

두 곡선 $y = 2^x$ 과 $y = -2x^2 + 2$ 가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자.

$x_1 < x_2$ 일 때 $_{(1)}$, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$ $_{(2)}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$ $_{(3)}$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$ $_{(4)}$

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

• 풀이란

• 사고방향

(1). 그래프를 그리며 상황을 구체화하여 이해한다.

$y=2^x$ 는 교과서에서 강조하는 대로 (0,1)을 지나도록 그리고,

$y=-2x^2+2$ 는 대칭축에 유의하여 그린다.

‘만나는 두 점 (교점)’의 의미 : 그래프 상에서 점의 위치가 정확하게 정해진다.

⇒ 두 함수의 관계식을 모두 만족시키는 특수성 때문에 점의 위치가 정해진다.

⇒ 반드시 함수식에 의한 x, y 의 관계식을 2개 모두 사용해야 한다.

TIP: 수학 (가)형에서 다항함수를 소재로 하여 출제를 할 때, 이차함수는 대칭성

$y=x$ 나 $y=-x$ 는 역함수 대칭관계 및 직각이등변삼각형을 만드는 보조선을

주요소재로 사용합니다. 암기사항이 아닌 기출분석을 통해 이미 체화된 사항.

(2). 수능수학에서 대소비교가 가지는 의미 = 기하적으로 해석하시오.

⇒ 실전에 사용할 알고리즘 = 비교대상을 그래프에서 찾아라.

x 좌표 $\frac{1}{2}$ 을 찾아라. 비슷한 다른 값은 안 된다. 오로지 딱 $\frac{1}{2}$

직선 $x=\frac{1}{2}$ 를 그어준다.

(3). 그래프 해석(기하적해석)으로 문제를 풀어나가는 중

대표적인 대소비교대상 1. 기울기 2. 넓이 3. 좌표 (근거: 기출문항)

$y_2 - y_1 < x_2 - x_1$ 를 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1$ 로 변형 (근거: 기출문항)

⇒ 실전에 사용할 알고리즘 = 비교대상을 그래프에서 찾아라.

기울기 1을 찾아라. 비슷한 다른 값은 안 된다. 오로지 딱 1을 찾아라.

(4). $\neg$, $\cup$ 을 풀이하는 과정에서 얻은 것과 연결지어본다.

$y_1 y_2$ 가 갖는 의미를 찾는다.

$\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$ 에 대하여 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 1을 찾는다. (비교대상 의미파악)

$\neg$ 에서 x 좌표와 비교하기 위해 x 좌표 $\frac{1}{2}$ 을 찾고

$\cup$ 에서 기울기와 비교하기 위해 기울기 1을 찾듯

$y_1 y_2$ 와 비교하기 위해 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 1을 찾더라도 $y_1 y_2$ 와 같은 속성인 것을 찾는다.

직선 $y=2-x$ 가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, ⁽¹⁾ <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[4점] [2008학년도 수능 가나16]

[보 기]

ㄱ. $x_1 > y_{2(2)}$

ㄴ. $x_2 - x_1 = y_1 - y_{2(3)}$

ㄷ. $x_1 y_1 > x_2 y_{2(4)}$

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답을 구하기는 쉬우나 과정을 연결하기 어려운 문제입니다.

ㄱ과 ㄷ을 반드시 연결하여 풀어봅시다.

• 풀이란

• 사고방향

(1). 그래프를 그리며 상황을 구체화하여 이해한다.

$y = \log_2 x$ 와 $y = \log_3 x$ 는 교과서에서 강조하는 대로 대소 관계가 명확하게 그리고, $y = 2 - x$ 와 같은 기울기가 -1 인 직선은 역함수 대칭관계 및 직각이등변삼각형을 만드는 보조선을 주요소재로 사용합니다. (근거: 기출문항)
이는 암기사항이 아닌 기출분석을 통해 이미 체화된 사항.

(2). 수능수학에서 대소비교가 가지는 의미 = 기하적으로 해석하시오.

⇒ 실전에 사용할 알고리즘 = 비교대상을 그래프에서 찾아라.

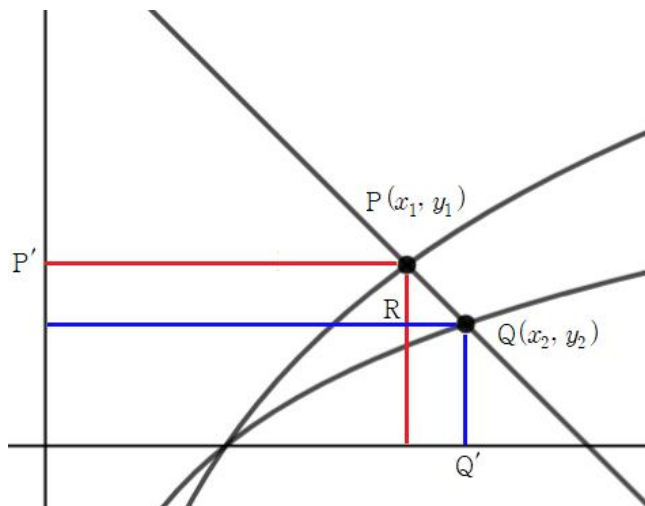
비교대상의 속성이 일치해야한다. ⇒ x 좌표 또는 y 좌표로 통일하자.

(3). $\neg$ 을 풀이하는 과정에서 얻은 것을 이용한다. $y_1 = 2 - x_1$, $y_2 = 2 - x_2$

(4). $\neg$, $\neg$ 을 풀이하는 과정에서 얻은 것과 연결지어본다.

그래프 해석(기하적해석)으로 문제를 풀어나가는 중
대표적인 대소비교대상 $x_1 y_1$ 가 갖는 의미를 찾는다.

가로와 세로의 길이가 각각 x_1, y_1 인 직사각형의 넓이로 해석한다.



두 직사각형의 넓이를 비교할 때, 겹치는 부분의 넓이를 제외하고 남은 나머지 직사각형의 넓이만 비교하면 된다.

