1 권장 독자

1등급과 2등급 사이에서 변동이 있는 학생 또는 시간단축을 통하여 고정 100점을 원하는 학생

2 문제

함수 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 와 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = e^{af(x)} + bf(x) \qquad (0 < x < 12)$$

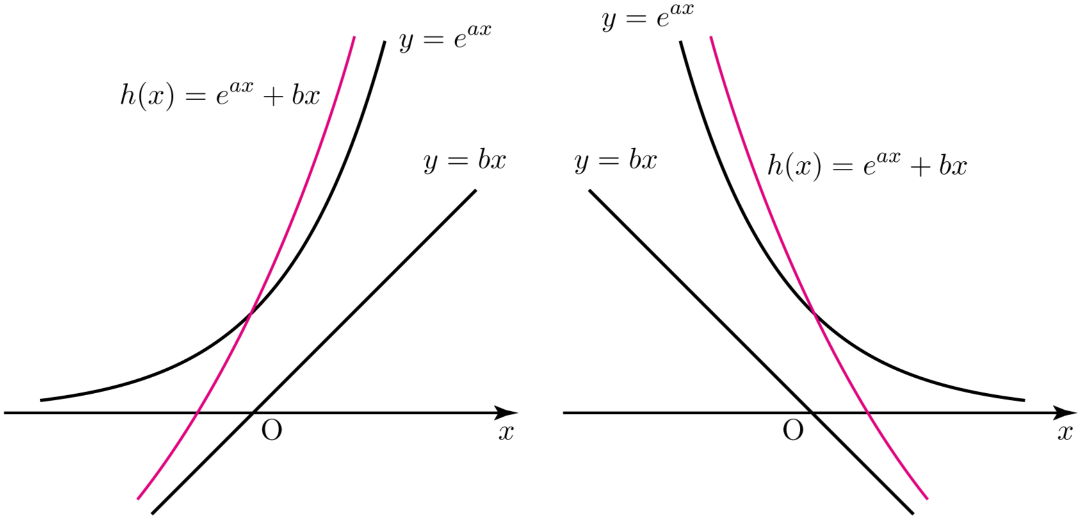
라 하자. 함수 $g(x)$가 $x = \alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, $\alpha_3, \cdots$, α_m (m은 자연수)라 할 때, m 이하의 자연수 n에 대하여 α_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) n이 홀수일 때, $\alpha_n = n$이다.
(나) n이 짝수일 때, $g(\alpha_n) = 0$이다.

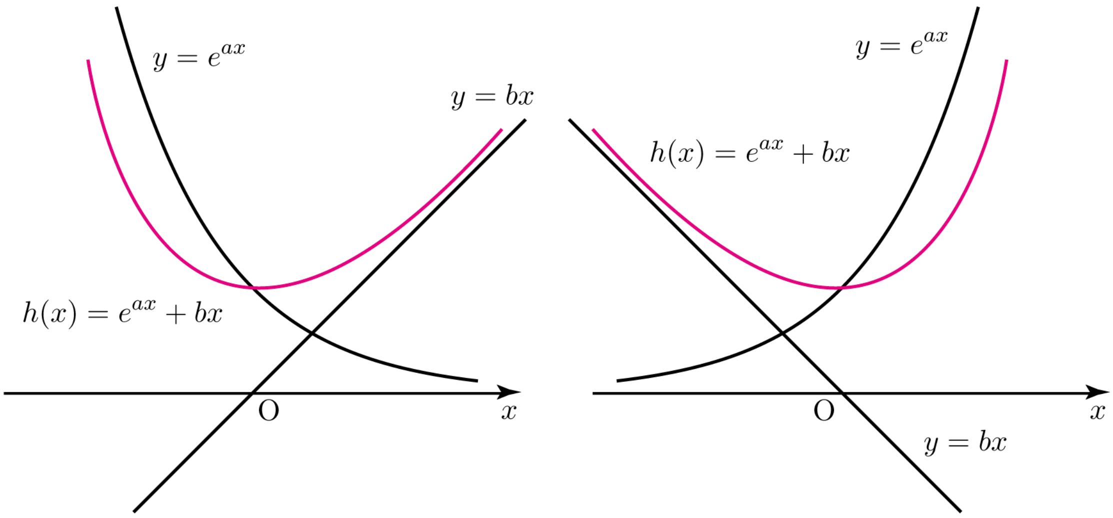
함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 $e^3 + e^{-3}$일 때,
$m\pi \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} g(x) \cos\frac{\pi}{2}x dx = pe^3 + qe$이다. $p - q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 정수이다.)

3 해설

문제를 차분히 들여다보면 $h(x) = e^{ax} + bx$라 하면 문제에서 구하고자 하는 $g(x) = h(f(x))$로 표현할 수 있음을 알 수 있다. 그러나 문제점은 a와 b의 부호를 아직 알지 못한다는 것이다. 여기서 우리는 a, b의 부호에 따라 $h(x)$의 그래프의 개형을 케이스 분류해야 한다는 것을 인지해야한다. 다음으로는 발문에서 $x = \alpha_i$ (i는 정수)에서 극값을 가지므로 조건 (나)에서 $g(\alpha_2)$, $g(\alpha_4)$, $\cdots = 0$임을 통해 함수 $g(x)$는 0을 극값으로 가질 수 있다는 것을 파악해야한다. 또한 n이 홀수일 때, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = 3$, $\cdots$ 라는 정보는 아직 명확히 판단이 되지 않는다. 이제 함수 $g(x)$는 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖는다는 것과 그 합이 $e^3 + e^{-3}$이라는 것까지 인지한 상태에서 시작하자. 함수 $h(x)$의 a와 b의 부호가 같을 때 그래프의 개형은 다음과 같다.



