

* 2019학년도 평가원 6월 수학 기형 2번.

연간구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} 2\sin^3 x & (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}) \\ \cos x & (\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$

→ 실수 t 에 대하여 조건 (가), (나) 를 만족시키는 모든 실수 k 의 개수 $\longrightarrow g(t)$.

(가) $-\frac{\pi}{2} < k < \frac{3\pi}{2}$, (나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 가 $x=k$ 에서 미분불가.

문제와 별도 (정의역 임의제한 $\times$) 로 $2\sin^3 x$ 를 정리하면

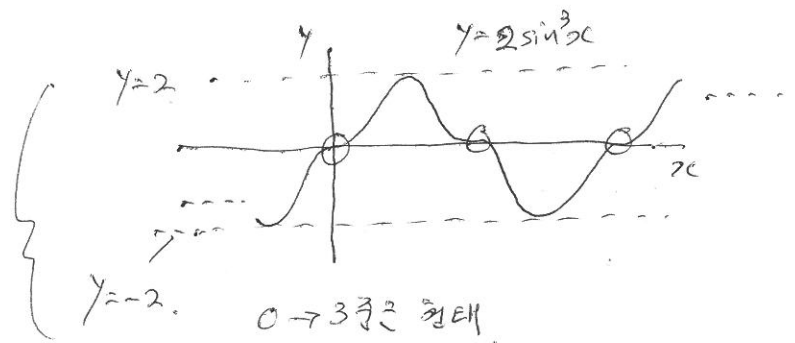
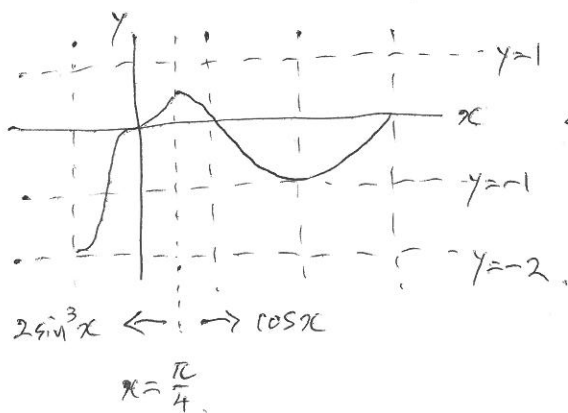
1) $x \in \mathbb{R}$, 3) $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 2), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, -2)$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2\sin^3 x) \rightarrow$ 발산 (진동)

$x \rightarrow -\infty (2\sin^3 x) \rightarrow$ 발산 (진동).

$\sin^3 x$ 는 $(\sin x)^3$ 이므로 3중근의 형태

따라서 함수 $f(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



* $\rightarrow$ 문제에서 요구하는 미분불가능 판단의 대상이 되는 함수는 위 $f(x)$ 가 아니고,

$\sqrt{|f(x)|}$ 형에 주의해야 한다. 결국 $\sqrt{|\sin^3 x|}$ ($x=0$) 와, $\sqrt{1+\cos x}$ ($x=\pi$) 일 때,

미분가능 여부를 확인하라는 말이다. (그 외의 부분에서는 절댓값을 씌었을 때 y 값이

0인 부분에서 접선의 기울기가 0이 아니므로 더 고민할 여지가 없다. 즉, 접선의 기울기가

0일 때, 절댓값 씌우고 루트 씌운 함수는 항상 미분가능인지, 항상 미분불가능인지,

아니면 case by case로 확인해야 하는 것인지 생각해 봐야 하는 문제)

* $\rightarrow$ 평소에 기본함수 그래프와 다양한 변형들을 연습했을 경우, 생각보다 굉장히

단순해질 수도 있는 문제이다.

* $\rightarrow$ 두 가지 ($\sqrt{|\sin^3 x|}$, $\sqrt{1+\cos x}$) 를 먼저 살펴보면,

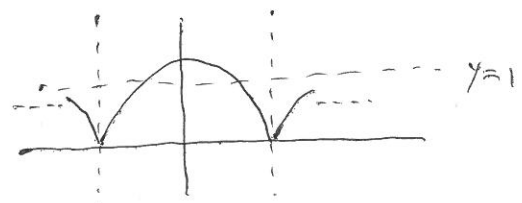
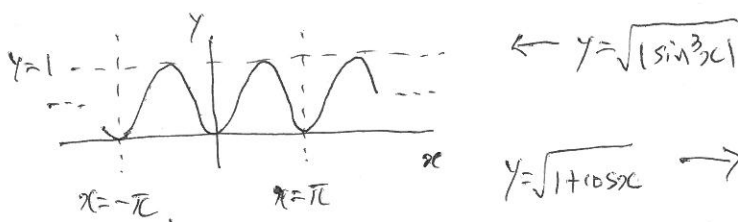
(A) $\sqrt{|\sin^3 x|}$, $x=0$ 일 때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|\sin^3 x|} - \sqrt{|\sin^3(0^+)|}}{x - 0(+)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin^3 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \times \sqrt{\sin x}}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{|\sin^3 x|} - \sqrt{|\sin^3(0^-)|}}{x - 0(-)} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-\sin^3 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x \times \sqrt{-\sin x}}{x} = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^+}} \right\} \text{이분가능.}$$

(B) $\sqrt{1+\cos x}$, $x=\pi$ 일 때 ($\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{|1+\cos x|}$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{1+\cos(\pi^+)}}{x - \pi(+)} &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+\cos(x+\pi)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \sqrt{\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{1+\cos(\pi^-)}}{x - \pi(-)} &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+\cos(x+\pi)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \times \sqrt{\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^+}} \right\} \text{이, } \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(A)와 (B)의 그래프는 참고로 다음과 같다.



