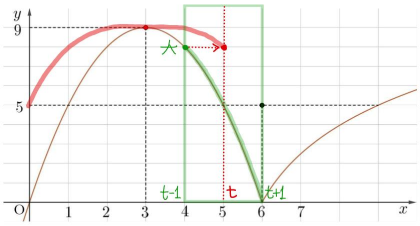


iii) $4 < t \le 5$인 경우

$t-1 > 3$이므로

$[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

$g(t)=f(t-1)$



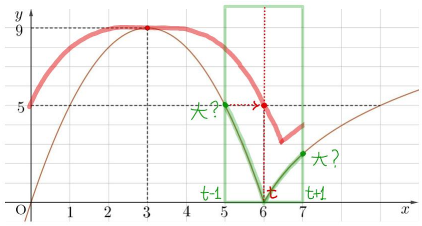
iv) $5 < t < 7$인 경우

$[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

a값에 따라 다르다. 아래 둘 중 큰 값이다.

ⓐ $g(t)=f(t-1)=-(t-1)^2+6(t-1)$ $(\because t-1<6)$

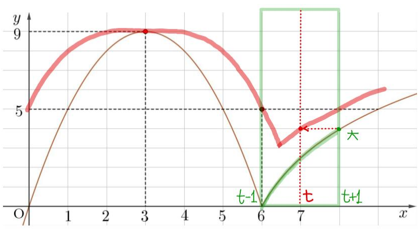
ⓑ $g(t)=f(t+1)=a\log_4\{(t+1)-5\}$ $(\because t+1>6)$



v) $t \ge 7$인 경우

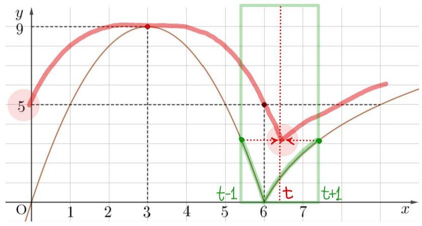
$[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

$g(t)=f(t+1)$

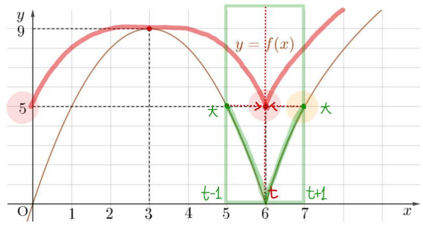


$g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하려면

$f(7) \ge 5$이어야 한다.



$\Downarrow$



$\therefore\ a\log_4 2 \ge 5 \quad \Leftrightarrow \quad a \ge 10$

$\therefore$ 양수 a의 최솟값은 10이다.

제 2 교시

수학 영역

5. [2024년 수능 (공통) 3번]

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

[수학의 단권화 적용 개념]

수학 I 〉 삼각함수

〉 7 삼각함수 사이의 관계 p116

〉 10 삼각함수의 성질 p122

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

$\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta = -\frac{1}{3}$

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

6. [2024년 수능 (공통) 19번]

함수 $f(x) = \sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0 < x < 16$에서 부등식

$$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

[수학의 단권화 적용 개념]

수학 I 〉 삼각함수

〉 8 삼각함수의 그래프 p118

〉 10 삼각함수의 성질 p122

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

32

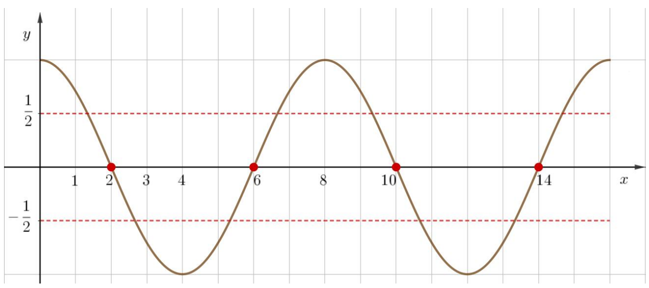
$f(2+x) = \sin\frac{\pi}{4}(2+x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right) = \cos\frac{\pi}{4}x$

$f(2-x) = \sin\frac{\pi}{4}(2-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right) = \cos\frac{\pi}{4}x$

$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos^2\frac{\pi}{4}x < \frac{1}{4}$

$\therefore -\frac{1}{2} < \cos\frac{\pi}{4}x < \frac{1}{2}$



자연수 x에 대하여 $-\frac{1}{2} < \cos\frac{\pi}{4}x < \frac{1}{2}$이 성립하려면 $\cos\frac{\pi}{4}x = 0$인 경우뿐이다.

$x = 2,\ 6,\ 10,\ 14$

$\therefore$ 모든 x의 합은

$2+6+10+14 = 32$

제 2 교시

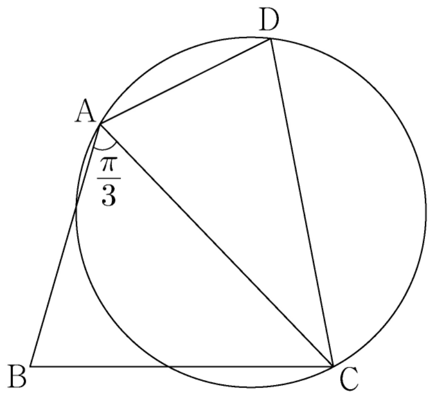
수학 영역

7. [2024년 수능 (공통) 13번]
그림과 같이

$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$, $\overline{AD}\times\overline{CD}=9$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은? [4점]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$

④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

[수학의 단권화 적용 개념]

수학 I 〉 삼각함수
〉 13 사인법칙 p124
〉 14 코사인법칙 p126

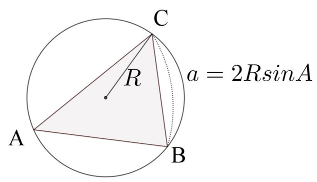
필연성 08

사인법칙 활용법 (각이 많을 때)

[단서] → [답]
✓ 2변 1각 → 1각
✓ 1변 2각 → 1변
✓ 외접원 등장

Skill 사인법칙 실전용 (2)

✓ 외접원 있을 때



필연성 09

코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)

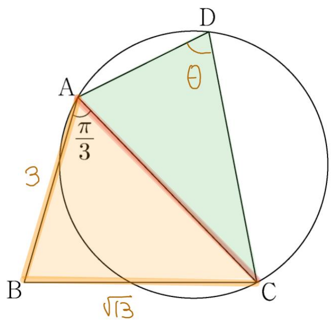
[단서] → [답]
✓ 2변 1각 → 1변
✓ 3변 → 각

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

구하는 답 ‣ $\frac{R}{\sin\theta}$

■ 외접원 반지름R의 길이 ‣ 사인법칙
→ $\overline{AC}=2R\sin\theta$
■ 변 길이에 대한 단서가 많다 → 코사인법칙

(step1) 코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)



$\overline{AC}=x$라 하면

$(\sqrt{13})^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=4$

(step2) 넓이 단서 활용

$S_2=\frac{5}{6}S_1$

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\ \sin\theta=\frac{5}{6}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

(step3) 사인법칙 실전용 (2)

$\overline{AC}=2R\sin\theta$

$\Leftrightarrow\ 4=2R\times\frac{5\sqrt{3}}{9}$

$\therefore\ \frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{\frac{18}{5\sqrt{3}}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=\frac{54}{25}$

제 2 교시

수학 영역

8. [2024년 수능 (공통) 6번]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4 - S_2 = 3a_4,\ a_5 = \frac{3}{4}$$

일 때, $a_1 + a_2$의 값은? [3점]

① 27 ② 24 ③ 21
④ 18 ⑤ 15

[수학의 단권화 적용 개념]

수학 I 〉 수열
〉 4 일반항과 합의 관계 p129
〉 5 등비수열 p130

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공비를 r라 하면

$S_4 - S_2 = a_4 + a_3 = 3a_4$

$\therefore\ a_3 = 2a_4,\ r = \dfrac{1}{2}$

$a_1 = a_5 \times \left(\dfrac{1}{r}\right)^4 = \dfrac{3}{4} \times 2^4 = 12$

$a_2 = 12 \times \dfrac{1}{2} = 6$

$\therefore\ a_1 + a_2 = 12 + 6 = 18$

9. [2024년 수능 (공통) 18번]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10}(2b_k - 1),\ \sum_{k=1}^{10}(3a_k + b_k) = 33$$

일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

[수학의 단권화 적용 개념]

수학 I 〉 수열
〉 8 Σ의 성질 p132

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설
9

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k = A,\ \sum_{k=1}^{10} b_k = B$라 하자.

