

* 2018년 4월 시행 교육청 모의고사 23 수학 가형 21번.

$$\frac{3}{5} < x < 4 (= \frac{20}{5}) \text{ 에서 정의된 이분가능 함수 } f(x), \quad f(1)=2, \quad f'(x) = \frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

$f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 존재. $g(x)$ 이분가능. $\rightarrow g(2)=1$.

$$\rightarrow f(g(x)) = g(f(x)) = x, \quad f'(g(x)) \cdot g'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1, \quad f'(x) \neq 0,$$

$$7. \quad g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad g(2) \text{는 } x=1 \text{ 때,} \quad \therefore f'(1) = \frac{1-\{f(1)\}^3}{\{f(1)\}^2} = -\frac{7}{4}.$$

$$\therefore g'(2) = g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{4}{7} \quad (\text{True}).$$

↳ $f'(x)$ 에서 x 대신에 $g(x)$ 를 대입하면 $f'(g(x)) = \frac{1-\{g(x)\}^2 \cdot x^3}{\{g(x)\}^3 \cdot x^2} = \frac{1}{g'(x)}$ → 역함수 정보에서 힌트

$$\therefore g'(x) = \frac{x^2 \{g(x)\}^3}{1-x^3 \{g(x)\}^2} \text{ 에서 } g'(x) - x^3 \{g(x)\}^2 \cdot g'(x) = x^2 \{g(x)\}^3$$

$$\therefore g'(x) = x^3 \{g(x)\}^2 \cdot g'(x) + x^2 \{g(x)\}^3 = x^2 \{g(x)\}^2 \cdot \{xg'(x) + g(x)\}$$

$xg(x) = h(x)$ 라 하면

$$\hookrightarrow \{xg(x)\}'$$

$$g'(x) = \{h(x)\}^2 \cdot h'(x) \text{ 이므로 } \int g'(x) dx = g(x) = \int \{h(x)\}^2 h'(x) dx$$

$$\therefore g(2) = \frac{1}{3} \{h(x)\}^3 + C \quad (C \text{는 적분상수}). \quad g(2)=1 \text{ 이므로 } h(2)=2 \text{ 에서 } C = -\frac{5}{3}.$$

$$\therefore \text{따라서 } g(x) = \frac{1}{3} x^3 \{g(x)\}^3 - \frac{5}{3} \quad (\text{True}).$$

$$8. \quad g(1)=k \text{ 라 하면 } k^3 - 3k - 5 = 0 \text{ 에서 } k=2 \text{ 이면 } 8-6-5 = -3 < 0.$$

$$k = \frac{5}{2} \text{ 이면 } \frac{125}{8} - \frac{15}{2} - 5 = \frac{125-60-40}{8} = \frac{25}{8} > 0.$$

$\therefore k$ 에 대한 다항식 $k^3 - 3k - 5$ 는 $(2, \frac{5}{2})$ 구간에서

적어도 하나의 실근을 갖는다 (사잇값, 중간값 정리).