$\overline{PP'} \times \overline{PR}$, $\overline{QQ'} \times \overline{QR}$ 를 비교할 때,

기울기가 -1 인 직선에 의해 삼각형

PRQ 는 직각 이등변삼각형이고

$\overline{PR} = \overline{QR}$ 이므로 $\neg$ 선지를

$\overline{PP'}$ 과 $\overline{QQ'}$ 만 비교하여 판단할 수 있다.

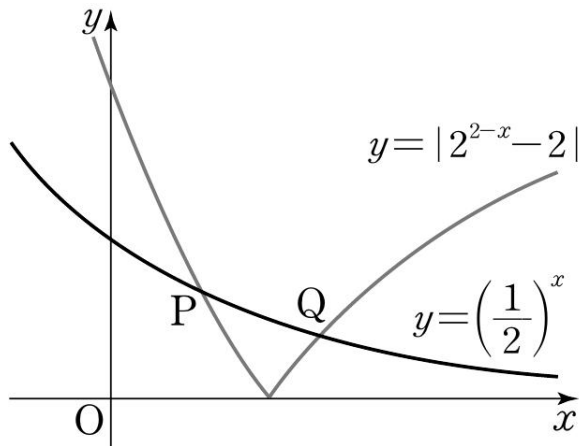
이때, $\overline{PP'}$ 는 x_1 , $\overline{QQ'}$ 는 y_2 이므로 $\neg$ 선지를 $x_1 > y_2$ 를 묻는 것이고 이는 $\neg$ 과 동일하다.

물론 이게 유일한 풀이방법은 아니며 '만나는 두 점 (교점)'의 의미를 통해

⇒ 반드시 함수식에 의한 x, y 의 관계식을 2개 모두 사용해야 한다.

를 통한 해석도 가능하다.

그림과 같이 두 곡선 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = |2^{2-x} - 2|$ 가 만나는 두 점을 각각 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 라 하자. (1) <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
 $(x_1 < x_2)$ (수특 35. Level3)



< 보 기 >

ㄱ. $x_1 < 1 < x_2$ (2)

ㄴ. $y_2 > \frac{1}{2}$ (3)

ㄷ. $x_1 > \frac{1}{2}$ (4)

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

• 사고방향

(1). 교점의 의미: 앞에서 설명한 내용. 스스로 생각해 봅시다.

⇒ 반드시 함수식에 의한 x, y 의 관계식을 2개 모두 사용해야 한다.

(2). 대소비교선지 : 그래프에서 기하적으로 판단하라.

비교대상의 의미파악: x 좌표 1을 찾아라.

x 좌표가 1인 점을 찾거나 직선 $x=1$ 을 그린다.

(3). $\neg$ 선지 판단과 마찬가지로. y 좌표가 $\frac{1}{2}$ 인 점을 찾거나 직선 $y=\frac{1}{2}$ 을 그린다.

(4). 지금까지와 같음. 직선 $x=\frac{1}{2}$ 을 그립니다.

직선 $y = -x + 2$ 가 두 함수 $y = a^x (a > 1)$, $y = \log_2 x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

— <보 기> —

- ㄱ. $a = 2$ 일 때, $x_1 = y_2$ 이다.
 ㄴ. $a > 2$ 이면, $x_1 + x_2 < 2$ 이다.
 ㄷ. $a > 2$ 이면, $\frac{y_1}{x_2} > \frac{y_2}{x_1}$ 이다.

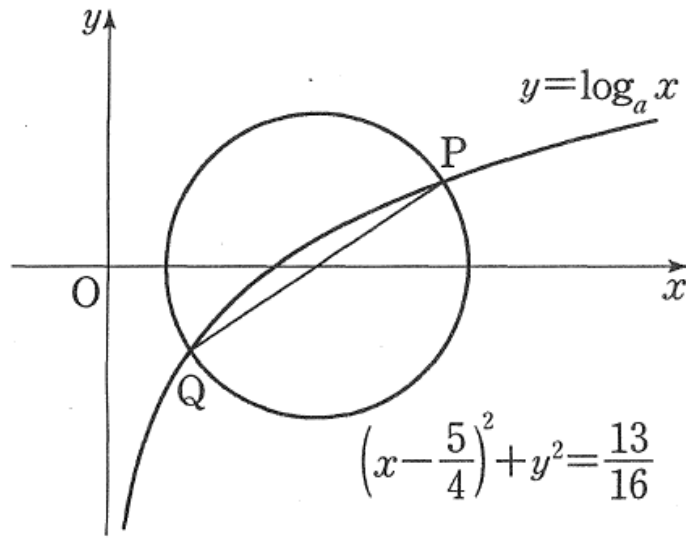
- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 곡선 $y = \log_a x$ 와

원 $C: \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{13}{16}$ 의 두 교점을 P, Q 라 하자. ₍₁₎

선분 PQ 가 원 C 의 지름일 때 ₍₂₎, a 의 값은? ₍₃₎ [4점] [2017년 9월 가16]



- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

- 그래프를 통한 방정식의 도출 알고리즘

답을 구하는 과정을 역순으로 생각하면 유도할 수 있습니다.

- (3). a 의 값을 구한다. 어떻게? a 에 관한 방정식을 푼다.

a 에 관한 방정식을 어떻게 세울 것인가? a 에 관한 관계식을 세운다.

$\Rightarrow y = \log_a x$ 에 점 P와 점 Q의 좌표를 대입하여 관계식을 얻는다.

어째서 P와 Q를 이용하는가? 점 P, Q는 교점입니다. 앞선 토픽에서 강조했듯이 그래프에서 교점은 두 가지 관계식을 동시에 만족하는 점이라는 의미가 있습니다.