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10}(2b_k - 1) = 2\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$$

$\Leftrightarrow\ A = 2B - 10$

$$\sum_{k=1}^{10}(3a_k + b_k) = 3\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 33$$

$\Leftrightarrow\ 3A + B = 33$

$\therefore\ B = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} b_k = 9$

10. [2024년 수능 (공통) 11번]
공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8, \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 60 ② 65 ③ 70
④ 75 ⑤ 80

[수학의 단권화 적용 개념]

수학 I 〉 수열
〉 2 등차수열 p128
〉 7 합의 기호 Σ의 뜻 p131

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$|a_6| = a_8 \ (a_8 > 0, \ a_6 < 0, \ d > 0)$

$\Leftrightarrow a_8 = -a_6$

$\Leftrightarrow 2a_7 = a_6 + a_8 = 0$

$\therefore a_7 = 0$

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

$$= \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_{k+1} - a_k}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_6}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_7 - 6d} - \frac{1}{a_7 - d}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{0 - 6d} - \frac{1}{0 - d}\right)$$

$$= \frac{1}{d^2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{96}$$

$\therefore d^2 = 16, \ d = 4 \ (\because \ d > 0)$

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = a_8 \times 15 = (a_7 + 4) \times 15 = 60 \ (\because \ a_7 = 0)$$

제 2 교시

수학 영역

11. [2024년 수능 (공통) 15번]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153
④ 160 ⑤ 167

[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅰ 〉 수열 〉

Ⅲ 수열의 귀납적 정의(점화식) p134

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

a_1이 자연수이고

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이므로 $a_2 \to a_3 \to a_4 \to \cdots$ 모두 자연수이다.

∴ 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이다.

$a_6+a_7=3$에서

ⅰ) $a_6=1$, $a_7=2$인 경우

ⅱ) $a_6=2$, $a_7=1$인 경우

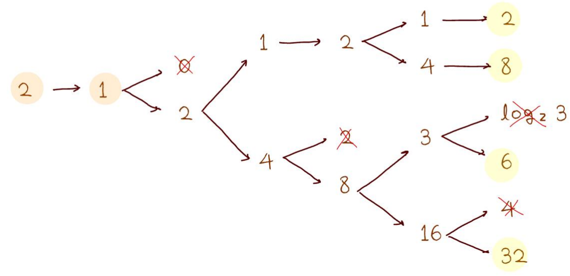
두 가지 경우뿐이다.

점화식의 역주행 문제 → 역주행 최적화식 만들기

$$\begin{cases}\log_2 a_{n+1}=a_n & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ 2a_{n+1}=a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

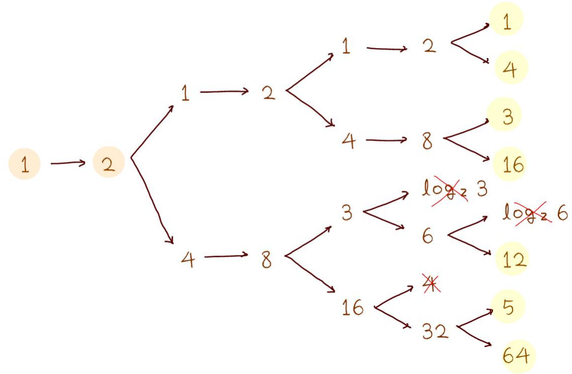
ⅰ) $a_6=1$, $a_7=2$인 경우

$a_7 \to a_6 \to a_5 \to a_4 \to a_3 \to a_2 \to a_1$



ⅱ) $a_6=2$, $a_7=1$인 경우

$a_7 \to a_6 \to a_5 \to a_4 \to a_3 \to a_2 \to a_1$



∴ 모든 a_1의 값의 합은

$1+2+3+4+5+6+8+12+16+32+64=153$

제 2 교시

수학 영역

12. [2024년 수능 (공통) 4번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x-a & (x<2) \\ x^2+a & (x \ge 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅱ 〉 함수극한

〉 9 f(x)가 x=a에서 연속 p145

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x \to 2+} f(x)=\lim_{x \to 2-} f(x)=f(2)$

$4+a=6-a$

$\therefore\ a=1$

13. [2024년 수능 (공통) 2번]

함수 $f(x)=2x^3-5x^2+3$에 대하여

$\lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅱ 〉 미분법

〉 2 미분계수 p151

〉 5 미분법의 공식 p154

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

$\lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$f'(x)=6x^2-10x$

$\therefore\ f'(2)=4$

14. [2024년 수능 (공통) 17번]

함수 $f(x)=(x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅱ 〉 미분

〉 5 미분법의 공식 p154

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

8

$f'(x)=(x^2+3)+(x+1)(2x)$

$\therefore\ f'(1)=4+2\times2=8$

제 2 교시

수학 영역

15. [2024년 수능 (공통) 20번]

$a > \sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$$

라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

[수학의 단권화 적용 개념]

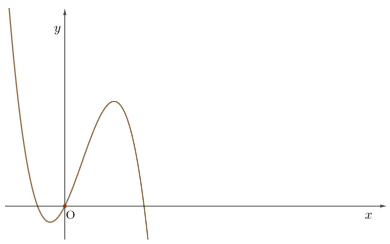
수학Ⅱ 〉 미분

〉 6 접선의 방정식 p156

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

25



삼차방정식 $f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x = 0$의

근과 계수의 관계에 의하여

세 실근의 합 $\alpha + \beta + \gamma = a$

$\therefore$ $f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$와 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선의

세 실근의 합 또한 $0 + 0 + a = a$

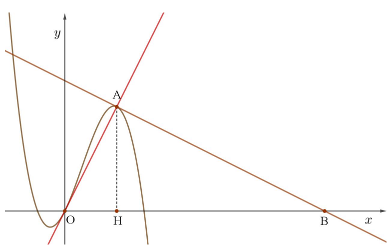
$\therefore$ 점 A의 x좌표는 a

$f(a) = -a^3 + a^3 + 2a = 2a$

$\therefore$ $\mathrm{A}(a, 2a)$

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle \mathrm{OAB} = 90^\circ$



$\triangle \mathrm{OAH}$와 $\triangle \mathrm{ABH}$는 닮음이고 닮음비는 1:2

$\therefore$ $\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{5}a$, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{5}a$

$\angle \mathrm{OAB} = 90^\circ$ 이므로

$f'(0) \times f'(a) = -1$

$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 2$

$f'(0) = 2$

$f'(a) = -a^2 + 2 = -\dfrac{1}{2}$ 곱$= -1$

$\therefore$ $a^2 = \dfrac{5}{2}$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{5}a \times 2\sqrt{5}a = 10a^2 = 25$

[다른 풀이]

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 2$

$\therefore$ $f'(0) = 2$

$\therefore$ $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선의 방정식은 $y = 2x$

$-x^3 + ax^2 + 2x = 2x$

$\Leftrightarrow$ $x^2(x - a) = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = 0$, $x = a$

$\therefore$ 점 A의 x좌표는 a

$f(a) = -a^3 + a^3 + 2a = 2a$

$\therefore$ $\mathrm{A}(a, 2a)$

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle \mathrm{OAB} = 90^\circ$ 이므로

$f'(0) \times f'(a) = -1$

$\therefore$ $f'(a) = -a^2 + 2 = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $a^2 = \dfrac{5}{2}$

