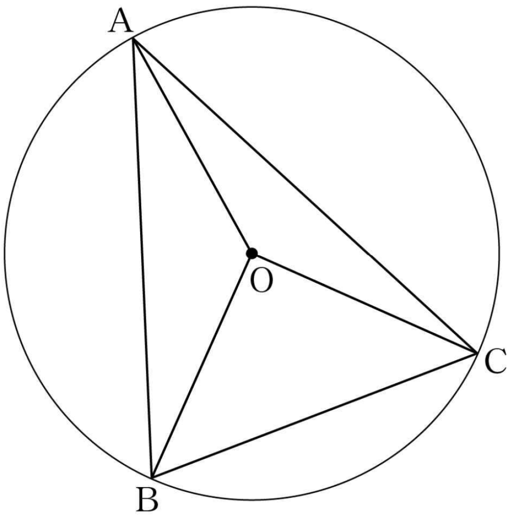
어썸 & 랑데뷰

4월에 본 3월 학평 REBUILD

ETOOS 정현경 수학 연구실

3평 Origin

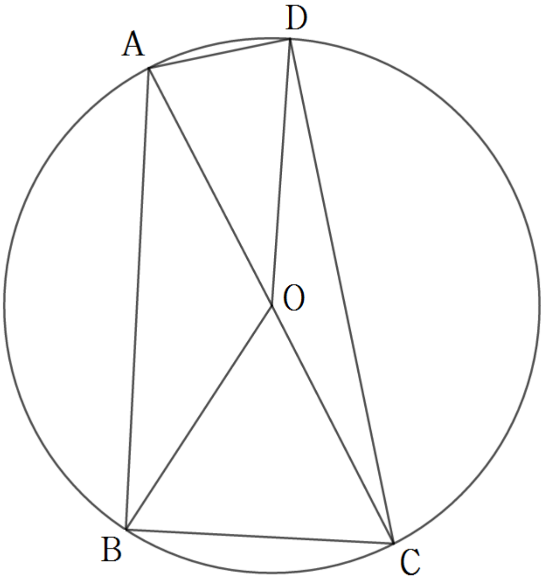
[1] 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1=4S_2$이고 $\overline{BC}=2\sqrt{5}$일 때, 선분 AB의 길이는?



① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

[2020년 3월 모의고사 가형 19번]

2)그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 두 삼각형 OAB, OCD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $5S_1=12S_2$이고 $\overline{\mathrm{AD}}^2=4(2-\sqrt{3})$, $\overline{\mathrm{BC}}^2=4$일 때, 선분 AB의 길이는?

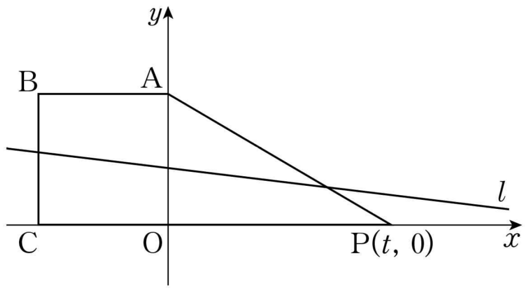


① $\frac{11}{\sqrt{13}}$ ② $\frac{12}{\sqrt{13}}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\frac{14}{\sqrt{13}}$ ⑤ $\frac{15}{\sqrt{13}}$

[2020년 3월 모의고사 가형 19번]-변형

3평 Origin

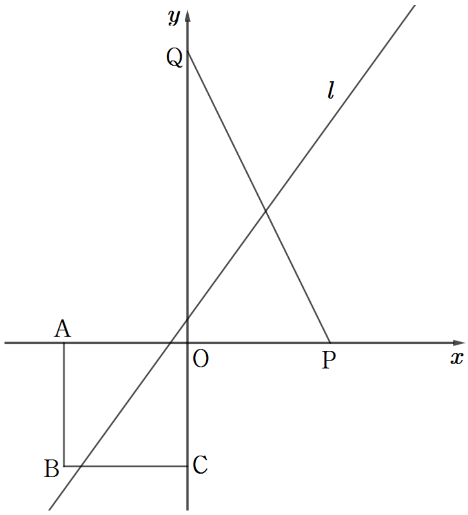
[3] 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$, $\mathrm{C}(-2,\ 0)$과 점 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ $(t>0)$에 대하여 직선 l이 정사각형 OABC의 넓이와 직각삼각형 AOP의 넓이를 각각 이등분한다. 양의 실수 t에 대하여 직선 l의 y절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0+} f(t)$의 값은?



① $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$　② $2-\sqrt{2}$　③ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$　④ 1　⑤ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{3}$

[2020년 3월 모의고사 가형 20번]

4)그림과 같이 네 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(-2,0)$, $\mathrm{B}(-2,-2)$, $\mathrm{C}(0,-2)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC와 양수 t에 대하여 점 $\mathrm{P}(t,0)$, $\mathrm{Q}(0,2t)$가 있다. 정사각형 OABC의 두 변 OA, BC와 모두 만나는 직선 l이 정사각형 OABC와 직각삼각형 OPQ의 넓이를 각각 이등분한다. 직선 l의 기울기를 $f(t)$이라 할 때, $\lim_{t\to\infty} f(t)$의 값을 구하시오.



[2020년 3월 모의고사 가형 20번]-변형

3평 Origin

5)0이 아닌 실수 m에 대하여 두 함수

$$f(x)=2x^3-8x$$

$$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{47}{m}x+\dfrac{4}{m^3} & (x<0) \\ 2mx+\dfrac{4}{m^3} & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 있다. 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$중 크지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $m=-1$일 때, $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-5$이다.

ㄴ. $m=-1$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 2이다.

ㄷ. 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 양수 m의 최댓값은 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2020년 3월 모의고사 가형 21번]

6)실수 m, n에 대하여 두 함수

$$f(x)=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|$$

$$g(x)=\begin{cases}-mx+n & (x<0)\\ mx+n & (x \geq 0)\end{cases}$$

이 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$중 크지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $m \geq 0$, $n \geq 1$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

ㄴ. $\frac{24}{25} \leq m \leq \frac{36}{25}$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이게 하는 n의 최솟값은 $\frac{3}{25}$이다.