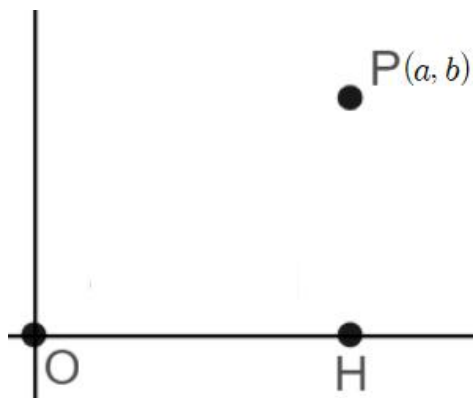
아무 특징이 이 없는 $y = \log_a x$ 위의 임의의 점을 잡는다면 (s, t) 라 할 수 있지만 관계식을 갖고 있는 점 P와 점 Q는 이를 이용하여 좌표를 잡을 때 사용하는 미지수의 개수를 줄일 수 있습니다.

- (1). P와 Q의 좌표는 어떻게 얻을 것인가?

이 문제가 아닌 이 유형에 적용할 수 있는 방법을 찾자.

- (2). 에서 제시된 '선분 PQ가 원 C의 지름이다.' 라는 조건을 사용해! 라는 말은 학생들에게 직접적인 도움이 되지 않는다. 모든 유형에 적용되는 알고리즘을 찾자.

좌표의 정의 (좌표를 얻는 방법)



양수 a, b 에 대하여 좌표평면위의 원점 O에서부터 x 축 양의방향으로 a 만큼, y 축 양의 방향으로 b 만큼 이동한 점 P의 좌표를 (a, b) 라고 정의한다.

점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면, 좌표의 정의에 의해 $\overline{OH} = a$, $\overline{PH} = b$ 가 성립합니다. 즉, 좌표는 길이로 해석가능하고 반대로 길이도 좌표로 해석이 가능합니다.

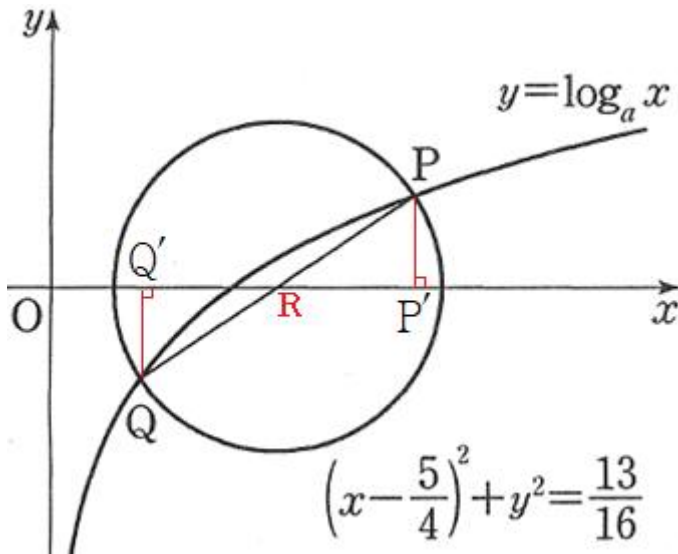
길이가 주어졌을 때, 그것을 통해 좌표를 얻는 것이 가능하다.

$\Rightarrow$ 어떠한 길이가 주어져야 하는가? 원점으로부터의 수평거리와

x 축으로 부터의 수직거리가 주어져야 한다. 이를 얻기 위한 풀이 알고리즘은?

$\Rightarrow$ 좌표를 구하고 싶은 점 P에서 x 축에 수선의 발 H를 내린 후 $\overline{OH}$ 와 $\overline{PH}$ 를 구하고자 하는 방향성을 설정한다.

알고리즘 적용. (좌표구하기)



점 P, Q에서 x 축에 내린 수선의 발 P', Q' 에 대하여 점 P와 Q의 좌표를 $P(\overline{OP'}, \overline{PP'})$, $Q(\overline{OQ'}, -\overline{QQ'})$ 으로 정의할 수 있습니다. 이게 기본적인 준비이고,

이 다음에 출제자가 제시한 조건 원 $C: \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{13}{16}$ 의 두 교점을 P, Q 라 하자.₍₁₎ 선분 PQ가 원 C의 지름일 때₍₂₎을 사용해야 합니다.

이를 사용하면 선분 PQ와 선분 $P'Q'$ 의 교점 R에 대하여 삼각형 $PP'R$ 과 삼각형 $QQ'R$ 이 합동인 것을 알 수 있습니다.

$\overline{PP'} = \overline{QQ'}$ 를 이용하여 $\overline{PP'} = t$ 라 하였을 때, $\overline{OP'} = a^t$, $\overline{OQ'} = a^{-t}$ 를 얻은 뒤 $\frac{a^t + a^{-t}}{2} = \frac{5}{4}$, $\sqrt{\left(a^t - \frac{5}{4}\right)^2 + t^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$ 를 이용해 마무리를 할 수도 있고

$\overline{RP'} = \overline{RQ'}$ 를 이용하여 $\overline{RP'} = t$ 라 하였을 때, $\overline{OP'} = \frac{5}{4} + t$, $\overline{OQ'} = \frac{5}{4} - t$ 를 얻을 수 있고, $\overline{PP'} = \log_a\left(\frac{5}{4} + t\right)$, $-\overline{QQ'} = \log_a\left(\frac{5}{4} - t\right)$ 에서 $\overline{PP'} = \overline{QQ'}$ 를 이용하여 문제를 마무리할 수도 있다.

• 알고리즘 완성

풀이를 암기하지 말고 자신만의 알고리즘으로 구축하자.

(1). 구하고자 하는 것에 대한 방정식을 세울 준비를 한다.

좌표를 함수식에 넣어 방정식을 세울 준비

(2). 수선의 발을 내려 좌표를 구할 일차적인 준비를 한다.

(3). 출제자가 추가로 제시한 특징 등을 통해 미지수를 최소화하여 좌표를 잡는다.