점 A에서 접선의 방정식은

$y = -\dfrac{1}{2}(x - a) + 2a = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}a$

$\therefore$ $\mathrm{B}(5a, 0)$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{5}a \times 2\sqrt{5}a = 10a^2 = 25$

제 2 교시

수학 영역

16. [2024년 수능 (공통) 7번]

함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$$

가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.) [3점]

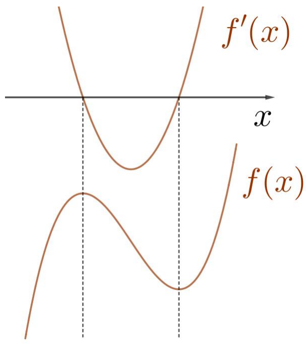
① -4 ② -1 ③ 2
④ 5 ⑤ 8

[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅱ 〉 미분
〉 10 함수의 극대와 극소 p166

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$f'(x)=x^2-4x-12=(x+2)(x-6)$



함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 $x=6$에서 극소

$\therefore\ \alpha=-2,\ \beta=6$

$\therefore\ \beta-\alpha=8$

17. [2024년 수능 (공통) 14번]

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}2x^3-6x+1 & (x\le 2)\\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2)\end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅱ 〉 미분
〉 10 함수의 극대와 극소 p166
〉 11 방정식에의 활용 p168

제 2 교시

수학 영역

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(step1) 그래프 개형 파악하기

$x \leq 2$ 에서

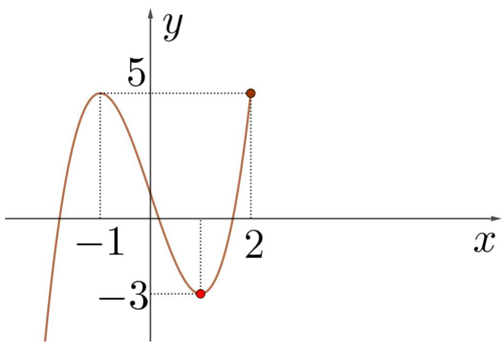
$f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x+1)(x-1)$

$\therefore$ $f(x)$는 $x = -1$, 1에서 극값을 갖고

$f(-1) = f(2) = 5$이므로 $f(1) = -3$

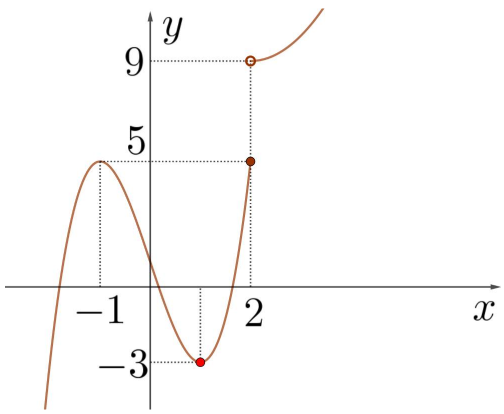
$x \leq 2$에서 $f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



함수 $y = a(x-2)(x-b)+9$의 그래프는
두 점 $(2, 9)$, $(b, 9)$를 지난다.

i) $b \leq 2$인 경우

$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t) = 9$인 실수 k의 개수는 무수히 많다.



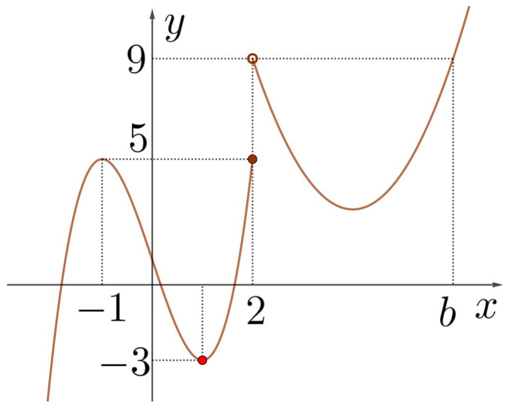
$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t)$

$= 3 + 3 + 3 = 9$

ii) $b > 2$인 경우

(1) 이차함수 $y = a(x-2)(x-b)+9$의 꼭짓점의 y좌표가 -3보다 크면

$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t) = 9$인 실수 k의 개수는 무수히 많다.

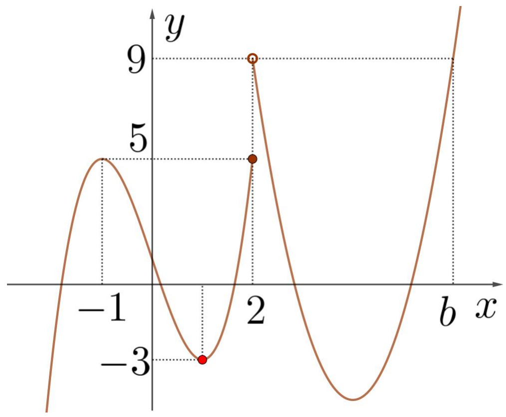


$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t)$

$= 3 + 3 + 3 = 9$

(2) 이차함수 $y = a(x-2)(x-b)+9$의 꼭짓점의 y좌표가 -3보다 작으면

$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t) = 9$인 실수 k의 개수는 무수히 많다.



$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t)$

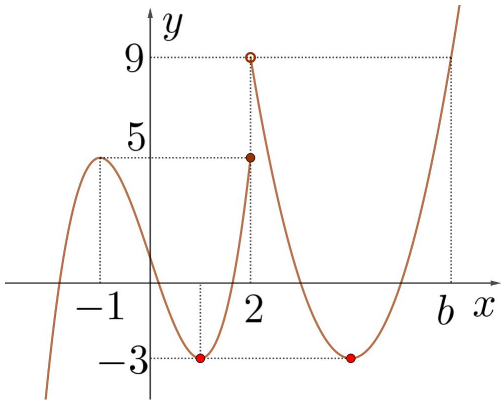
$= 3 + 3 + 3 = 9$

(3) 이차함수 $y = a(x-2)(x-b)+9$의 꼭짓점의 y좌표가 -3이면

$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t) = 9$인 실수 $k = -3$으로 유일하다.

제 2 교시

수학 영역



$g(-3)+\lim\limits_{t \to -3-} g(t)+\lim\limits_{t \to -3k+} g(t)$

$=3+1+5=9$

$\therefore\ y=a(x-2)(x-b)+9$는

$x=\dfrac{b+2}{2}$에서 꼭짓점을 가지므로

$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)=-3$

(step2) a, b가 자연수라는 조건을 활용하기

케이스 나열!

$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)=-3$

$\Leftrightarrow\ a\left(\dfrac{b}{2}-1\right)\left(1-\dfrac{b}{2}\right)+9=-3$

$\Leftrightarrow\ a(b-2)^2=48=48\times1^2=12\times2^2=3\times4^2$

i) $a=48,\ b=3$ ($\because\ b>2$)

ii) $a=12,\ b=4$

iii) $a=3,\ b=6$

$\therefore\ a+b$의 최댓값은

$48+3=51$

제 2 교시

수학 영역

18. [2024년 수능 (공통) 22번]
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$f(k-1)f(k+1)<0$$
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

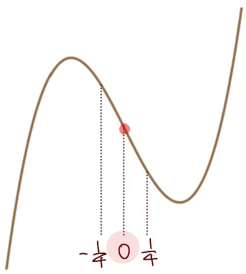
[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅱ 〉 미분
〉 9 함수의 증가와 감소 p159

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

483

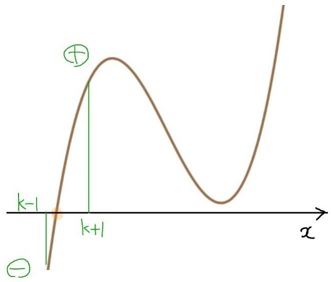
함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이고 $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$이므로 그래프의 개형은 아래와 같다.



이때 $f'(0)<0$이라는 것을 주목하자.