ㄷ. $m=-\frac{2}{9}$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 7이게 하는 n의 범위는 $\frac{5\sqrt{5}}{9}<n<\frac{8\sqrt{2}}{9}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2020년 3월 모의고사 가형 21번]-변형 (미적분)

3평 Origin

7) $0<a<\frac{4}{7}$인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오.
[2020년 3월 모의고사 가형 28번]

REBUILD

8)두 실수 a와 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=3\cos(ax)+b$가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{4}, k\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{9}{4}\pi, k\right)$을 지나고 $f\left(\frac{5}{2}\pi\right)=2$일 때, k의 값과 같은 것은? (단, $0<a<\frac{8}{9}$이고 k는 상수이다.)

① $3\cos\frac{\pi}{5}+1$ ② $3\cos\frac{\pi}{5}-1$ ③ $3\cos\frac{2\pi}{5}+1$

④ $3\cos\frac{2\pi}{5}-1$ ⑤ $3\cos\frac{2\pi}{5}+2$

[2020년 3월 모의고사 가형 28번]-변형

쉬준-114

3평 Origin

9)자연수 n에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(0, n+5)$, $\mathrm{B}(n+4, 0)$과 원점 O를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB가 있다. 삼각형 AOB의 내부에 포함된 정사각형 중 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 정사각형의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하시오.

[2020년 3월 모의고사 가형 29번]

10)자연수 n에 대하여 $f(x)=\dfrac{1}{n-x}$와 역함수 $f^{-1}(x)$로 둘러싸인 부분 (경계 포함)에 포함된 정사각형 중 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 정사각형의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=3}^{12} a_n$의 값을 구하시오.

[2020년 3월 모의고사 가형 29번]-변형

3평 Origin

11)최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{t}^{x} f(s)ds$$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(a)=0$
> (나) 함수 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3)=0$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가진다. $f(5)$의 값을 구하시오.
[2020년 3월 모의고사 가형 30번]

12)최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$와 양의 실수 a, p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} pf(x)-p & (x<a) \\ \dfrac{f(x)}{e^x}-p & (x \geq a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\int_t^x g(s)\,ds$$

라 하자. 상수 a에 대하여 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)=0$
(나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(다) 함수 $\lvert h(x)-h(3a)\rvert$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

실수 t에 대하여 $h(a)$의 값을 $k(t)$라 할 때 함수 $k(t)$는 $t=0$에서 음의 최솟값을 가진다. $f(10)$의 값을 구하시오.

[2020년 3월 모의고사 가형 30번]-변형(미적분)

빠른답

1) ③

2) ②

3) ②

4) 2

5) ⑤

6) ③

7) 40

8) ②

9) 164

10) 385

11) 432

12) 81


어썽&랑데뷰
랑데뷰
방구석 수학자
정현경
보배 황보백
어썽한 걸

1) 정답 ③

[풀이 :]

삼각형 OBC에서 $\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{10}$, $\overline{BC}=2\sqrt{5}$ 이므로

$\overline{BC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$이 성립하므로 $\angle BOC=\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 $\angle AOB+\angle AOC=\frac{3}{2}\pi$이다.

$\angle AOB=\theta$라 하면 $\angle AOC=\frac{3}{2}\pi-\theta$이다.

$S_1=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\sin\theta=5\sin\theta$

$S_2=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-5\cos\theta$

$3S_1=4S_2$에서 $3\sin\theta=-4\cos\theta$이 성립한다.

θ는 둔각이고 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$ 이므로 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$ 이다.

따라서 삼각형 OAB에서

$\overline{AB}=\sqrt{10+10-2\times10\times\left(-\frac{3}{5}\right)}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

2) 정답 ②

[풀이 :]

삼각형 OAD에서 코사인법칙을 적용하면

$4(2-\sqrt{3})=4+4-2\times2\times2\times\cos(\angle AOD)$

$\cos(\angle AOD)=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\angle AOD=\frac{\pi}{6}$

삼각형 OBC에서 코사인법칙을 적용하면

$4=4+4-2\times2\times2\times\cos(\angle BOC)$

$\cos(\angle BOC)=\frac{1}{2}\rightarrow\angle AOD=\frac{\pi}{3}$

따라서 $\angle AOD+\angle BOC=\frac{\pi}{2}$

그러므로 $\angle AOB+\angle COD=\frac{3}{2}\pi$

$\angle$AOB$=\theta$라 하면 $\angle$COD$=\dfrac{3}{2}\pi-\theta$이다.

$S_1=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin\theta=2\sin\theta$

$S_2=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)=-2\cos\theta$

$5S_1=12S_2$에서 $5\sin\theta=-12\cos\theta$이 성립한다.

θ는 둔각이고 $\tan\theta=-\dfrac{12}{5}$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{5}{13}$이다.

따라서 삼각형 OAB에서

$\overline{\mathrm{AB}}^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\left(-\dfrac{5}{13}\right)=8+\dfrac{40}{13}=\dfrac{144}{13}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{12}{\sqrt{13}}$

3) 정답 ②

[풀이 :]

직선 l이 정사각형 OABC의 넓이를 이등분하기 위해서는 정사각형 OABC의 두 대각선의 교점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

따라서 직선 l의 y절편이 $f(t)$이므로 직선 l은 두 점 $(-1,\ 1)$과 $\mathrm{Q}(0,\ f(t))$을 지난다.

그러므로 직선 l의 방정식은 $y=\{f(t)-1\}x+f(t)$

직선 AP의 방정식은 $y=-\dfrac{2}{t}x+2$이다.

두 직선의 교점을 $\mathrm{R}(x_1,\ y_1)$이라 할 때 점 R의 x좌표를 구해보면

$\{f(t)-1\}x+f(t)=-\dfrac{2}{t}x+2$

$\left\{f(t)-1+\dfrac{2}{t}\right\}x=2-f(t)$에서

$\therefore\ x_1=\dfrac{2-f(t)}{f(t)-1+\dfrac{2}{t}}$

삼각형 AOP의 넓이는 t이므로 삼각형 AQR의 넓이는 $\dfrac{1}{2}t$이다.