• 주의

그렇다고 모든 상황을 미지수 1개로만 전부 표현해야 한다는 강박관념을 가지면 곤란하다. 이로 인해 문제를 시작하기도 버거워할 수도 있다. 실제로 2018수능 기출 14번에서 미지수가 2개인 이차 연립방정식을 출제하기도 했고 논술 문제를 풀 때도 미지수를 x 로만 나타내지 않고 x 와 y 로 동시에 표현해야만 문제의 전체적인 방향이 보이고 더 잘 풀리는 경우가 많다. 미지수를 하나만 써서 표현하는 것과 미지수를 여럿 잡아서 하나로 줄이는 것이 결과적으로는 모두 같은 맥락을 취하고 있다는 것을 깨닫는 게 가장 좋다.

이 문항에 경우 두 점 P와 Q의 x 좌표를 각각 p, q 로 설정.

원의 대칭성에 의해 $p+q=\frac{5}{2}$, $pq=1$ 을 얻는다. 이를 이용해서 p, q 를 두 실근으로 가지는 이차방정식을 설정하면 문제를 풀어낼 수 있다.

최소화를 해야만 한다. 가 아니라 최소화 해 나간다. 라는 의미로 받아드리는 게 좋다.

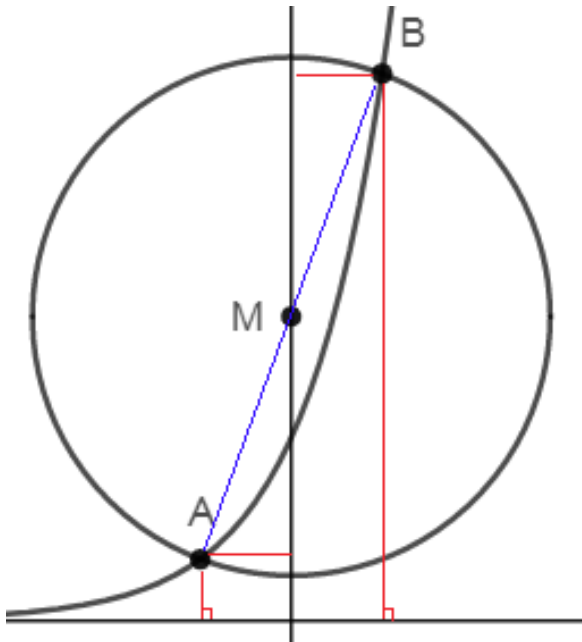
(4). 좌표를 함수식에 넣어 얻은 방정식을 풀어 답을 도출한다.

+답음 관계 또는 합동 관계가 보이는가?

$a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 곡선 $y = a^x$ 과 원 $C: x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{73}{36}$ 이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B가 원 C의 지름의 양 끝 점일 때, a 의 값은? (수능완성 13P)

- ① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

- 알고리즘에 의한 그림완성



+ 닮음 관계 또는 합동 관계가 보이는가?

+ 이 문항의 경우에도 이 문항에 경우 두 점 P 와 Q 의 x 좌표를 각각 p, q 로 설정하여 풀어낼 수 있다. 2가지 다 해보고 이것들이 본질적으로 같음을 이해하는 학습을 하자.

함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 AB의 중점은 x 축 위에 있다.

(나) 두 직선 OA, OB는 서로 수직이다.

삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) (수능완성 실전모의평가 2회)

① $\frac{3}{2}$

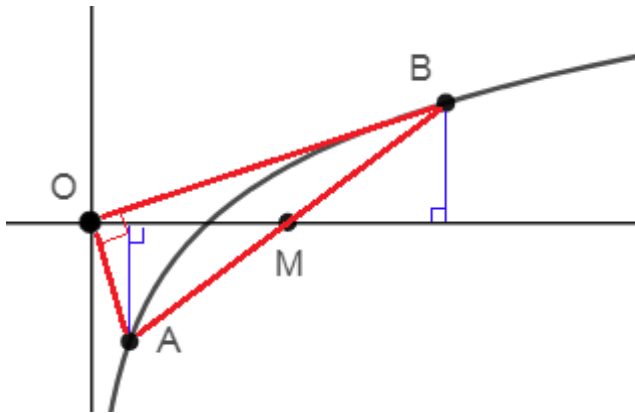
② $\frac{5}{3}$

③ $\frac{11}{6}$

④ 2

⑤ $\frac{13}{6}$

- 알고리즘에 의한 그림완성



+ 답음 관계 또는 합동 관계가 보이는가?

함수 $y=e^x$ 의 그래프 위의 x 좌표가 양수인 점 A와 함수 $y=-\ln x$ 의 그래프 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

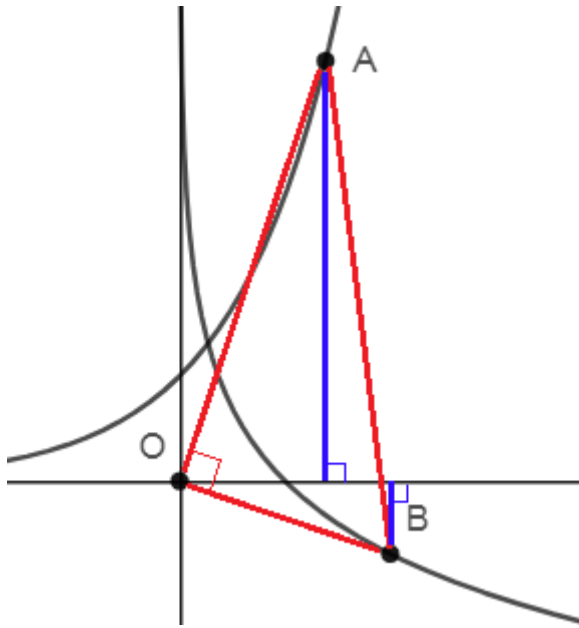
(가) $\overline{OA} = 2\overline{OB}$

(나) $\angle AOB = 90^\circ$

직선 OA의 기울기는? (단, O는 원점이다.) [2019년 9월 모의평가 15번]