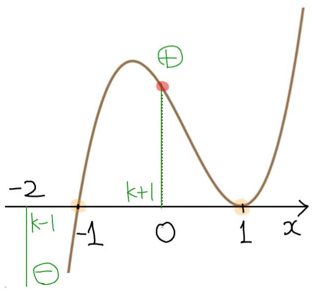
$f(k-1)$과 $f(k+1)$의 부호 다르면 $f(k-1)f(k+1)<0$이다.
→ 삼차함수는 부호변화가 반드시 존재한다.
그런데도 $f(k-1)f(k+1)<0$인 정수 k가 존재하지 않으려면 부호가 변화하는 부근에서 $f(k-1)=0$ 또는 $f(k+1)=0$이면 된다.
→ 즉 $f(x)=0$의 근이 정수인 그래프 위주로 관찰할 생각을 할 수 있어야 한다!

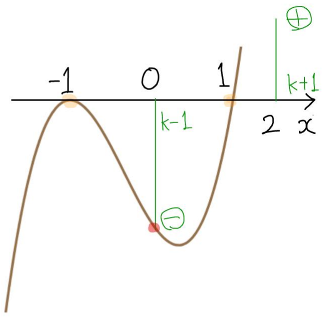
i) $f(x)=0$의 서로 다른 근이 1개인 경우



∴ $f(k-1)f(k+1)<0$인 정수 k 존재 (모순)

ii) $f(x)=0$의 서로 다른 근이 2개인 경우

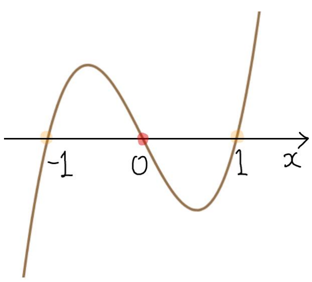




∴ $f(k-1)f(k+1)<0$인 경우 존재 (모순)

iii) $f(x)=0$의 서로 다른 근이 3개인 경우
$f(x)$의 그래프가 감소하는 부분이 x축과 만나게 되는데
감소하는 구간에 정수 $x=0$이 포함되어 있으므로 0과 가장 가까운 정수인 -1, 1에서 $f(x)=0$이 되는 것을 기준으로 케이스를 나눠보자.

iii-1) $f(-1)=f(0)=f(1)=0$인 경우



모든 정수 k에 대하여 $f(k-1)f(k+1)\geq 0$이 성립하지만
$f(x)=(x+1)x(x-1)=x^3-x$
$f'(x)=3x^2-1$
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{13}{16}\neq-\frac{1}{4}$ (모순)

제 2 교시

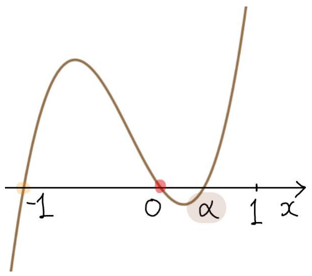
수학 영역

iii−2) $f(1) \neq 0$, $f(-1)=f(0)=0$인 경우

나머지 한 근을 α라고 하자.

모든 정수 k에 대하여

$f(k-1)f(k+1) \geq 0$이 성립하려면 $0<\alpha<1$이다.



$f(x)=(x+1)x(x-\alpha)=(x^2+x)(x-\alpha)$

$f'(x)=(2x+1)(x-\alpha)+(x^2+x)$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{16}-\frac{1}{2}\alpha=-\frac{1}{4}$

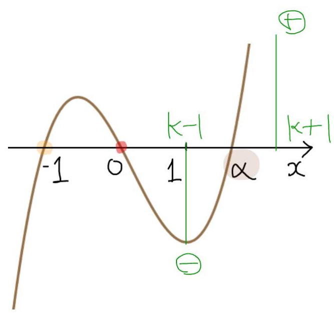
$\therefore\ \alpha=-\frac{1}{8}$

$\therefore\ 0<\alpha<1$에 모순

※ $\alpha>1$이면

$f(k-1)f(k+1)<0$인 정수 k 존재 (모순)

ex)



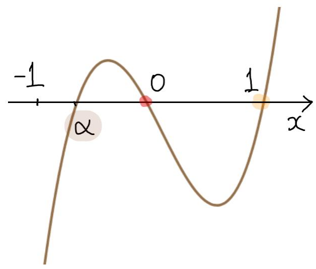
iii−3) $f(-1) \neq 0$, $f(0)=f(1)=0$인 경우

나머지 한 근을 α라고 하자.

모든 정수 k에 대하여

$f(k-1)f(k+1) \geq 0$이 성립하려면

$-1<\alpha<0$이다.



$f(x)=(x-\alpha)x(x-1)=(x^2-x)(x-\alpha)$

$f'(x)=(2x-1)(x-\alpha)+(x^2-x)$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{16}+\frac{3}{2}\alpha=-\frac{1}{4}$

$\therefore\ \alpha=-\frac{5}{8}$

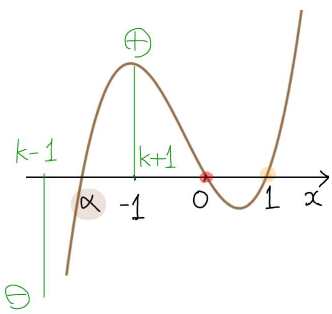
$\therefore\ f(x)=\left(x+\frac{5}{8}\right)x(x-1)$

$\therefore\ f(8)=483$

※ $\alpha<-1$이면

$f(k-1)f(k+1)<0$인 정수 k 존재 (모순)

ex)



제 2 교시

수학 영역

19. [2024년 수능 (공통) 5번]

다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\ f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅱ 〉 적분

〉 ■ 부정적분 p169

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$

$f(x)=x^3-3x^2+C$ (단 C는 적분상수)

$f(1)=1-3+C=6$

$\therefore\ C=8$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x^2+8$

$\therefore\ f(2)=4$

20. [2024년 수능 (공통) 8번]

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 값은? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20
④ 24 ⑤ 28

[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅱ 〉 적분

〉 ■ 정적분의 성질 (1) p174

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$

$\Leftrightarrow\ (x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$

$\therefore\ f(x)=3x(x^2+x+1)$

$\therefore\ \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{2}(3x^3+3x^2+3x)dx$

$\displaystyle=2\int_{0}^{2}3x^2dx=2\Big[x^3\Big]_0^2=16$

제 2 교시

수학 영역

21. [2024년 수능 (공통) 12번]

함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 t $(0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x\ge t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$

④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

[수학의 단권화 적용 개념]

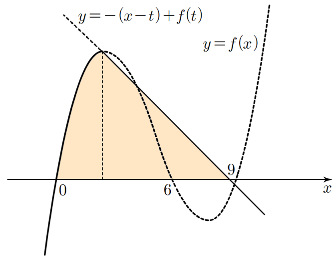
수학Ⅱ 〉 적분

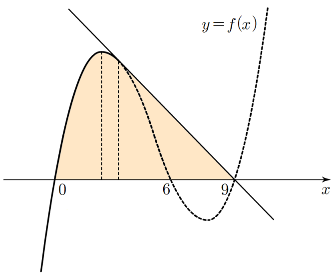
〉 4 정적분의 의미 p172

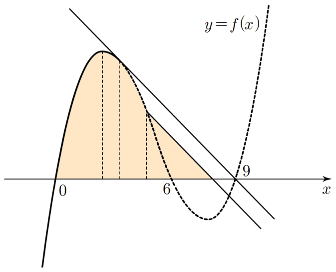
수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

.$y=-(x-t)+f(t)$의 그래프는 기울기가 -1이고 $(t,\ f(t))$를 지나는 직선이다.







함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이가 최대이려면

$y=f(x)$가 $y=-(x-t)+f(t)$에 접해야 한다.

→ $f'(x)=-1$의 근을 찾아야 한다.

