

2021
수특

2021 EBS 수능특강 수학1 6. 수열의 합(1)

이 콘텐츠는 「콘텐츠산업 진흥법」, 「저작권법」에 따라 보호됩니다.
본 콘텐츠의 무단 배포 시, 콘텐츠산업 진흥법과 저작권법에 의거하여 책임을 질 수 있습니다.

p89

1번 단순 변형

1. $\sum_{k=1}^5 a_k = 20$, $\sum_{k=1}^5 b_k = 50$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (2a_k - 3b_k)$

의 값을 구하시오.

- ① -140 ② -110 ③ 0
④ 120 ⑤ 130

p91

3번 단순 변형

3. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 15 \times 16$ 의 값을 구하시오.

- ① 1340 ② 1350 ③ 1360 ④ 1470 ⑤ 1380

p89

2번 단순 변형

2. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_{k+1} = 18$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공차는?

- ① -2 ② $-\frac{19}{10}$ ③ $-\frac{9}{5}$
④ $-\frac{17}{10}$ ⑤ $-\frac{8}{5}$

p91

4번 단순 변형

4. 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 이차방정식 $(n+1)x^2 - (n^2 - n - 2)x - 2 = 0$

의 두 근의 합을 a_n 이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은?

- ① 35 ② 40 ③ 45 ④ 50 ⑤ 55

p93

5번 단순 변형

5. $\sum_{k=1}^n (\sqrt{k^2 - k} - \sqrt{k^2 + k}) = -\sqrt{110}$ 일 때, 자연수 n 의 값은?

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

p95

7번 단순 변형

7. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여

$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{18} \frac{1}{a_{k+1}}$ 의 값은?

p93

6번 단순 변형

6. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 3$ 이고, 모든 자연수 n

에 대하여 $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = 2 - n^2$

을 만족시킨다. a_{10} 의 값을 구하시오.

- ① 80 ② 81 ③ 82 ④ 83 ⑤ 84

p95

8번 단순 변형

8. 첫째항이 3이고 공차가 3 등차수열 $\{a_n\}$

에 대하여 $\sum_{k=1}^{11} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}(6 - \sqrt{3})$ ② $\frac{1}{3}(7 - \sqrt{3})$ ③ $\frac{1}{3}(8 - \sqrt{3})$
 ④ $\frac{1}{3}(9 - \sqrt{3})$ ⑤ $\frac{1}{3}(10 - \sqrt{3})$

p96

1번 단순 변형

9. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^9 a_k = \sum_{k=1}^6 (a_k - 5) \text{ 일 때, } a_8 \text{의 값은?}$$

- ① - 10 ② - 8 ③ - 6 ④ - 4 ⑤ - 2

p96

2번 단순 변형

$$10. \sum_{k=1}^{10} k(2k^2 + 2k + 2) - \sum_{k=1}^{10} (k^3 + k + 1)$$

정답 및 해설

1	①	2	③	3	③	4	①	5	④
6	③	7	$\frac{9}{20}$	8	①	9	①	10	3860

1)정답①

[출제범위: 수열의 합]

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 (2a_k - 3b_k) &= 2 \sum_{k=1}^5 a_k - 3 \sum_{k=1}^5 b_k \\ &= 2 \times 20 - 3 \times 50 \\ &= -110\end{aligned}$$

필수 개념

▶ Σ 의 성질

$$\odot \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\odot \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\odot \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\odot \sum_{k=1}^n c = cn$$

2)정답③

[출제범위: 수열의 합]

$$a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = a_3 - a_4 = \dots = a_{10} - a_{11} = -d$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_{k+1} = -10d$$

따라서 $-10d = 18$ 에서

$$d = -\frac{9}{5}$$

다른 풀이

$\sum_{k=1}^{10} a_k$ 은 등차수열 a_n 의 제1항부터 제10항까

지의 합이고, $\sum_{k=1}^{10} a_{k+1}$ 은 등차수열 a_n 의 제

2항부터 제 11항까지의 합이다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_{k+1} &= \frac{10\{(2a_1 + (10-1)d)\}}{2} - \frac{10\{(2a_2 + (10-1)d)\}}{2} \\ &= \frac{10\{(2a_1 + (10-1)d)\}}{2} - \frac{10\{(2(a_1 + d) + (10-1)d)\}}{2} \\ &= 5(2a_1 + 9d) - 5(2a_1 + 11d) \\ &= -10d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_{k+1} &= -10d \\ a_1 - (a_1 + 10d) &= -18 \\ -10d &= -18 \\ d &= -\frac{9}{5}\end{aligned}$$