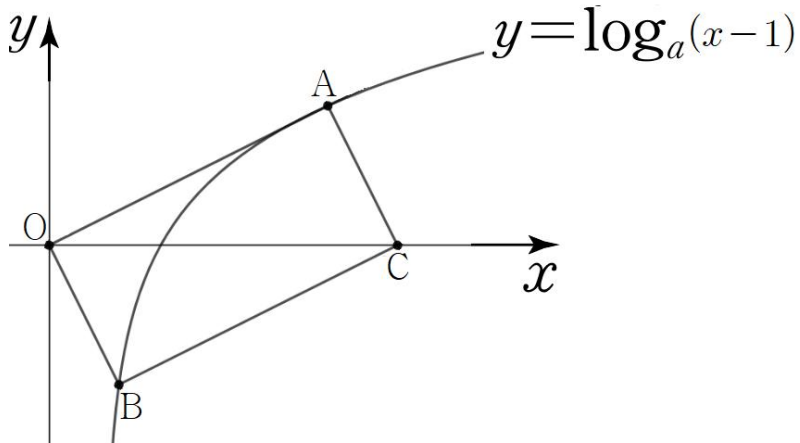
- ① e ② $\frac{3}{\ln 3}$ ③ $\frac{2}{\ln 2}$ ④ $\frac{5}{\ln 5}$ ⑤ $\frac{e^2}{2}$

• 알고리즘에 의한 그림완성



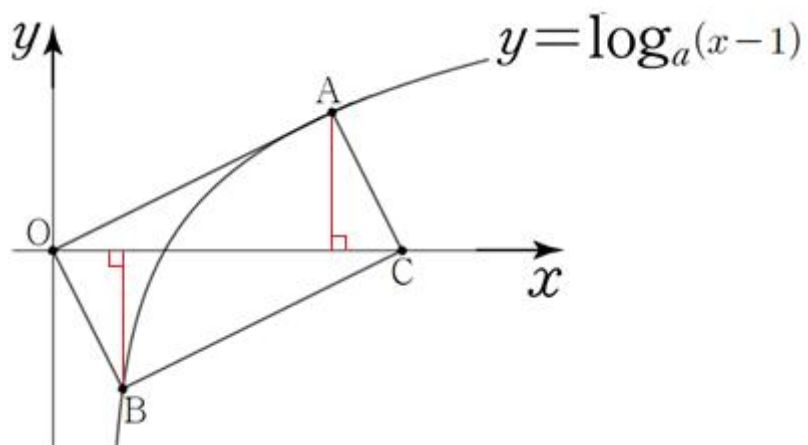
닮음 관계 또는 합동 관계가 보이는가?

$a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 그림과 같이 곡선 $y = \log_a(x-1)$ 위의 점 A, B와 x 축 위의 점 C, 원점 O를 각각 꼭짓점으로 하는 사각형 OACB가 있다. 사각형 OACB가 변 OA의 길이가 변 OB의 길이의 2배인 직사각형일 때, $\log_2 a$ 의 값은? (단, A의 x 좌표는 B의 x 좌표보다 크다.)



- ① $\frac{7}{10}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{17}{20}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

- 알고리즘에 의한 그림 완성

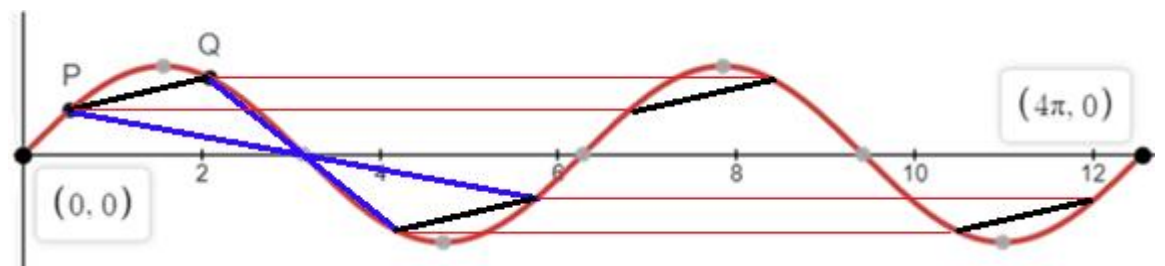
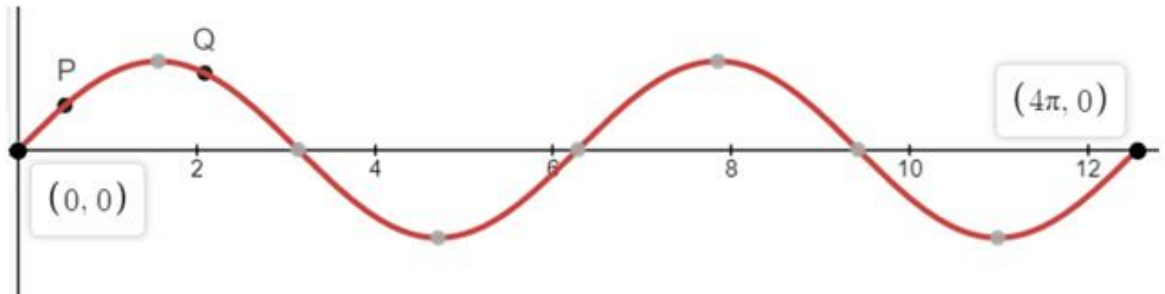


+ 답음 관계 또는 합동 관계가 보이는가?