따라서

$\dfrac{1}{2}t=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times x_1$

$t=\{2-f(t)\}\times\dfrac{2-f(t)}{f(t)-1+\dfrac{2}{t}}$

$t f(t)-t+2=4-4f(t)+\{f(t)\}^2$

$\{f(t)\}^2-(t+4)f(t)+t+2=0$

$\therefore\ f(t)=\dfrac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}\ \ (\because 0<f(t)<2)$

$\lim_{t\to 0+} f(t)=\lim_{t\to 0+}\dfrac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$

4) 정답 2

[풀이 :]

직선 l이 정사각형 OABC의 넓이를 이등분하므로 정사각형 OABC의 두 대각선의 교점 $(-1,\ -1)$을 지난다.

따라서 $l:\ y=f(t)(x+1)-1 \to y=f(t)x+f(t)-1$

직선 l이 y축과 만나는 점 $\mathrm{D}\,(0, f(t)-1)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{DQ}}=2t-f(t)+1$

직선 PQ은 기울기가 -2이므로 $y=-2x+2t$이다.

$y=-2x+2t$와 직선 l의 교점을 R이라 하자.

$-2x+2t=f(t)x+f(t)-1$에서

$\{f(t)+2\}x=2t-f(t)+1$

따라서 점 R의 x좌표는 $\dfrac{2t-f(t)+1}{f(t)+2}$이다.

직각삼각형 OPQ의 넓이가 $\dfrac{1}{2}\times t\times 2t=t^2$이므로

삼각형 DRQ의 넓이는 $\dfrac{1}{2}t^2$이다.

$\dfrac{1}{2}\times\{2t-f(t)+1\}\times\dfrac{2t-f(t)+1}{f(t)+2}=\dfrac{1}{2}t^2$

$\{2t-f(t)+1\}^2=t^2\{f(t)+2\}$

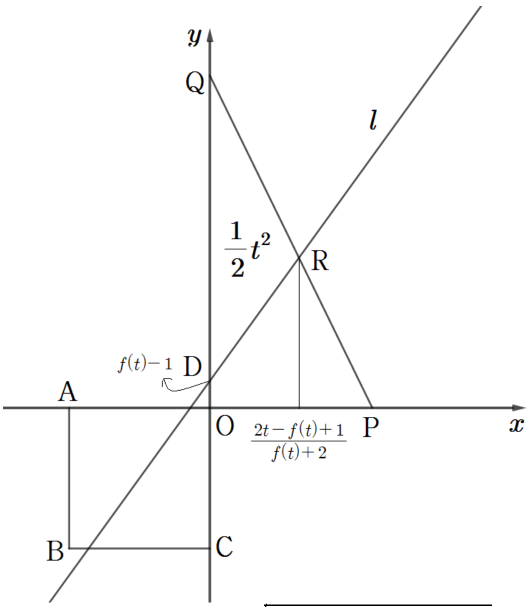
$\{f(t)\}^2-2(2t+1)f(t)+(2t+1)^2=t^2f(t)+2t^2$

$\{f(t)\}^2-\left(t^2+4t+2\right)f(t)+2t^2+4t+1=0$

$$f(t)=\frac{t^2+4t+2\pm\sqrt{\left(t^2+4t+2\right)^2-4\left(2t^2+4t+1\right)}}{2}$$

$$=\frac{t^2+4t+2\pm\sqrt{t^4+8t^3+12t^2+8t}}{2}$$

점 Q와 점 P에서 $f(t)<2t+1$이므로



$f(t)=\dfrac{t^2+4t+2-\sqrt{t^4+8t^3+12t^2+8t}}{2}$

$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}\dfrac{4(2t^2+4t+1)}{2\{t^2+4t+2+\sqrt{t^4+8t^3+12t^2+8t}\}}=2$

5) 정답 ⑤

[풀이 :]

ㄱ. ㄴ.

$f(x)=2x^3-8x$

$f'(x)=6x^2-8$

이므로 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ 2t^3-8t)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)=(6t^2-8)(x-t)+2t^3-8t$

함수 $g(x)$가 $m=-1$일 때 y절편이 -4이므로

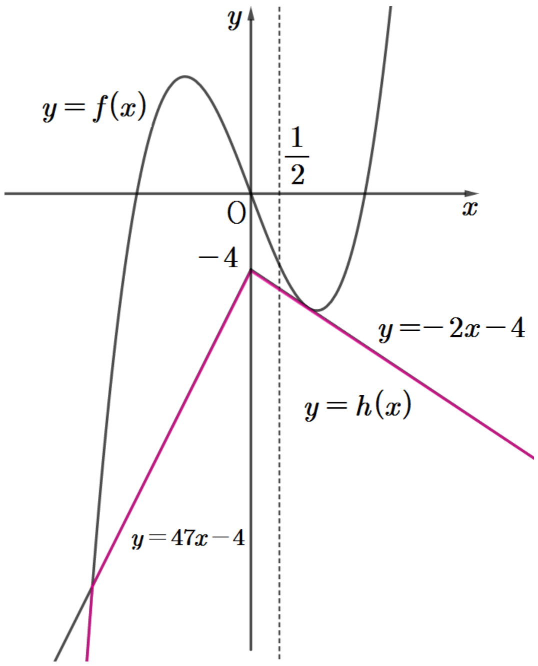
접선 $y=(6t^2-8)x-4t^3\cdots$㉠의 y절편 $-4t^3=-4$에서 $t=1$이다.

그럼 접선의 방정식은 $y=-2x-4$이므로

$m=-1$이면 $g(x)=\begin{cases}47x-4 & (x<0)\\ -2x-4 & (x\ \geq\ 0)\end{cases}$에서

접선이 함수 $g(x)$의 일부이다.

따라서 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $h(x)$는 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$중 크기 않은 값이므로
위 그래프의 붉은색 부분이다.