$f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)=\frac{1}{9}(x^3-15x^2+54x)$

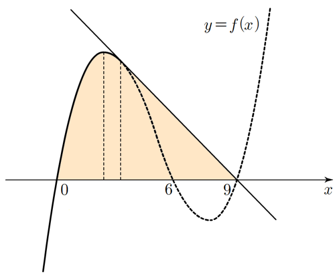
$f'(x)=\frac{1}{9}(3x^2-30x+54)=\frac{1}{3}(x^2-10x+18)=-1$

$\Leftrightarrow\ x^2-10x+21=0$

$\Leftrightarrow\ x=3$ or 7

이중 넓이가 최대일 때 접점의 x좌표는 6보다 작다.

$\therefore\ t=3$



{넓이의 최댓값}

$=\int_0^3 f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(3)\}^2$

$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4-5x^3+27x^2\right]_0^3+\frac{1}{2}\times 6^2$

$=\frac{129}{4}$

제 2 교시

수학 영역

22. [2024년 수능 (공통) 10번]

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5,\ v_2(t)=2t-7$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

[수학의 단권화 적용 개념]

수학Ⅱ 〉 적분

〉 12 직선 위의 운동 p182

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t)=\int_0^t (t^2-6t+5)dt=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t$$

$$x_2(t)=\int_0^t (2t-7)dt=\left[t^2-7t\right]_0^t=t^2-7t$$

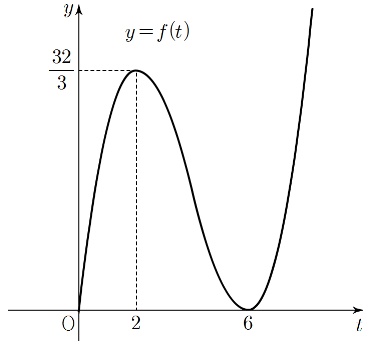
시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\left|\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t-(t^2-7t)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t\right|$$

$f(t)=\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t$라 하면

$$f'(t)=t^2-8t+12=(t-2)(t-6)$$



$\therefore\ a=2,\ b=6$

$\therefore$ 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리

$$\int_2^6 |2t-7|dt$$

$$=\int_2^{\frac{7}{2}}(-2t+7)dt+\int_{\frac{7}{2}}^6(2t-7)dt$$

$$=\left[-t^2+7t\right]_2^{\frac{7}{2}}+\left[t^2-7t\right]_{\frac{7}{2}}^6$$

$$=\frac{17}{2}$$

제 2 교시 수학 영역 (확률과 통계)

확통 경향01

23. [2024년 수능 (확률과 통계) 23번]

5개의 문자 x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 20 ③ 30

④ 40 ⑤ 50

[수학의 단권화 적용 개념]

확통 〉 경우의수

〉 2 같은 것이 있는 순열 p186

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$\frac{5!}{2!2!} = 30$

24. [2024년 수능 (확률과 통계) 29번]

다음 조건을 만족시키는 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

$a \le c \le d$이고 $b \le c \le d$이다.

[수학의 단권화 적용 개념]

확통 〉 경우의수

〉 4 중복조합 p187

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

196

두 조건을 합쳐서 생각하면 a, $b \le c \le d$이므로 c를 기준으로 케이스를 나누자!

ⅰ) $c=1$인 경우 a, $b \le 1 \le d$

▸ $1^2 \times 6$

ⅱ) $c=2$인 경우 a, $b \le 2 \le d$

▸ $2^2 \times 5$

ⅲ) $c=3$인 경우 a, $b \le 3 \le d$

▸ $3^2 \times 4$

ⅳ) $c=4$인 경우 a, $b \le 4 \le d$

▸ $4^2 \times 3$

ⅴ) $c=5$인 경우 a, $b \le 5 \le d$

▸ $5^2 \times 2$

ⅳ) $c=6$인 경우 a, $b \le 6 \le d$

▸ $6^2 \times 1$

$\therefore\ 1^2 \times 6 + 2^2 \times 5 + 3^2 \times 4 + 4^2 \times 3 + 5^2 \times 2 + 6^2 \times 1$
$= 196$

제 2 교시 수학 영역 (확률과 통계)

25. [2024년 수능 (확률과 통계) 25번]
숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{15}$　② $\frac{19}{30}$　③ $\frac{11}{15}$
④ $\frac{5}{6}$　⑤ $\frac{14}{15}$

[수학의 단권화 적용 개념]

확통 〉 확률
〉 3 확률의 덧셈정리 p195

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

6장의 카드를 모두 일렬로 나열하는 방법의 수
▸ 6!
양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10초과하는 경우는 두 수가 5, 6인 경우뿐이다.
▸ 2!4!

$$\therefore\ 1-\frac{2!4!}{6!}=\frac{14}{15}$$

제 2 교시 수학 영역 (확률과 통계)

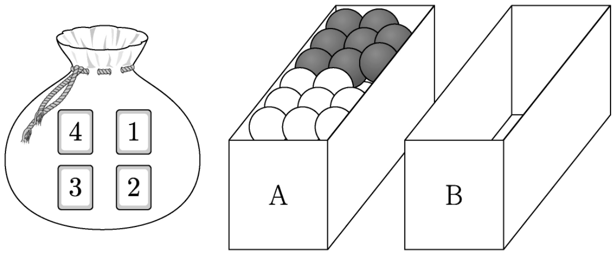
26. [2024년 수능 (확률과 통계) 28번]

하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 이 주머니와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
> 확인한 수가 1이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고,
> 확인한 수가 2 또는 3이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고,
> 확인한 수가 4이면
> 상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$



[수학의 단권화 적용 개념]

확통 〉 확률
〉 4 조건부 확률 p196
〉 7 독립시행의 확률 p197

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

4회 공 개수 합=8
→ 그래서 각각이 얼마인가?
→ 케이스를 나누는 것이 핵심!

카드 1 → 확률 $\frac{1}{4}$ → 공 1개 ○

카드 2 3 → 확률 $\frac{2}{4}$ → 공 2개 ○●

카드 4 → 확률 $\frac{1}{4}$ → 공 3개 ○○●

8=3+3+1+1
=3+2+2+1
=2+2+2+2

ⅰ) 8=3+3+1+1 → 검은공● 2개

[○○●]+[○○●]+[○]+[○]

▸ $\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2$

ⅱ) 8=3+2+2+1 → 검은공● 3개

[○○●]+[○●]+[○●]+[○]

▸ $\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2$

ⅲ) 8=2+2+2+2 → 검은공● 4개

[○●]+[○●]+[○●]+[○●]

▸ $\left(\frac{2}{4}\right)^4$

$$\therefore \frac{\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{4}\right)^4}=\frac{3}{35}$$

제 2 교시 수학 영역 (확률과 통계)

27. [2024년 수능 (확률과 통계) 24번]
두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

[수학의 단권화 적용 개념]

확통 〉 확률
〉 5 사건의 독립과 종속 p197

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

전체 개수가 24라고 예를 들어 풀어보자.

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$이므로

	A	A^c	합계
B	6		
B^c			
합계	8	16	24

[스킬] 독립이면 가로줄끼리 & 세로줄끼리 비율이 같다.