$0 \leq x \leq 4\pi$ 에서 곡선 $y = \sin x$ 위에 x 좌표가 각각 $\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi$ 인 두 점 P, Q가 있다. 이 곡선 위에 있으며 x 좌표가 3π 이상이고 4π 이하인 두 점 R, S를 사각형 PRSQ가 평행사변형이 되도록 잡을 때, 삼각형 QRS의 무게중심의 좌표는 (a, b) 이다. $\frac{a}{b}$ 의 값은? (수능특강 43. 예제3)

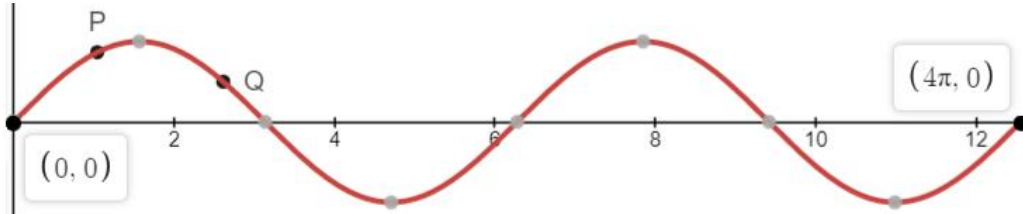
- ① $-\frac{47}{3}\pi$ ② -15π ③ $-\frac{43}{3}\pi$ ④ $-\frac{41}{3}\pi$ ⑤ -13π

$y = \sin x$ 위에 x 좌표가 각각 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2}{3}\pi$ 인 두 점 P, Q에 대하여 사각형 PQRS가 평행사변형이 되도록 하는 점으로 가능한 R, S를 모두 표시해보고 반드시 이유를 서술해보자.



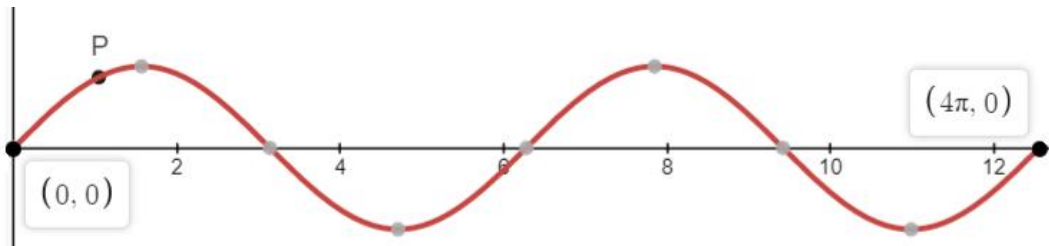
파란색 보조선: 삼각함수 그래프의 점대칭 성질을 이용하면 평행사변형을 그릴 수 있다.
 빨간색 보조선: 삼각함수 그래프의 주기성을 이용하면 평행사변형을 그릴 수 있다.

$y = \sin x$ 위에 x 좌표가 각각 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{6}\pi$ 인 두 점 P, Q에 대하여도 평행사변형을 만들 수 있는 점 R, S를 모두 표시해보자. $0 < x < \pi$ 에 존재하는 임의의 두 점 P, Q에 대하여 일반화될 수 있을 것인가?



구간 $(0, \pi)$ 에 존재하는 점 P와 구간 $(\pi, 2\pi)$ 에 존재하는 점 Q에 대하여 평행사변형 PQRS가 유일하기 위한 점 P, Q의 조건은 무엇일까?

반드시 이유를 서술해보자.



연습

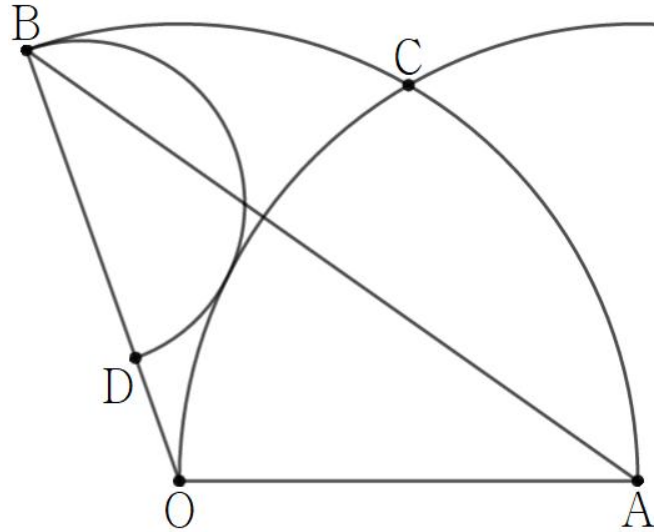
$0 \leq x \leq 4\pi$ 에서 곡선 $y = \sin x$ 위에 x 좌표가 각각 $\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi$ 인 두 점 P, Q가 있다. 이 곡선 위에 점 R, S를 사각형 PQRS가 평행사변형이 되도록 잡을 때, 가능한 모든 점 R의 x 좌표의 합은?

- ① 7π ② $\frac{22}{3}\pi$ ③ $\frac{23}{3}\pi$ ④ 8π ⑤ $\frac{25}{3}\pi$

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 부채꼴 AOB의 호 AB와 점 A를 중심으로 하고 점 O를 지나는 원의 일부가 만나는 점을 C라 하자. 선분 BO위의 어떤 점 D에 대하여 점 B, D를 지름의 양 끝으로 하는 반원이 부채꼴 AOB의 내부에서 호 CO와 외접하고 있다. 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 일 때,

선분 BD의 길이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, $\angle AOB > \frac{\pi}{2}$ 이고 p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)





이 문제는 얻을 수 있는 교훈이 있습니다.

답이 $\frac{1}{5}$ 가 나오면 의도한 실수를 하신 것입니다.

자작

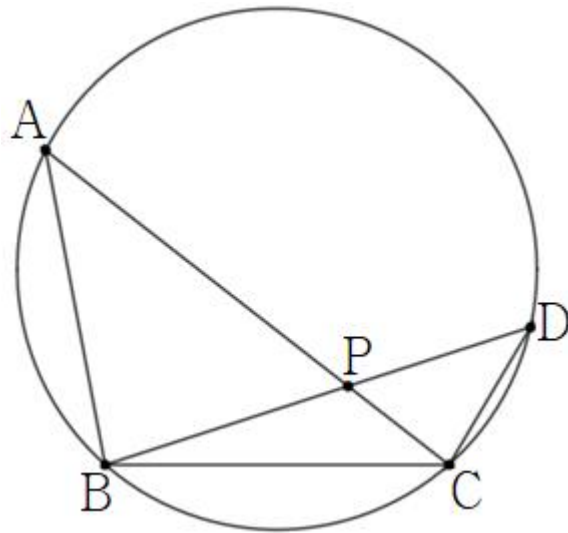
그림과 같이 $\overline{AB}=10$ 인 삼각형 ABC 가 원에 내접하고 있다. 이 원 위에 점 D 를 $\overline{CD}=5$ 가 되도록 잡고 선분 AC 와 선분 BD 의 교점을 P 라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle BAC)=\frac{3}{4}$ 이다.