따라서 $h\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times\frac{1}{2}-4=-5$ (ㄱ.참)

또한 뾰족점 두 점에서 미분 가능하지 않고 $x=1$의 접점에서는 미분가능하다.
(ㄴ.참)

ㄷ.

$m>0$일 때

우선 $x=0$에서 $g(x)$의 y절편 $\frac{4}{m^3}$이 양수이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$ 주변에서 삼차함수 $f(x)$가 선택되므로 $x=0$에서 미분 가능하다. $x>0$에서는 $f(x)$와 $g(x)$는 항상 한 점에서 만나므로 미분가능하지 않은 점이 한 개 생긴다. 따라서 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이기 위해서는 $x<0$에서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 만나지 않거나 만날 때는 접해야 한다.

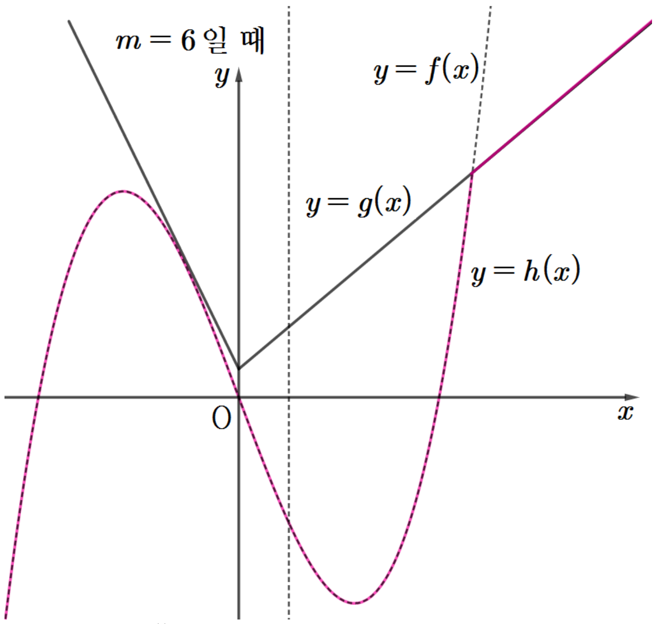
㉠에서 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선은 $y=(6t^2-8)x-4t^3$이므로

접선의 y절편 $-4t^3$과 함수 $g(x)$의 y절편 $\frac{4}{m^3}$이 같을 때

즉, $-4t^3=\frac{4}{m^3}$

$\therefore\ t=-\frac{1}{m}$

$x<0$일 때, $g(x)=-\frac{47}{m}x+\frac{4}{m^3}$에서



$6t^2-8=-\dfrac{47}{m}$

$\dfrac{6}{m^2}-8=-\dfrac{47}{m}$

$8m^2-47m-6=0$

$(m-6)(8m+1)=0$

$\therefore\ m=6\ \ (m>0)$

따라서 $m\le 6$이면 $x<0$일 때, $g(x)=-\dfrac{47}{m}x+\dfrac{4}{m^3}$은 함수 $f(x)$의 그래프보다 위에 있게 된다. (ㄷ.참)

6) 정답 ③

[풀이 :]

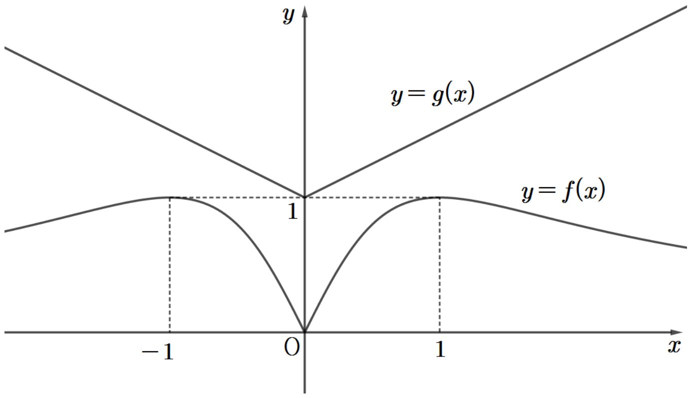
$y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$y'=\dfrac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}\cdots$㉠

$y'=0$의 해는 $x=-1$과 $x=1$이고 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$이므로

함수 $f(x)=\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|$의 그래프는 다음 그림과 같다.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않고 $x\ne 0$인 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.



ㄱ.

$g(x)=\begin{cases} -mx+n & (x<0) \\ mx+n & (x \geq 0) \end{cases}$에서 $m \geq 0$, $n \geq 1$일 때 $f(x) \leq g(x)$이므로

$h(x)=f(x)$이다. 따라서 $h(x)$는 $x=0$에서만 미분 가능하지 않는다. (참)

ㄴ. 거짓

우선 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이 되려면 ㄱ. 과 같이 $h(x)=f(x)$이어야 한다.

즉, $f(x) \leq g(x)$가 성립해야 한다.

함수 $f(x)$와 $g(x)$는 y축 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$중 크지 않은 값인 함수 $h(x)$도 y축 대칭이다.

따라서 $x>0$인 부분만 생각해 보자.

$x \geq 0$일 때, $g(x)=mx+n$, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$에서 직선 $g(x)$가 곡선 $f(x)$에 접할 때를 생각해 보자. 고정된 곡선에 직선이 접할 때 기울기 m이 작을수록 직선의 y절편 n이 커진다.