	A	A^c	합계
B	6	12	18
B^c			
합계	8	16	24

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

[다른 풀이]

$\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$에서

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

제 2 교시 수학 영역 (확률과 통계)

28. [2024년 수능 (확률과 통계) 26번]

4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하고, 이산확률변수 Y를

$$Y=\begin{cases} X & (X\text{가 } 0 \text{ 또는 } 1\text{의 값을 가지는 경우}) \\ 2 & (X\text{가 } 2 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

라 하자. $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{16}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{27}{16}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{29}{16}$

[수학의 단권화 적용 개념]

확통 〉 통계

〉 6 이항분포 p201

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^4$

X	0	1	2	3	4
P(X=x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

↓

Y	0	1	2
P(Y=y)	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}$

$$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{4}{16}+2\times\left(\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}\right)$$

$$=\frac{13}{8}$$

제 2 교시

수학 영역 (확률과 통계)

29. [2024년 수능 (확률과 통계) 30번]

양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1,\ t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \le 5t) \ge \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여

$\mathrm{P}(t^2 - t + 1 \le X \le t^2 + t + 1)$의 최댓값을 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

[수학의 단권화 적용 개념]

확통 〉 통계

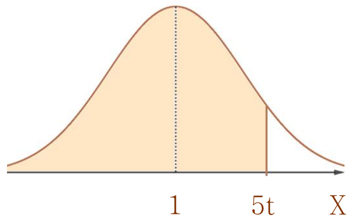
〉 10 표준정규분포 p204

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

673

$\mathrm{P}(X \le 5t) \ge \frac{1}{2}$



$\therefore\ 5t \ge 1,\ t \ge \frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(t^2 - t + 1 \le X \le t^2 + t + 1)$

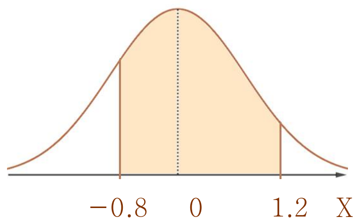
$= \mathrm{P}(t - 1 \le Z \le t + 1)$

구간의 평균값 $\frac{(t-1)+(t+1)}{2} = t$가

표준정규분포의 평균값 0에 가까울수록

$\mathrm{P}(t-1 \le Z \le t+1)$의 확률값이 커진다.

$\therefore\ t = \frac{1}{5}$일 때 최대



$\mathrm{P}(-0.8 \le Z \le 1.2)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.8) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.2)$

$= 0.288 + 0.385 = 0.673$

$\therefore\ k = 0.673$

$\therefore\ 1000 \times k = 673$

제 2 교시 수학 영역 (확률과 통계)

30. [2024년 수능 (확률과 통계) 27번]

정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ 5^2\right)$을 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{6}{5}a$이다. $\overline{x}$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 15.2 ② 15.4 ③ 15.6
④ 15.8 ⑤ 16.0

[수학의 단권화 적용 개념]

확통 〉 통계
〉 15 모평균의 추정 p208

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x} - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{49}} \le m \le \overline{x} + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{49}}$$

$$\Leftrightarrow\ \overline{x} - \frac{7}{5} \le m \le \overline{x} + \frac{7}{5}$$

$$\therefore\ a = \overline{x} - \frac{7}{5},\ \frac{6}{5}a = \overline{x} + \frac{7}{5}$$

$$\therefore\ \frac{6}{5}\left(\overline{x} - \frac{7}{5}\right) = \overline{x} + \frac{7}{5}$$

$$\therefore\ \overline{x} = 15.4$$

제 2 교시　수학 영역 (확률과 통계)

31. [2024년 수능 (미적분) 29번] 대표 문항

첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

[수학의 단권화 적용 개념]

미적 〉 수열극한

〉 10 등비급수 p218

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

162

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공비를 r_1,
등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b_1, 공비를 r_2라 하자.
수열 $\{a_n b_n\}$은 첫째항이 $a_1 b_1$, 공비가 $r_1 r_2$인 등비수열이다.
수열 $\{|a_{2n}|\}$은 첫째항이 $|a_1 r_1|$, 공비가 $r_1{}^2$인 등비수열이고,
수열 $\{|a_{3n}|\}$은 첫째항이 $|a_1 r_1{}^2|$, 공비가 $|r_1{}^3|$인 등비수열이다.

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하므로

$-1 < r_1 < 1$, $-1 < r_2 < 1$

$\therefore\ -1 < r_1 r_2 < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 b_1}{1-r_1 r_2} = \frac{a_1}{1-r_1} \times \frac{b_1}{1-r_2}$$

$\therefore\ r_1 + r_2 = 2 r_1 r_2$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

$$\Leftrightarrow \frac{3|a_1 r_1|}{1-r_1{}^2} = \frac{7|a_1 r_1{}^2|}{1-|r_1{}^3|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{1-r_1{}^2} = \frac{7|r_1|}{1-|r_1{}^3|}$$

i) $r_1 > 0$인 경우

$$\frac{3}{1-r_1{}^2} = \frac{7r_1}{1-r_1{}^3}$$

$\Leftrightarrow 3 - 3r_1{}^3 = 7r_1 - 7r_1{}^3$

$\Leftrightarrow (2r_1+3)(2r_1-1)(r_1-1) = 0$

$\therefore\ r_1 = \dfrac{1}{2}$ ($\because\ -1 < r_1 < 1$)

$r_1 + r_2 = 2r_1 r_2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} + r_2 = 2 \times \dfrac{1}{2} \times r_2$ 모순

ii) $r_1 < 0$일 때

$$\frac{3}{1-r_1{}^2} = \frac{-7r_1}{1+r_1{}^3}$$

$\Leftrightarrow 3 + 3r_1{}^3 = -7r_1 + 7r_1{}^3$

$\Leftrightarrow (2r_1-3)(2r_1+1)(r_1+1) = 0$

$\therefore\ r_1 = -\dfrac{1}{2}$ ($\because\ -1 < r_1 < 1$)

$r_1 + r_2 = 2r_1 r_2$

$\Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{2}\right) + r_2 = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) r_2$

$\therefore\ r_2 = \dfrac{1}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_1\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}^{n-1} + b_1\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^3\right\}^n}{b_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{60} = \frac{27}{20}$$

$\therefore\ 120S = 120 \times \dfrac{27}{20} = 162$

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

32. [2024년 수능 (미적분) 23번]

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $\dfrac{3}{5}$

④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ 1

[수학의 단권화 적용 개념]

미적 〉 여러함수미분

〉 3 자연로그의 극한 p220

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}}{\dfrac{\ln(1+5x)}{5x}} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

33. [2024년 수능 (미적분) 24번]

매개변수 t $(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x = \ln(t^3+1),\ y = \sin \pi t$$

에서 $t=1$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{1}{3}\pi$ ② $-\dfrac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$

④ $-\dfrac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\dfrac{5}{3}\pi$

[수학의 단권화 적용 개념]

미적 〉 미분

〉 3 합성함수의 미분법 p231

〉 9 매개변수 미분법 p236

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\pi \cos \pi t}{\dfrac{3t^2}{t^3+1}} = \frac{\pi(t^3+1)\cos \pi t}{3t^2}$$

$t=1$을 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\pi}{3}$$

34. [2024년 수능 (미적분) 27번] 대표 문항

실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y = \dfrac{1}{e^x} + e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자.

$f(a) = -e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\dfrac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\dfrac{2}{3}e\sqrt{e}$

④ $-\dfrac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

[수학의 단권화 적용 개념]

미적 〉 미분

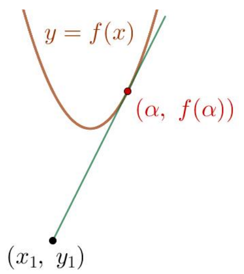
〉 3 합성함수의 미분법 p231

Analysis

외부의 점 $(x_1,\ y_1)$에서 곡선 $y = f(x)$에 접선을 그을 때

접점이 $(\alpha,\ f(\alpha))$라고 하면

$$f'(\alpha) = \frac{f(\alpha) - y_1}{\alpha - x_1}$$



※ 접선 $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$에 $(x_1,\ y_1)$를 대입한 식과 동일하다.

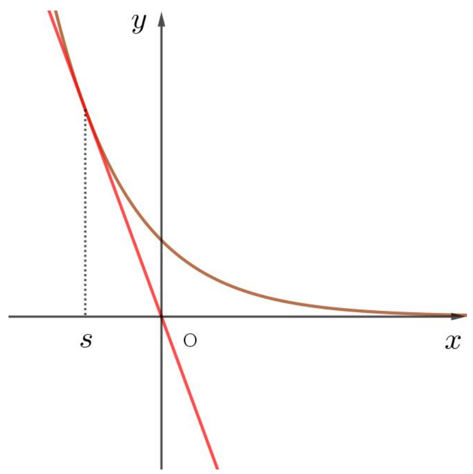
제 2 교시

수학 영역 (미적분)

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

접점의 좌표를 s라고 하자.
☆ 변수 상수 관계 파악
x변수 → t, s 상수
t변수(x는 소거된 상태) → s 변수

(step1) x가 변수인 상황



$g(x)=\dfrac{1}{e^x}+e^t=e^{-x}+e^t$라고 하자.
x를 변수로 보고 미분하면
$g'(x)=-e^{-x}$
$f(t)=g'(s)=\dfrac{g(s)-0}{s-0}$
$f(t)=-e^{-s}=\dfrac{e^{-s}+e^t}{s}$

(step2) t가 변수인 상황
$f(t)=-e^{-s}$를 t를 변수로 보고 미분 → s는 변수
$f'(t)=e^{-s}\dfrac{ds}{dt}$
$\therefore$ $t=a$일 때 s와 $\dfrac{ds}{dt}$를 구해야 한다!