(나) 삼각형 ABC 의 넓이를 S_1 , 삼각형 BCD 의 넓이를 S_2 라 할 때,

$$S_1 - S_2 = \frac{45}{4}\sqrt{7} \text{ 이다.}$$

선분 BC 의 길이를 k 라 할 때, k^2 의 값을 구하시오.





2와 12사이에 k 개의 수를 넣어 만든 수열

$$2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, 12$$

가 이 순서대로 등차수열을 이루고 모든 수의 합이 112일 때,
 a_3 의 값을 구하시오. (수특 75. 유제64)

2와 4사이에 n 개의 수를 넣어 만든 등차수열의 첫째항부터 끝항까지의
 합을 S_n 이라 하고, 2와 8사이에 $2n$ 개의 수를 넣어 만든 등차수열의
 첫째항부터 끝항까지의 합을 T_n 이라 하자. $|S_n - T_n| = 60$ 일 때, n 의 값은?
 (수능완성 42)

두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$a_2 + b_3 = 4, \quad a_6 + b_{11} = -36$$

일 때, $a_4 + b_7$ 의 값은?

- ① -18 ② -16 ③ -14 ④ -12 ⑤ -10

(1). 등차수열의 대칭성을 활용하면

$$a_1 + a_k = 2 + 12$$

$$a_2 + a_{k-1} = 2 + 12$$

$$a_3 + a_{k-2} = 2 + 12$$

$\vdots$

에 대하여 $112 = (2 + 12) \times 8$ 이므로 2, 12를 포함한 수열의 모든 항의 개수가 16개 (8쌍)이어야 한다. 따라서 $k = 14$

$$(2). \quad S_n = (2 + 4) \times \frac{n+2}{2}, \quad T_n = (2 + 8) \times \frac{2n+2}{2}$$

$$(3). \quad a_2 + a_6 = 2a_4, \quad b_3 + b_{11} = 2b_7$$

두 수 10과 46사이에 n 개의 자연수를 넣어서 만든 수열이 이 순서대로 공차가 1이 아닌 등차수열을 이룬다. 이 수열의 항 중에서 31이 존재할 때, n 의 값을 구하시오.

첫째항이 20인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.
 $S_{10} = S_{11}$ 일 때, $S_n < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은?

(1). $(10+46)=(31+x)$ 에 대하여 등차수열 내에 25라는 항이 존재합니다.

(2). $S_{11} - S_{10} = a_{11} = 0$ 에 대하여

$$a_{10} + a_{12} = 0$$

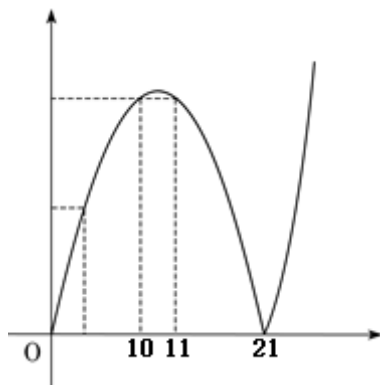
$$a_9 + a_{13} = 0$$

$\vdots$

$$a_2 + a_{20} = 0$$

$a_1 + a_{21} = 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{21} a_n = S_{21} = 0$ 공차가 음수인 것이 자명하므로

$S_n < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 22이다.



물론 S_n 을 자연수를 정의역으로 하는 이차함수로 해석하여 대칭성을 논할 수 있다.

연습

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$S_k = -14$, $S_{k+2} = -11$ 을 만족시키는 자연수 k 에 대하여 $S_{2k+2} = 39$ 일 때,
자연수 k 의 값을 구하시오.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 42$ 일 때,
다음 조건을 만족시키는 4이상의 자연수 k 의 값을 구하시오.

[2021 3월 모의평가 나형 17번]

(가) $a_{k-3} + a_{k-1} = -24$

(나) $S_k = k^2$

$$(1). \quad S_{k+2} - S_k = a_{k+1} + a_{k+2} = 3$$

$$a_{k+1} + a_{k+2} = 3$$

$$a_k + a_{k+3} = 3$$

$$\vdots$$

$$a_2 + a_{2k+1} = 3$$

$$a_1 + a_{2k+2} = 3$$

$$3 \times (k+1) = S_{2k+2}$$

$$(2). \quad a_{k-3} + a_{k-1} = -24 \text{ 일 때 } a_{k-2} = -12$$

$$a_1 + a_k = 30$$

$$a_2 + a_{k-1} = 30$$

$$a_3 + a_{k-2} = 30$$

$$\vdots$$

$$S_k = (a_1 + a_k) + (a_2 + a_{k-1}) + (a_3 + a_{k-2}) + \dots$$

$$= 30 \times \frac{k}{2} = k^2$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n \quad (n \geq 2)$$

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2 + 7n - 7$$

을 만족시킨다. $a_1 \times a_5 \times a_7 = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

(2021 6월 모의평가 나형 28번 변형)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{S_{k+1}}{S_k} = 20 \text{ 일 때, } \sum_{k=1}^{15} \frac{a_{k+1}}{S_k} \text{의 값을 구하시오. (수특 97. Level1)}$$

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

(단, $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ 이다.)

$$a_1 = 1, a_2 = 3$$

$$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

일 때, a_{20} 의 값은? [3점] [2005년 9월 나14]

① 39

② 43

③ 47

④ 51

⑤ 55

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n k a_k$$

을 만족시킨다. $a_1 = 2$ 일 때, $a_2 + \frac{a_{51}}{a_{50}}$ 의 값을 구하시오. [2021 3월 모의평가 나형 15번]

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, S_n 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\log_2(S_n - 4) = -n$$

을 만족시킨다. $\frac{a_1}{a_5}$ 의 값은? (단, 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n > 4$ 이다.)