필수 개념

▶ 등차수열의 일반항

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad a_1 \text{은 초항, } d \text{는 공차}$$

필수 개념

▶ 등차수열의 합

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{n(a + a_n)}{2}$$

a 는 초항, d 는 공차, a_n 은 마지막 항

3)정답③

[출제범위: 수열의 합]

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 15 \times 16$$

$$= \sum_{k=1}^{15} k(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{15} (k^2 + k)$$

$$= \sum_{k=1}^{15} k^2 + \sum_{k=1}^{15} k$$

$$= \frac{15 \times 16 \times 31}{6} + \frac{15 \times 16}{2}$$

$$= 1240 + 120 = 1360$$

필수 개념

$$\textcircled{\bullet} 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\textcircled{\bullet} 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\textcircled{\bullet} 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

4)정답①

[출제범위: 수열의 합]

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2 - n - 2}{n + 1} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{n+1} \\ &= n-2 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{10} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{10} (k-2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 2 \\ &= \frac{10 \times 11}{2} - 2 \times 10 \\ &= 55 - 20 = 35 \end{aligned}$$

다른 풀이

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2 - n - 2}{n + 1} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{n+1} \\ &= n-2 \end{aligned}$$

에서 a_n 은 초항이 -1이고 공차가 1인 등차수열이다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \\ &= -1 + 0 + 1 + \cdots + 8 \\ &= \frac{10 \times (-1+8)}{2} \\ &= 35 \end{aligned}$$

필수 개념

▶ 등차수열의 합

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{n(a+a_n)}{2}$$

a 는 초항, d 는 공차, a_n 은 마지막 항

필수 개념

▶ 이차방정식의 근과 계수와의 관계

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c = 0 \text{의 두 근을 } \alpha, \beta \text{라고 할 때,} \\ &\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

필수 개념

▶ 등차수열의 합

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{n(a+a_n)}{2}$$

a 는 초항, d 는 공차, a_n 은 마지막 항

5)정답④

[출제범위: 수열의 합]

$$\sqrt{k^2 - k} - \sqrt{k^2 + k} = \sqrt{(k-1)k} - \sqrt{k(k+1)}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k^2 - k} - \sqrt{k^2 + k}) &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{(k-1)k} - \sqrt{k(k+1)}) \\ &= (\sqrt{0 \times 1} - \sqrt{1 \times 2}) + (\sqrt{1 \times 2} - \sqrt{2 \times 3}) \\ &\quad + (\sqrt{2 \times 3} - \sqrt{3 \times 4}) + \cdots \\ &\quad + \{ \sqrt{(n-2)(n-1)} - \sqrt{(n-1)n} \} \\ &\quad + \{ \sqrt{(n-1)n} - \sqrt{n(n+1)} \} \\ &= (\sqrt{0 \times 1} - \sqrt{1 \times 2}) + (\sqrt{1 \times 2} - \sqrt{2 \times 3}) \\ &\quad + (\sqrt{2 \times 3} - \sqrt{3 \times 4}) + \cdots \end{aligned}$$

$$+ \{ \sqrt{(n-1)n} - \sqrt{n(n+1)} \}$$

$$= -\sqrt{n(n+1)}$$

$-\sqrt{n(n+1)} = -\sqrt{110}$ 에서 양변을 제곱하면

$$n(n+1) = 110$$

$$n^2 + n - 110 = 0$$

$$(n-10)(n+11) = 0$$

n 은 자연수이므로

$$n = 10$$

필수 개념

▶ Σ 의 정의

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

6)정답③

[출제범위: 수열의 합]