또한 $h(x)$의 그래프 중 a와 b의 부호가 다를 때는 다음과 같다.

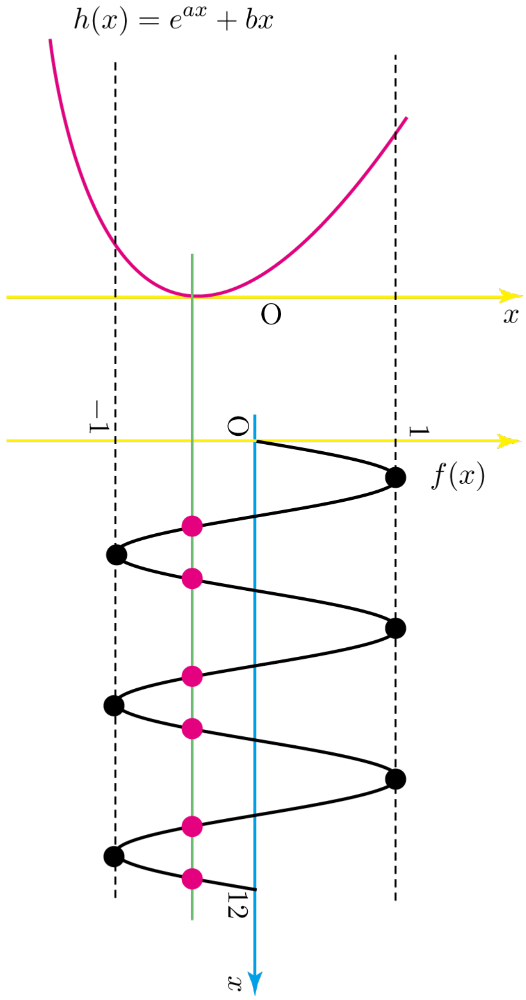


$a < 0, b > 0$

$a > 0, b < 0$

출제자의 입장에서 생각을 해보면 a와 b의 부호가 같은 저러한 심심한 상황은 출제를 하지 않을 것이라 굳게 믿고[1] 이제 $h(x)$에 함성함수를 그려보자.

[1]당연히 부호가 같은 상황 그리고 $a = 0$ 또는 $b = 0$인 상황도 공부하자.



상황은 위와 같다. $g(x)$의 정의역은 하늘색 x축과 같다.
이때, 정의역이 $0 < x < 12$이고 하늘색 축을 따라 $f(x)$의 값은 $-1 \leq f(x) \leq 1$이 된다. 따라서 $g(x) = h(f(x))$에서 h의 정의역이 노란색 y축이 된다. 따라서 h의 정의역은 $-1 \leq f(x) \leq 1$이 되는 것이다. 이때, 검은색 점들이 바로 극댓값을 갖는 α_i이며, 자홍색 점들이 바로 극솟값을 갖는 α_i이다.

4 수식적 해석

여기에서 수식적인 해석 또한 필요하다. α_{2n} (n은 자연수)에 대하여

$$h\left(f\left(\alpha_{2n}\right)\right) = 0$$

이고,

$$h'\left(f\left(\alpha_{2n}\right)\right) = 0$$

이다. 따라서 $f\left(\alpha_{2n}\right) = k$라 하면

$$h\left(f\left(\alpha_{2n}\right)\right) = 0, \qquad e^{ak} + bk = 0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이고,

$$h'\left(f\left(\alpha_{2n}\right)\right)=0, \qquad ae^{ak}+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

에서 이므로 ㉠, ㉡을 연립하면 $b(1-ak)=0$이다. 따라서 $k=\frac{1}{a}$임을 알 수 있고, $a>0$이라면 함수 $g(x)$는 $x=\alpha_2=1$, $x=\alpha_4=2, \cdots$에서 극댓값을 갖게 되므로 조건 (가), (나)를 동시에 만족시키지 않는다. 따라서 $a<0$이고

$$h\left(f\left(\alpha_1\right)\right)=h(f(1))=h(1)=e^a+b$$
$$h\left(f\left(\alpha_3\right)\right)=h(f(3))=h(-1)=e^{-a}-b$$

가 각각 극댓값이므로 $e^a+e^{-a}=e^3+e^{-3}$에서 $a=-3$임을 알 수 있다.[2] $k=\frac{1}{a}$이므로 $k=-\frac{1}{3}$이다. 따라서 $e^{ak}+bk=0$에 대입하면 $e-\frac{1}{3}b=0$이므로 $b=3e$이다. 이후의 치환적분은 계산영역에 속하므로 생략한다.

5 의의

풀이에서 알 수 있겠지만, $h(x)$를 그리는 과정과 이에 $f(x)$를 합성시키는 과정, 그리고 a, b의 부호에 따른 합성함수 그래프의 개형 추론을 능숙하게 해내는 학생들은 이 풀이를 통해 꽤 많은 시간을 단축시킬 수 있다. 그러나 능숙하지 않은 학생들이 이러한 풀이방법을 먼저 익히는 것은 지양했으면 좋겠다.

[2] 엄밀하게는 $y=e^x+e^{-x}$의 그래프가 증가함수임을 밝히면 된다.