따라서 $\dfrac{24}{25} \leq m \leq \dfrac{36}{25}$의 m이 최소일 때 즉, $m=\dfrac{24}{25}$일 때

접점을 $(t, f(t))$라 하면 ㉠에서 $f'(t)=\dfrac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}$이므로

$$\frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}=\frac{24}{25} \to -25t^2+25=12(t^2+1)^2$$

$$12t^4+49t^2-13=0 \to (3t^2+13)(4t^2-1)=0$$

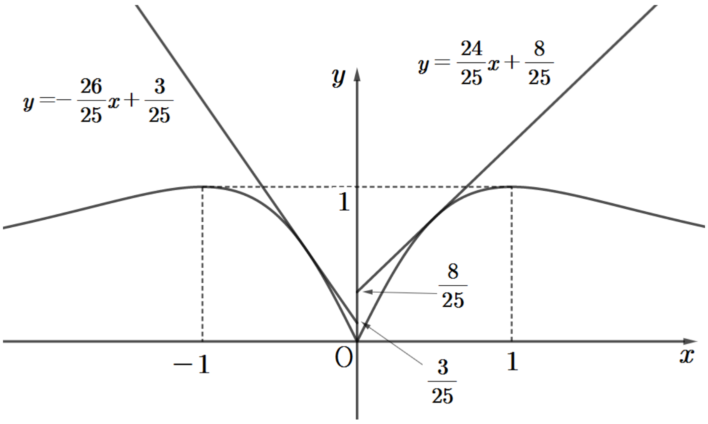
$t>0$에서 $t=\dfrac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{5}\right)$이고

접선의 방정식은

$$y=\frac{24}{25}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{5}=\frac{24}{25}x+\frac{8}{25}$$

따라서 $\frac{24}{25} \le m \le \frac{36}{25}$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이게 하는 n의 최솟값은 $\frac{8}{25}$이다. (거짓)



[랑데뷰팁]

$m=\frac{36}{25}$일 때, $n \ge \frac{3}{25}$이고 $m=\frac{24}{25}$일 때, $n \ge \frac{8}{25}$이다.

따라서 $n \ge \frac{8}{25}$이다.

ㄷ.

$m=-\frac{2}{9}$일 때, $x \ge 0$에서 $y=-\frac{2}{9}x+n$이 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$에 접하는 경우를 생각해 보자.

마찬가지로 접점을 $(t, f(t))$라 하면 ㉠에서 $f'(t)=\frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}$이므로

$\frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}=-\frac{2}{9} \rightarrow 9t^2-9=(t^2+1)^2$

$t^4-7t^2+10=0 \rightarrow (t^2-2)(t^2-5)=0$

$t>0$이므로 $t=\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{5}$가 $x \ge 0$인 곡선 $f(x)$에 접하는 기울기가 $-\frac{2}{9}$인 접점의 x좌표들이다. $f(\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $f(\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로

접선의 방정식은 각각

$y=-\frac{2}{9}(x-\sqrt{2})+\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{2}{9}x+\frac{8\sqrt{2}}{9}$

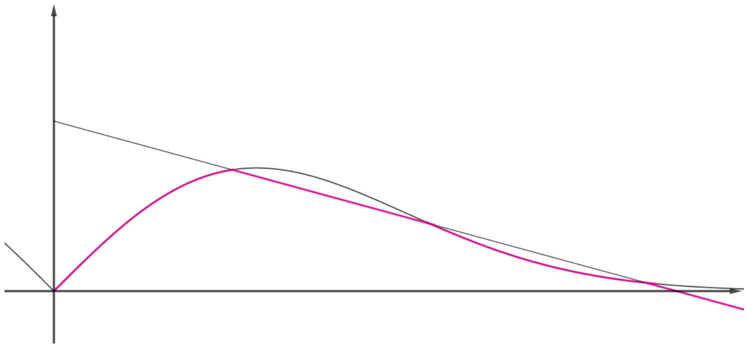
$y=-\frac{2}{9}(x-\sqrt{5})+\frac{\sqrt{5}}{3}=-\frac{2}{9}x+\frac{5\sqrt{5}}{9}$

이다.

따라서 기울기가 $-\frac{2}{9}$이고 y절편이 n이 직선이 $\frac{5\sqrt{5}}{9}<n<\frac{8\sqrt{2}}{9}$일 때

$x \geq 0$에서 $g(x)=-\frac{2}{9}x+n$는 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$와 3개의 교점을 갖는다.

따라서 함수 $h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고 $x>0$에서 3개의 점, $x<0$에서 3개의 점, $x=0$에서 미분가능하지 않게 된다. (참)



7) 정답 40

[풀이 :]

$f(x)=2\sin(ax)+b$가 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2},\, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi,\, 0\right)$을 지나므로

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}a\right)=\sin\left(\frac{7}{2}\pi a\right)$이 성립한다.

$0<a<\frac{4}{7}$에서

$-\frac{2}{7}\pi<-\frac{\pi}{2}a<0,\ 0<\frac{7}{2}\pi a<2\pi$이다.

따라서

$\frac{7\pi}{2}a=\pi-\left(-\frac{\pi}{2}a\right)$ 또는 $\frac{7\pi}{2}a=2\pi+\left(-\frac{\pi}{2}a\right)$이다.

(i) $\frac{7\pi}{2}a=\pi-\left(-\frac{\pi}{2}a\right) \rightarrow \frac{7}{2}\pi a-\frac{\pi}{2}a=\pi \rightarrow a=\frac{1}{3}$

(ii) $\frac{7\pi}{2}a=2\pi+\left(-\frac{\pi}{2}a\right) \rightarrow \frac{7}{2}\pi a+\frac{\pi}{2}a=2\pi \rightarrow a=\frac{1}{2}$

[랑데뷰팁]- $\sin\alpha=\sin\beta$이면 $\alpha=n\pi+(-1)^n\beta$

구간의 길이가 $\frac{3\pi}{a}$이고 $f(x)$의 주기가 $\frac{2\pi}{a}$이므로 $\frac{7\pi}{2}a=3\pi-\left(-\frac{\pi}{2}a\right)$,

$\dfrac{7\pi}{2}a=4\pi+\left(-\dfrac{\pi}{2}a\right)$ 등은 생각하지 않아도 되겠다.

(i)에서 $a=\dfrac{1}{2}$이면 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)+b$가 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$을 지나므로

$2\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+b=0$에서 $b=\sqrt{2}$ 로 b가 유리수라는 조건에 모순

(ii)에서 $a=\dfrac{1}{3}$이면 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{3}x\right)+b$가 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$을 지나므로

$2\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+b=0$에서 $b=1$ 로 b가 유리수라는 조건을 만족한다.