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_n - a_{n+1})$$

$$= a_1 + (-a_2 + a_2) + (-a_3 + a_3) + (-a_4 + a_4) + \dots$$

$$+ (-a_n + a_n) - a_{n+1}$$

$$= a_1 - a_{n+1}$$

$$a_1 = 3, \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = 2 - n^2 \text{이므로}$$

$$3 - a_{n+1} = 2 - n^2$$

$$a_{n+1} = n^2 + 1$$

$$a_{10} = 9^2 + 1 = 82$$

$$7) \text{정답 } \frac{9}{20}$$

[출제범위: 수열의 합]

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \text{이므로}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)}{3} \times \{n+2 - (n-1)\}$$

$$= \frac{n(n+1)}{3} \times 3$$

$$= n(n+1)$$

$$a_1 = 2$$

따라서 $n = 1$ 부터 $a_n = n(n+1)$ 을 만족시킨다.

$$a_{k+1} = (k+1)(k+2)$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{18} \frac{1}{a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{18} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{18} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right)$$

$$= \frac{9}{20}$$

필수 개념

▶ 부분분수

$$\frac{C}{A \cdot B} = \frac{C}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$$

8)정답①

[출제범위: 수열의 합]

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항과 공차가 모두 3인 등차수열이므로

$$a_n = 3 + 3(n-1)$$

$$= 3n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})}$$

$$= \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k}$$

이때 $a_{k+1} - a_k = 3$ 이므로

$$\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{11} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{11} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \{ (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}) + \dots$$

$$+ (\sqrt{a_{12}} - \sqrt{a_{11}}) \}$$

$$= \frac{1}{3} (\sqrt{a_{12}} - \sqrt{a_1})$$

따라서 $a_1 = 3$, $a_{12} = 36$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{11} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = \frac{1}{3} (\sqrt{36} - \sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{3} (6 - \sqrt{3})$$

필수 개념

▶ Σ 의 정의

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

9)정답①

[출제범위: 수열의 합]

$$\sum_{k=1}^9 a_k = \sum_{k=1}^6 (a_k - 5) \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^9 a_k = \sum_{k=1}^6 a_k - \sum_{k=1}^6 5$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_6) - 5 \times 6$$

정리하면

$$a_7 + a_8 + a_9 = -30 \quad \text{㉠}$$

세 수 a_7, a_8, a_9 는 이 순서대로 등차수열을

이루므로

$$a_7 + a_9 = 2a_8 \quad \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$3a_8 = -30$$

따라서 $a_8 = -10$

다른 풀이

$$\sum_{k=1}^9 a_k = \sum_{k=1}^6 (a_k - 5) \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^9 a_k = \sum_{k=1}^6 a_k - \sum_{k=1}^6 5$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_6) - 5 \times 6$$

정리하면

$$a_7 + a_8 + a_9 = -30$$

a_n 이 등차수열 이므로

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_7 = a + 6d, \quad a_8 = a + 7d, \quad a_9 = a + 8d$$

$$a_7 + a_8 + a_9 = -30 \text{에서}$$

$$(a + 6d) + (a + 7d) + (a + 8d) = -30$$

$$3a + 21d = -30$$

$$a + 7d = -10$$

$$a_8 = -10$$

필수 개념

▶ 등차수열의 일반항

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad a_1 \text{은 초항, } d \text{는 공차}$$

필수 개념

▶ 등차중항

세 수 a, x, b 가 등차수열을 이룰 때,

$2x = a + b$ 이고, x 를 등차중항이라고 한다.

10)정답3860

[출제범위: 수열의 합]

$$\begin{aligned}& \sum_{k=1}^{10} k(2k^2 + 2k + 2) - \sum_{k=1}^{10} (k^3 + k + 1) \\&= \sum_{k=1}^{10} \{2k^3 + 2k^2 + 2k - (k^3 + k + 1)\} \\&= \sum_{k=1}^{10} (2k^3 + 2k^2 + 2k - k^3 - k - 1) \\&= \sum_{k=1}^{10} (k^3 + 2k^2 + k - 1) \\&= \sum_{k=1}^{10} k^3 + \sum_{k=1}^{10} 2k^2 + \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 1 \\&= \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} - 10 \\&= 55^2 + 770 + 55 + 10 \\&= 3025 + 770 + 55 + 10 \\&= 3860\end{aligned}$$

필수 개념

▶ 자연수와 거듭제곱의 합

$$\textcircled{\bullet} 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{\bullet} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\&= \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

$$\textcircled{\bullet} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$