* 이제 다시 $f(x)$ 의 그래프에서 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 를 구하고,

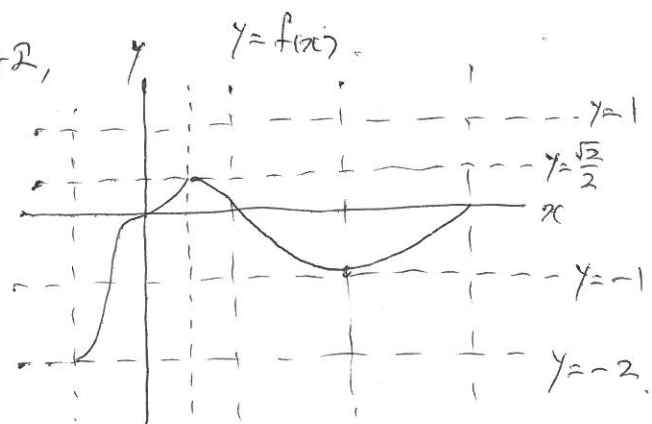
이분가능 개수 $g(t)$ 의 항숫값을 찾아야 한다.

$$(t > \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad g(t) = 1, \quad (t = \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad g(t) = 1.$$

$$(0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad g(t) = 3, \quad (t = 0) \quad g(t) = 2.$$

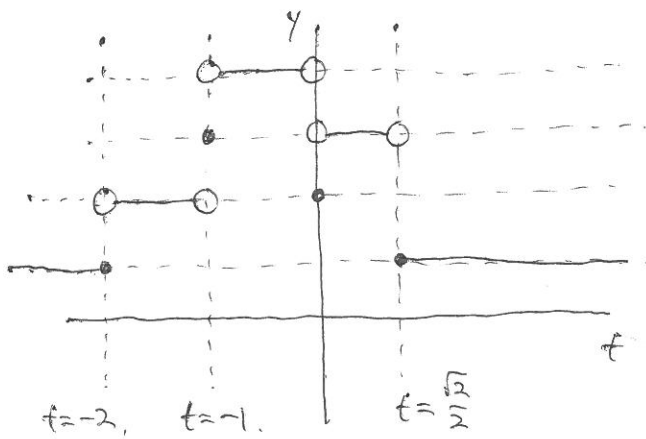
$$(-1 < t < 0) \quad g(t) = 4, \quad (t = -1) \quad g(t) = 3$$

$$(-2 < t < -1) \quad g(t) = 2, \quad (t \leq -2) \quad g(t) = 1.$$



t (±)만큼 내리고 x축 대칭시킨 뒤 $\sqrt{}$ 씌운 상태에서
 구간, $(\sqrt{|f(x)-t|})$.

따라서 함수 $g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$\Rightarrow$ 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$ 와

함수 $g(t)$ 의 합성함수 $h(g(t))$ 가 실수 전체의

집합에서 연속이다. (시험장에서는 $g(t)$ 값이

4개 (1, 2, 3, 4) 뿐이므로 바로 사차함수 식을

도출해서 풀 수도 있다)

$h(x)$ 에서 x 값이

될 수 있는 값들.

* 연속 (한쪽 값 = 극한값) / 극한값 존재 (유극한값 = 좌극한값)

$$(i) h(g(-2)) = \lim_{t \rightarrow -2+} h(g(t)) \Rightarrow h(1) = h(2)$$

(어떤 경우는 유극한만, 또는 좌극한만 또는 좌극한 모두 따지는지 생각)

$$(ii) h(g(-1)) = \lim_{t \rightarrow -1-} h(g(t)) = \lim_{t \rightarrow -1+} h(g(t)) \Rightarrow h(3) = h(2) = h(4)$$

$$(iii) h(g(0)) = \lim_{t \rightarrow 0-} h(g(t)) = \lim_{t \rightarrow 0+} h(g(t)) \Rightarrow h(2) = h(4) = h(3)$$

$$(iv) h(g(\frac{\sqrt{2}}{2})) = \lim_{t \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}-} h(g(t)) \Rightarrow h(1) = h(3)$$

$$\therefore h(1) = h(2) = h(3) = h(4) \quad (\text{이 값들이 같으면 조건 만족, 이 값들이 0 이라는}$$

결과는 도출되지 않은 상태)

$$\therefore h(1) = h(2) = h(3) = h(4) = \alpha \text{ 라 하면}$$

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + \alpha$$

$$g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = a = 1, \quad g(0) = b = 2, \quad g(-1) = c = 3$$

$$\therefore h(a+5) - h(b+3) + c = h(6) - h(5) + 3$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 = (5-1) \cdot 24 + 3 = 4 \cdot 24 + 3 = 96 + 3 = 99 //$$