따라서 $a=\dfrac{1}{3},\ b=1$

$30(a+b)=40$

8) 정답 ②

[풀이 :]

$f(x)=3\cos(ax)+b$가 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\pi}{4},\ k\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{9}{4}\pi,\ k\right)$을 지나므로

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}a\right)=\cos\left(\dfrac{9}{4}\pi a\right)$이 성립한다.

$0<a<\dfrac{8}{9}$에서 $-\dfrac{2}{9}\pi<-\dfrac{\pi}{4}a<0,\ 0<\dfrac{9}{4}\pi a<2\pi$이다.

따라서

$\dfrac{9\pi}{4}a=2\pi-\left(-\dfrac{\pi}{4}a\right)$ 또는 $\dfrac{9\pi}{4}a=2\pi+\left(-\dfrac{\pi}{4}a\right)$

(i) $\dfrac{9\pi}{4}a=2\pi-\left(-\dfrac{\pi}{4}a\right)\ \rightarrow\ \dfrac{9}{4}\pi a-\dfrac{\pi}{4}a=2\pi\ \rightarrow\ a=1$ (모순)

(ii) $\dfrac{9\pi}{4}a=2\pi+\left(-\dfrac{\pi}{4}a\right)\ \rightarrow\ \dfrac{9}{4}\pi a+\dfrac{\pi}{4}a=2\pi\ \rightarrow\ a=\dfrac{4}{5}$

[랑데뷰팁]- $\cos\alpha=\cos\beta$이면 $\alpha=2n\pi\pm\beta$

구간의 길이가 $\dfrac{3\pi}{a}$이고 $f(x)$의 주기가 $\dfrac{2\pi}{a}$이므로 $\dfrac{9\pi}{4}a=-2\pi-\left(-\dfrac{\pi}{4}a\right)$,

$\dfrac{9\pi}{4}a=-2\pi+\left(-\dfrac{\pi}{4}a\right)$ 등은 생각하지 않아도 되겠다.

따라서 $f(x)=3\cos\left(\frac{4}{5}x\right)+b$

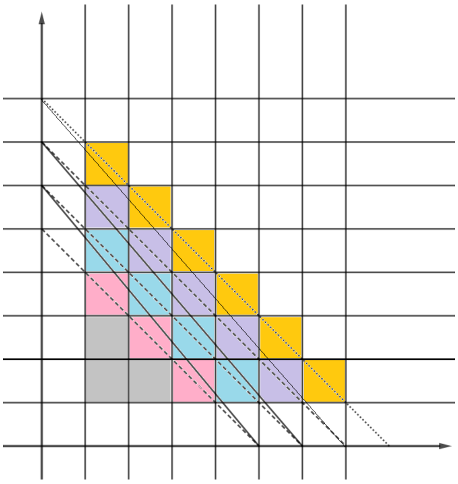
$f\left(\frac{5}{2}\pi\right)=2$이므로 $f\left(\frac{5}{2}\pi\right)=3+b=2$에서 $b=-1$

그러므로 $f(x)=3\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)-1$

$\therefore\ k=3\cos\frac{\pi}{5}-1$

9) 정답 164
[풀이 :]

$\mathrm{A}'(0,\ n+4)$이라 하면
삼각형 AOB의 내부에 포함된 정사각형 중 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 정사각형의 개수는 삼각형 $\mathrm{A}'\mathrm{OB}$의 내부 및 경계(빗변에 꼭짓점이 있는 경우)에 포함된 정사각형 중 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 정사각형의 개수와 같다.
삼각형 $\mathrm{A}'\mathrm{OB}$는 직각이등변 삼각형이고 빗변이 아닌 변의 길이를 l_n이라 할 때, $l_n=n+4$인 직각이등변 삼각형이다.



n	l_n	a_n
1	5	$1+2$
2	6	$1+2+3$
3	7	$1+2+3+4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$n+4$	$1+2+\cdots+n+n+1$

따라서 $a_n=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{n=1}^{8}a_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{9}n(n+1)-2\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{9\times10\times11}{3}-2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times328=164$$

10) 정답 385

[풀이 :]

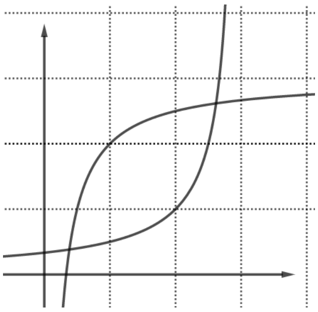
꼭짓점의 x, y좌표가 자연수이므로 제1사분면에서만 생각해보자.

(i) $n=3$일 때

$f(x)=\dfrac{1}{3-x}$이므로 점근선은 $x=3$이고 $(2,1)$을 지난다.

따라서 $f^{-1}(x)$는 점근선이 $y=3$이고 $(1,\ 2)$을 지난다.

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수가 $1^2=1$

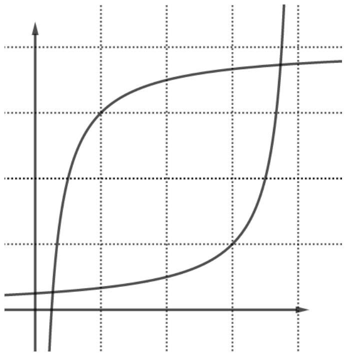


(ii) $n=4$일 때

$f(x)=\dfrac{1}{4-x}$이므로 점근선은 $x=4$이고 $(3,1)$을 지난다.

따라서 $f^{-1}(x)$는 점근선이 $y=4$이고 $(1,3)$을 지난다.

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수가 $2^2=2$

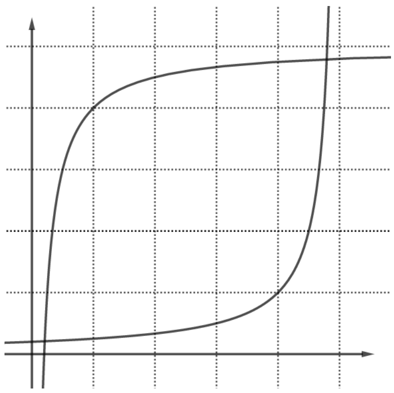


(iii) $n=5$일 때

$f(x)=\dfrac{1}{5-x}$이므로 점근선은 $x=5$이고 $(4,1)$을 지난다.

