* 2018년 4월 시행 교육청 고3 수학 가형 30번.

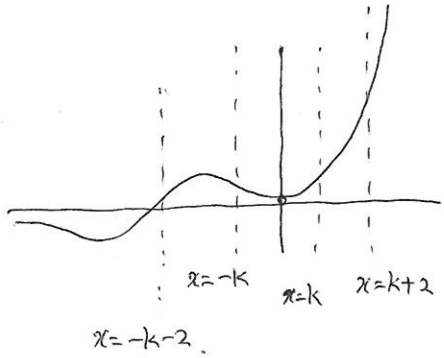
$f(x) = (ax^3+bx^2)e^x$ → $(t>0)$, $[-t, t]$ 에서 $f(x)$의 $Max = M(t)$, $min = m(t)$

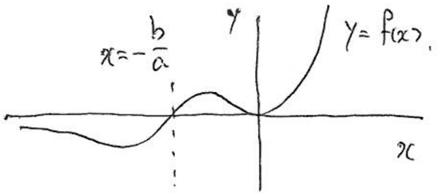
$f'(x) = (ax^3+(b+3a)x^2+2bx)e^x = x(ax^2+(b+3a)x+2b)e^x$.

(가) $M(t) = f(t)$ (나) $k>0$, $t \in [k, k+2]$, $m(t) = f(-t)$, (다) $\int_1^5 \{e^t \times m(t)\}\,dt = \frac{7}{3} - 8e$.

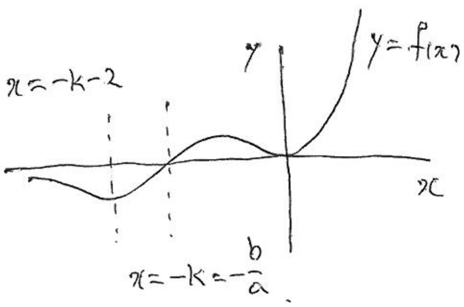
$f(k+1) = \frac{q}{p}e^{k+1} = ?$

(가) → $a>0$. $f(x) = x^2(ax+b)\cdot e^x$ (나)





이런 경우라면 $m(t) = 0$ $(\neq f(-t))$



즉 t는 변수, k는 상수. 그러므로 k의 위치를 그래프와 연계시키면 왼쪽 그림과 같다.

$\therefore k = \frac{b}{a}$. $f'(-k-2) = 0$.

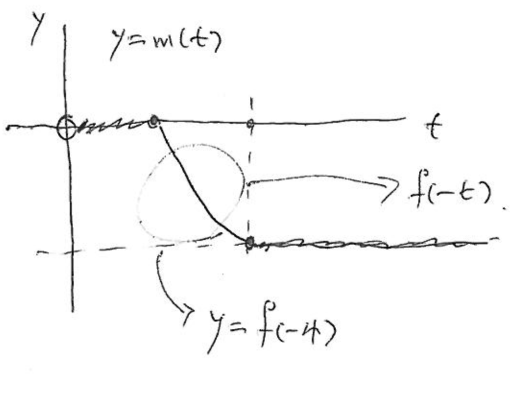
$f'(-k-2) = 0$ 에서 $a(-k-2)^2+(b+3a)(-k-2)+2b$

$= a\times\left(\frac{b}{a}+2\right)^2+(b+3a)\left(-\frac{b}{a}-2\right)+2b = \cancel{\frac{b^2}{a}}+4b+4a\cancel{-\frac{b^2}{a}}-3b\cancel{-2b}-6a\cancel{+2b} = b-2a = 0$.

$\therefore b = 2a$, $k = \frac{b}{a} = 2$.

$m(t)$의 개형을 정리해 보면, $(0, 2)$ 에서는 $m(t) = 0$, $[2, 4]$ 에서는 $m(t) = f(-t)$,

$[4, \infty)$ 에서는 $m(t) = f(-4)$.



$f(-4) = (-64a+16b)e^{-4} = -32a\cdot e^{-4}$

$(\because b = 2a)$

(다) $\int_1^5 \{e^t \times m(t)\}\,dt = \int_2^4 \{e^t \times f(-t)\}\,dt + \int_4^5 \{e^t \times f(-4)\}\,dt$

$= \int_2^4 \{e^t \times (-at^3 + 2at^2)\cdot e^{-t}\}\,dt + f(-4) \times \int_4^5 e^t\,dt$

$= \left[-\frac{a}{4}t^4 + \frac{2a}{3}t^3\right]_2^4 - 32ae^{-4}\cdot\left[e^t\right]_4^5$

$= 32ae^{\cancel{-4}}\cdot \cancel{e^4}(e-1)$

$= \left(-64a + \frac{128}{3}a\right) - \left(-4a + \frac{16}{3}a\right) - 32ae^{-4}(e^5 - e^4)$

$= -60a + \frac{112}{3}a - 32ae + 32a = \frac{-180+112+96}{3}a - 32ae = \frac{28}{3}a - 32ae = \frac{7}{3} - 8e.$

$\therefore a = \frac{1}{4}.$ $\quad f(x) = \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^x.$ $\quad \therefore f(k+1) = f(3) = \left(\frac{27}{4} + \frac{9}{2}\right)e^3.$

$\therefore p+q \Rightarrow \frac{27}{4} + \frac{9}{2} = \frac{27+18}{4} = \frac{45}{4}$ 에서 $p=4$, $q=45$ 이므로 $4+45=49$ //