(수능완성 47)

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{p}{2+4+\cdots+2k}$$

를 만족시킨다. $\log a_{10} = 2$ 일 때, p 의 값을 구하시오.



수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^m a_k$ 의 값이 100이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m 의 값의 합을

구하시오. [2021 6월 모의평가 21번]



연습

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \log_{27} \left\{ \frac{3(2n+1)}{2n-1} \right\}$$

이다. 다음 조건을 만족시키는 자연수 l 의 최솟값을 구하시오.

$\sum_{k=1}^m a_k$ 의 값이 l 이하의 자연수가 되도록 하는 서로 다른 자연수 m 의 개수는 2이다.



연습할때는 최대한 논리적으로 풀어봅시다.
수열의 출제의도가 노가다일 수는 없을 겁니다.

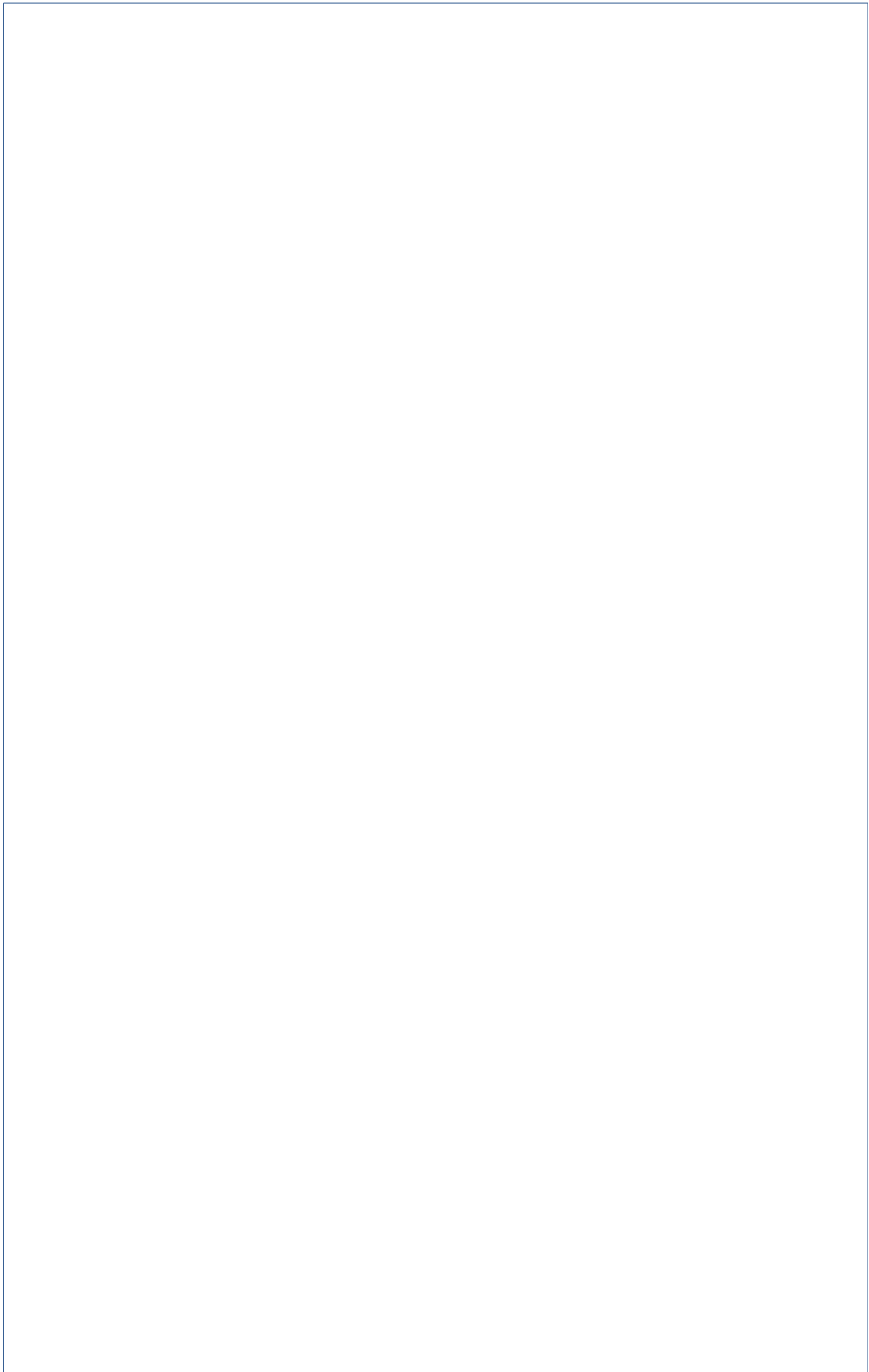
대표기출

수열 $\{a_n\}$ 을

$$a_{n+1} = n(-1)^n - 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의한다. $a_1 = a_{2012} + 2$ 일 때, $\sum_{n=1}^{2011} a_n$ 의 값은? [2012년 경찰대 14]

- ① 501 ② 351 ③ 251 ④ -251 ⑤ -501



연습

수열 $\{a_n\}$ 이 50이하의 모든 자연수 n 과, 모든 양의 홀수 m 에 대하여

$$a_n + a_{100-n} = \frac{n^2}{101}, \quad a_m + a_{m+1} = \frac{9(m+1)}{50}$$

를 만족시킨다. $a_{100} - a_{50}$ 의 값을 구하시오.

HINT: $S_1 - S_2$

제작: 정재민 (우주설)

검수 및 도움: 이봉주 (대치 720연구소)

임영범 (대치 720연구소)

김윤태 (대치 720연구소)