따라서 $f^{-1}(x)$는 점근선이 $y=5$이고 $(1,4)$을 지난다.

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수가 $3^2=9$



(iv) $n=a$일 때

$f(x)=\dfrac{1}{a-x}$이므로 점근선은 $x=a$이고 $(a-1,1)$을 지난다.

따라서 $f^{-1}(x)$는 점근선이 $y=a$이고 $(1,a-1)$을 지난다.

한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수가 $(a-2)^2$이다.

$\displaystyle\sum_{n=3}^{12} a_n$

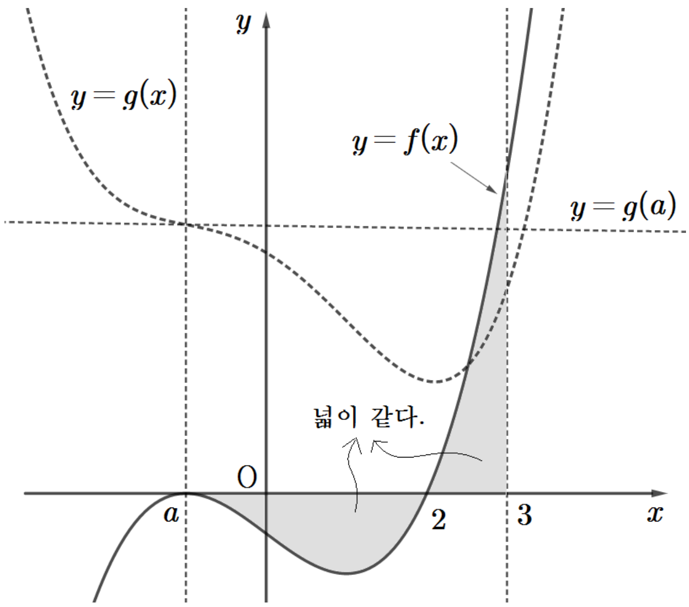
$$=\sum_{n=3}^{12}(n-2)^2=\sum_{n=1}^{10}n^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$$

11) 정답 432

[풀이 :]

함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나이므로 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다. 조건 (나)를 만족하기 위해서는 삼차방정식 $f(x)=0$이 $x=a$에서 중근을 가져야 하고 $f'(a)=0$이고 $g(a)=\int_2^a f(s)ds$의 최댓값이 양수이고

$g(a)=\int_3^a f(s)ds=0$이므로 $a<2$인 a에 대하여 $f(x)=4(x-a)^2(x-2)$라 할 수 있다.



$h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가지고 $a<2$이므로

$\int_a^2 \{4(x-a)^2(x-2)\}dx=-27$이이다.

따라서 $\dfrac{4(2-a)^4}{12}=27$ [공식 : 랑데뷰세미나 참고]

$\therefore\ a=-1$

따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$이다.

$f(5)=4\times36\times3=432$

[다른 계산]

$f(x)=4(x^2-2ax+a^2)(x-2)$

$\quad =4\{x^3-2(a+1)x^2+(a^2+4a)x-2a^2\}$

$h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가지므로

$\displaystyle\int_2^a f(x)dx=27$이고 $a<2$이므로

$$\int_a^2\{x^3-2(a+1)x^2+(a^2+4a)x-2a^2\}dx=-\frac{27}{4}$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2(a+1)}{3}x^3+\frac{a^2+4a}{2}x^2-2a^2x\right]_a^2$$

$$=4-\frac{16a+16}{3}+2a^2+8a-4a^2-\frac{1}{4}a^4+\frac{2a^4+2a^3}{3}-\frac{a^4+4a^3}{2}+2a^3$$

$$=-\frac{1}{12}a^4+\frac{2}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}a-\frac{4}{3}=-\frac{27}{4}$$

$a^4-8a^3+24a^2-32a-65=0$

$(a+1)(a-5)(a^2-4a+13)=0$에서 $a=-1$

따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$이다.

$f(5)=4\times36\times3=432$

[다른 풀이]

$\displaystyle g(x)=\int_t^x f(s)ds=\int_0^x f(s)\,ds-\int_0^t f(s)\,ds$에서

$\displaystyle h(3)=0$이므로 $\displaystyle g(a)=\int_0^a f(s)\,ds-\int_0^3 f(s)\,ds=0$이다.

$a=3$인 경우와 $a\neq3$인 경우를 생각할 수 있다.

(i) $a=3$일 때,

(가)에서 $f'(3)=0$이고

$h(t)$는 $t=2$에서 최댓값을 가지려면 $f(2)=0$이어야 한다.

따라서 $f(x)=4(x-2)(x^2+bx+c)$라 할 수 있다.

$f'(x)=4(x^2+bx+c)+4(x-2)(2x+b)$에서

$f'(3)=4(9+3b+c)+4\times1\times(6+b)$이고

$f'(3)=0$이므로

$\therefore\ c=-4b-15$

$f(x)=4(x-2)(x^2+bx-4b-15)$

$a=3$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가지므로 $g(3)=h(2)=27$

$g(3)=\int_{2}^{3} f(s)ds = 27$이다.

$$\int_{2}^{3}(x-2)\left(x^2+bx-4b-15\right)dx=\frac{27}{4}$$

$$\int_{2}^{3}\left\{x^3+(b-2)x^2-(6b+15)x+8b+30\right\}dx$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{b-2}{3}x^3-\frac{(6b+15)}{2}x^2+(8b+30)x\right]_2^3$$

$$\frac{65}{4}+\frac{19(b-2)}{3}-\frac{5(6b+15)}{2}+(8b+30)=\frac{27}{4}$$

$$\frac{19}{3}b-15b+8b=\frac{27}{4}-\frac{65}{4}+\frac{38}{3}+\frac{75}{2}-30$$

$$-\frac{2}{3}b=\frac{32}{3}$$

$\therefore\ b=-16$

따라서 $f(x)=4(x-2)\left(x^2-16x+49\right)$

이때 (나) 조건을 만족하기 위해서는 $f(x)=0$의 해는 $x=a$에서 중근을 가져야 하는데 모순이다.