(step3) $t=a$일 때 s 구하기
$f(t)=-e^{-s}=\dfrac{e^{-s}+e^t}{s}$
$t=a$ 대입
$f(a)=-e\sqrt{e}=-e^{\frac{3}{2}}$
$\therefore$ $t=a$일 때 $s=-\dfrac{3}{2}$
$f(a)=-e^{\frac{3}{2}}=\dfrac{e^{\frac{3}{2}}+e^a}{-\frac{3}{2}}$
$\therefore$ $e^a=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$

(step4) $t=a$일 때 $\dfrac{ds}{dt}$ 구하기
$-e^{-s}=\dfrac{e^{-s}+e^t}{s}$
$\Leftrightarrow$ $(1+s)e^{-s}+e^t=0$
t를 변수로 보고 미분 → s는 변수
$\{e^{-s}+(1+s)e^{-s}(-1)\}\dfrac{ds}{dt}+e^t=0$
$t=a$ $\Leftrightarrow$ $s=-\dfrac{3}{2}$를 대입
$\left\{e^{\frac{3}{2}}+\left(1-\dfrac{3}{2}\right)e^{\frac{3}{2}}(-1)\right\}\dfrac{ds}{dt}+e^a=0$
$\Leftrightarrow$ $\dfrac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}\dfrac{ds}{dt}+\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}=0$
$\therefore$ $t=a$일 때 $\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{1}{3}$

$f'(t)=e^{-s}\dfrac{ds}{dt}$에 $t=a$를 대입하면
$f'(a)=e^{\frac{3}{2}}\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}e\sqrt{e}$

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

35. [2024년 수능 (미적분) 25번]
양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다. 모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44
④ 48 ⑤ 52

[수학의 단권화 적용 개념]

미적 〉 미분
〉 8 역함수의 미분법 p235
미적 〉 적분
〉 2 치환적분법 p246

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

함수 $g(x)$의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이므로
$g(x)$의 역함수 $f(x)$치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
$\therefore\ f(x)>0$

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로
$g(f(x))=x$
$\therefore\ g'(f(x))f'(x)=1$

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx$$
$$=\int_1^a \frac{f'(x)}{g'(f(x))f'(x)\times f(x)}dx$$
$$=\int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \Big[\ln|f(x)|\Big]_1^a$$
$$=\ln|f(a)|-\ln|f(1)|$$
$$=\ln f(a)-\ln 8$$

$\therefore\ \ln f(a)-\ln 8 = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$
$\therefore\ f(a)=4a^2(a+1)$
$\therefore\ f(2)=4\times 2^2\times(2+1)=48$

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

36. [2024년 수능 (미적분) 28번] 대표 문항

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이고, $x < 0$일 때 $f(x) = -4xe^{4x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.

두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$$2g(t) + h(t) = k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)dx = e^4 - 1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$

④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

[수학의 단권화 적용 개념]

미적 〉 적분 〉 2 치환적분법 p246

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

$x < 0$에서

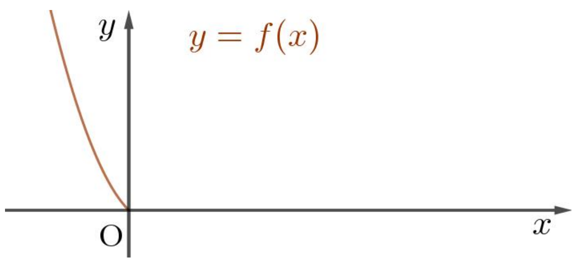
$f(x) = -4xe^{4x^2}$

$\therefore f(0) = 0$

$f'(x) = -4e^{4x^2} - 32x^2e^{4x^2} = -4e^{4x^2}(1 + 8x^2)$

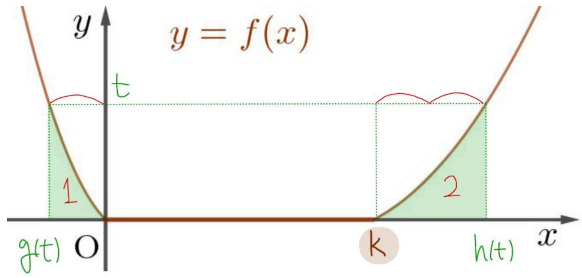
$\therefore f'(x) < 0$

$x < 0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.



$2g(t) + h(t) = k$인 상수이므로

$f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



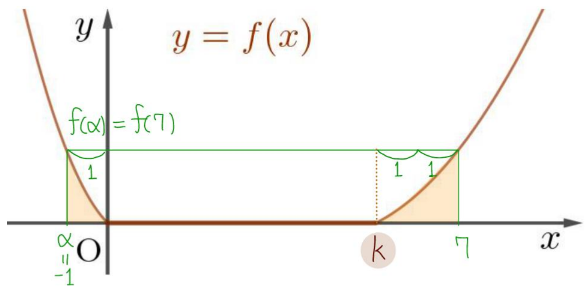
위의 두 넓이비는 1:2이다.

$f(\alpha) = f(7)$인 α에 대하여 (단, $\alpha < 0$)

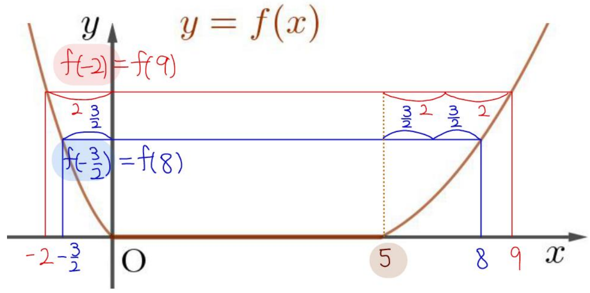
$$\int_\alpha^0 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^7 f(x)dx = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \int_\alpha^0 -4xe^{4x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{4x^2}\right]_\alpha^0 = -\frac{1}{2}(1 - e^{4\alpha^2})$$

$\therefore \alpha = -1$



$\therefore k = 5$



$$\therefore \frac{f(9)}{f(8)} = \frac{f(-2)}{f\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{-4(-2)e^{4\cdot 4}}{-4\left(-\frac{3}{2}\right)e^{4\cdot\frac{9}{4}}} = \frac{4}{3}e^7$$

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

37. [2024년 수능 (미적분) 30번] 대표 문항

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=|\sin x|\cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

[수학의 단권화 적용 개념]

미적 〉 미분

〉 ⑫ 곡선의 오목과 볼록 p238

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

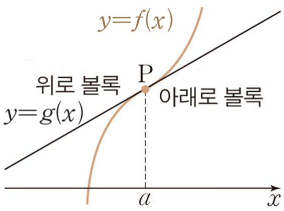
125

$$h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$$

$h'(x)=f(x)-g(x)$

$h(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로 $x=a$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

→ $x=a$ 좌우에서 $f(x)$와 $g(x)$의 대소관계가 바뀌어야 한다.



∴ $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식이므로 $x=a$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌려면 점 $(a, f(a))$는 함수 $f(x)$의 변곡점이어야 한다.