(ii) $a\neq 3$일 때,

함수 $h(t)$가 $t=2$에서 최댓값을 갖기 위해서는 $f(2)=0$이고 $a<2$인 a에 대하여

$f(x)=4(x-a)^2(x-2)$꼴이다.

$$\begin{aligned} f(x)&=4\left(x^2-2ax+a^2\right)(x-2)\\ &=4\left\{x^3-2(a+1)x^2+\left(a^2+4a\right)x-2a^2\right\} \end{aligned}$$

$h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가지므로

$\int_{2}^{a} f(x)dx=27$이고 $a<2$이므로

$$\int_{a}^{2}\left\{x^3-2(a+1)x^2+\left(a^2+4a\right)x-2a^2\right\}dx=-\frac{27}{4}$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2(a+1)}{3}x^3+\frac{a^2+4a}{2}x^2-2a^2x\right]_a^2$$

$$=4-\frac{16a+16}{3}+2a^2+8a-4a^2-\frac{1}{4}a^4+\frac{2a^4+2a^3}{3}-\frac{a^4+4a^3}{2}+2a^3$$

$$=-\frac{1}{12}a^4+\frac{2}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}a-\frac{4}{3}=-\frac{27}{4}$$

$$a^4-8a^3+24a^2-32a-65=0$$

$(a+1)(a-5)(a^2-4a+13)=0$에서 $a=-1$
따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$이다.
이때 (나) 조건을 만족하기 위해서는 $f(x)=0$의 해는 $x=a$에서 중근을 가져야 하는데 $x=-1$이 중근이므로 만족한다.
$f(5)=4\times36\times3=432$

12) 정답 81
[풀이 :]

$$g(x)=\begin{cases} pf(x)-p & (x<a) \\ \dfrac{f(x)}{e^x}-p & (x\ge a) \end{cases}$$

(가)에서 $f'(a)=0$에서 $f(x)=k(x-a)^2+q$이다. $(k>0)$
(나)에서 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to a-}g(x)=g(a)\to pf(a)-p=\frac{f(a)}{e^a}-p\to\ f(a)=0 \text{ 또는 } p=\frac{1}{e^a}$$

또한, $g'(x)=\begin{cases} pf'(x) & (x<a) \\ \dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x} & (x\ge a) \end{cases}$에서 $\to f'(a)=0$이므로 $f(a)=0$이다.

$\therefore\ f(a)=0$
따라서 $f(x)=k(x-a)^2$ $(k>0)$

$x\ge a$일 때, $g(x)=\dfrac{k(x-a)^2}{e^x}-p$이다.

(다) 조건에서 $|h(x)-h(3a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이기 위해서는 함수 $g(x)$가 $x=3a$에서 극값을 가지면서 x축에 접해야 한다. 즉, $g'(3a)=0$, $g(3a)=0$이다.
[랑데뷰팁]
곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=h(3a)$는 그래프 개형상 $t\ne3a$일 때 항상 두 점에서 만나고 함수 $g(x)$의 그래프가 $x=3a$에서 x축에 접하지 않는 경우는 $|h(x)-h(3a)|$의 미분 가능하지 않는 점의 개수가 2이다.

(i) $g'(3a)=0$

$$g'(x)=k\frac{2(x-a)-(x-a)^2}{e^x}=k\frac{-(x-a)(x-a-2)}{e^x}$$

$g'(x)=0$의 해가 $x=a$, $x=a+2$이므로
$3a=a+2$에서 $a=1$ $(\because a>0)$
따라서 $f(x)=k(x-1)^2$

$$g(x)=\begin{cases} p\{k(x-1)^2\}-p & (x<1) \\ \dfrac{k(x-1)^2}{e^x}-p & (x \geq 1) \end{cases}$$

(ii) $g(3a)=g(3)=0$

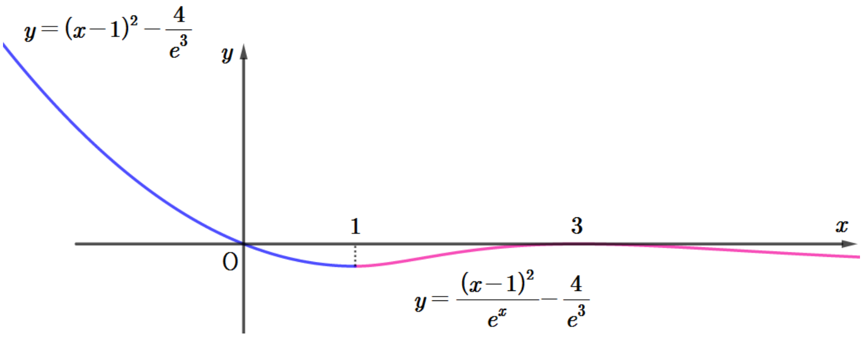
이므로 $\dfrac{k(3-1)^2}{e^3}-p=0$에서 $p=\dfrac{4k}{e^3}$

따라서 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{4k}{e^3}\{k(x-1)^2-1\} & (x<1) \\ \dfrac{k(x-1)^2}{e^x}-\dfrac{4k}{e^3} & (x \geq 1) \end{cases}$

실수 t에 대하여 $h(1)$의 값을 $k(t)$라 할 때 함수 $k(t)$는 $t=0$에서 최솟값을 가지므로

$\displaystyle\int_t^1 g(s)ds$가 $t=0$에서 최소가 되기 위해서는 $g(1)<0$이므로 $g(0)=0$일 때다.

따라서 $g(0)=0$에서 $k=1$이다.



$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{e^3}\{(x-1)^2-1\} & (x<1) \\ \dfrac{(x-1)^2}{e^x}-\dfrac{4}{e^3} & (x \geq 1) \end{cases}$$

따라서 $f(x)=(x-1)^2$이다.

$f(10)=9^2=81$