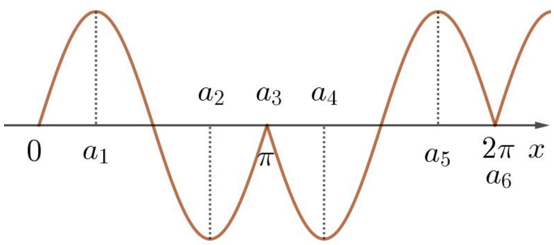
[개념]

$f(x)$가 $x=a$에서 변곡점을 가질 때 $f'(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

$f'(x)=|\sin x|\cos x$

$$=\begin{cases} \sin x\cos x & (\sin x \geq 0) \\ -\sin x\cos x & (\sin x < 0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin 2x & (\sin x \geq 0) \\ -\frac{1}{2}\sin 2x & (\sin x < 0) \end{cases}$$



$$\therefore \frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)=\frac{100}{\pi}\left(2\pi-\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$=\frac{100}{\pi}\times\frac{5}{4}\pi$$

$$=125$$

Analysis

$f(x)$ 변곡점이라고 하면 이계도함수 $f''(x)$부터 계산하려고 드는 건 개념을 어설프게 공부했다는 반증이다.

$f(x)$가 변곡점을 갖는 것과 더 직접적인 관계가 있는 건 $f'(x)$이다.

변곡점: 곡선의 오목과 볼록이 바뀌는 지점.

함수 $f(x)$가 $(a, f(a))$에서 변곡점을 가질 때, $x=a$ 근방에서

$f'(x)$: $x=a$ 좌우에서 증가와 감소가 바뀐다.

⇔ $x=a$에서 $f'(x)$가 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

$f''(x)$: $x=a$의 좌우에서 부호가 바뀐다.

제 2 교시

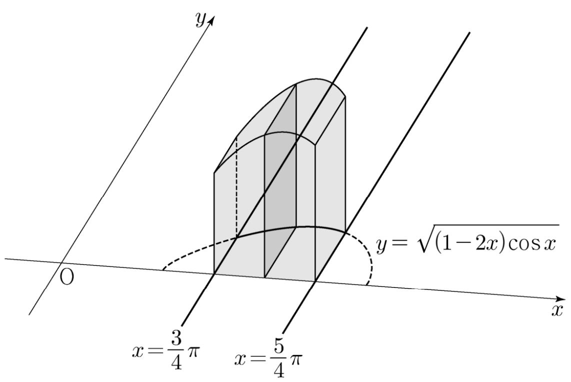
수학 영역 (미적분)

38. [2024년 수능 (미적분) 26번] 대표 문항

그림과 같이 곡선

$$y=\sqrt{(1-2x)\cos x}\ \left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$$

와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$ ③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi-1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

[수학의 단권화 적용 개념]

미적 〉 적분
〉 Ⅲ 입체도형의 부피 p256

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

입체도형의 부피는

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} S(x)dx$$

$$=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(1-2x)\cos x\,dx$$

$$=\Big[(1-2x)\sin x\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}2\sin x\,dx$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{5}{2}\pi\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{3}{2}\pi\right)-2\Big[\cos x\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$=2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$$

제 2 교시

수학 영역 (기하)

39. [2024년 수능 (기하) 27번]

초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 BF와 포물선이 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{BC}=\overline{CD}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는? (단, $\overline{CF}<\overline{DF}$이고, 점 A는 원점이 아니다.) [3점]

① $100\sqrt{2}$ ② $104\sqrt{2}$ ③ $108\sqrt{2}$
④ $112\sqrt{2}$ ⑤ $116\sqrt{2}$

[수학의 단권화 적용 개념]

기하 〉 이차곡선
〉 1 포물선의 뜻 p264, 265

40. [2024년 수능 (기하) 29번]

양수 c에 대하여 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위에 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점 P, Q가 존재하도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 점 P는 제1사분면 위에 있고, 점 Q는 직선 PF′ 위에 있다.
(나) 삼각형 PF′F는 이등변삼각형이다.
(다) 삼각형 PQF의 둘레의 길이는 28이다.

[수학의 단권화 적용 개념]

기하 〉 이차곡선〉 5 쌍곡선의 뜻 p268

41. [2024년 수능 (기하) 24번]

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(\sqrt{3}, -2)$에서의 접선의 기울기는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

[수학의 단권화 적용 개념]

기하 〉 이차곡선
〉 9 타원과 접선의 방정식 p272

42. [2024년 수능 (기하) 30번]

좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 1:3으로 내분하는 점을 E, 선분 CA를 1:3으로 내분하는 점을 F라 하자. 네 점 P, Q, R, X가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{DP}|=|\overrightarrow{EQ}|=|\overrightarrow{FR}|=1$
(나) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{RA}$

$|\overrightarrow{AX}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하자. $16S^2$의 값을 구하시오. [4점]

[수학의 단권화 적용 개념]

기하 〉 벡터
〉 2 벡터의 덧셈과 뺄셈 p277
〉 5 내분점과 외분점의 위치벡터 p280

제 2 교시

수학 영역 (기하)

43. [2024년 수능 (기하) 25번]

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$|\vec{a}| = \sqrt{11},\ |\vec{b}| = 3,\ |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$$

일 때, $|\vec{a} - \vec{b}|$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

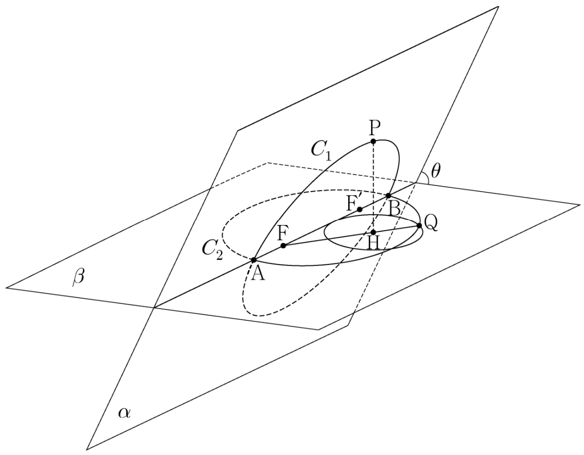
[수학의 단권화 적용 개념]

기하 〉 벡터

〉 9 벡터의 내적 p284

44. [2024년 수능 (기하) 28번]

그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 $\overline{AB} = 18$인 두 점 A, B가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1이 평면 α 위에 있고, 선분 AB를 장축으로 하고 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 C_2가 평면 β 위에 있다. 원 C_1 위의 한 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{HF'} < \overline{HF}$이고 $\angle HFF' = \frac{\pi}{6}$이다. 직선 HF와 타원 C_2가 만나는 점 중 점 H와 가까운 점을 Q라 하면, $\overline{FH} < \overline{FQ}$이다. 점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원은 반지름의 길이가 4이고 직선 AB에 접한다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 P는 평면 β 위에 있지 않다.) [4점]



① $\frac{2\sqrt{66}}{33}$ ② $\frac{4\sqrt{69}}{69}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

④ $\frac{4\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{78}}{39}$

[수학의 단권화 적용 개념]

기하 〉 공간도형

〉 5 삼수선의 정리 p292

〉 7 정사영 p294

제 2 교시

수학 영역 (기하)

45. [2024년 수능 (기하) 26번]
좌표공간에 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때,

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B'}}=6$$

이다. 선분 AB의 중점 M의 평면 α 위로의 정사영을 M′이라 할 때,

$$\overline{\mathrm{PM'}}\perp\overline{\mathrm{A'B'}},\ \overline{\mathrm{PM'}}=6$$

이 되도록 평면 α 위에 점 P를 잡는다.
삼각형 A′B′P의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 선분 PM의 길이는? [3점]

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

[수학의 단권화 적용 개념]

기하 〉 공간도형
〉 5 삼수선의 정리 p292
〉 7 정사영 p294

46. [2024년 수능 (기하) 23번]
좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ -2,\ 6)$, $\mathrm{B}(9,\ 2,\ b)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(4,\ 0,\ 7)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[수학의 단권화 적용 개념]

기하 〉 공간도형
〉 10 선분의 내분점과 외분점 p297