

* 2018년 7월 시행 교육청 234학 가형 30번.

$$ab < 0 \rightarrow (a > 0, b < 0) \text{ or } (a < 0, b > 0)$$

$$f(x) = (ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$1) x \in \mathbb{R} \quad (a > 0) \downarrow \quad (a < 0) \downarrow$$

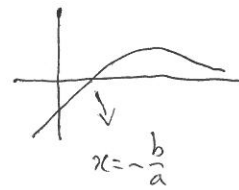
$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0(+), 0(-)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty(-), \infty(+)$$

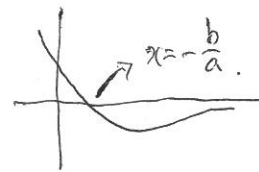
$$3) (0, b)$$

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \Rightarrow g'(x) = f(x)$$

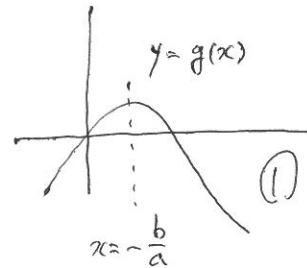
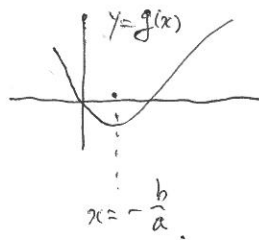
(a > 0)



(a < 0)



↓ → 그래프 적분. ↓



$$g(x) - k \geq x f(x) \quad (k > 0)$$

→ 양의 실수 x 가 존재, 그 때의 x 값 중 최솟값을 $h(k)$. ($h(k)$ 는 x 값이다)

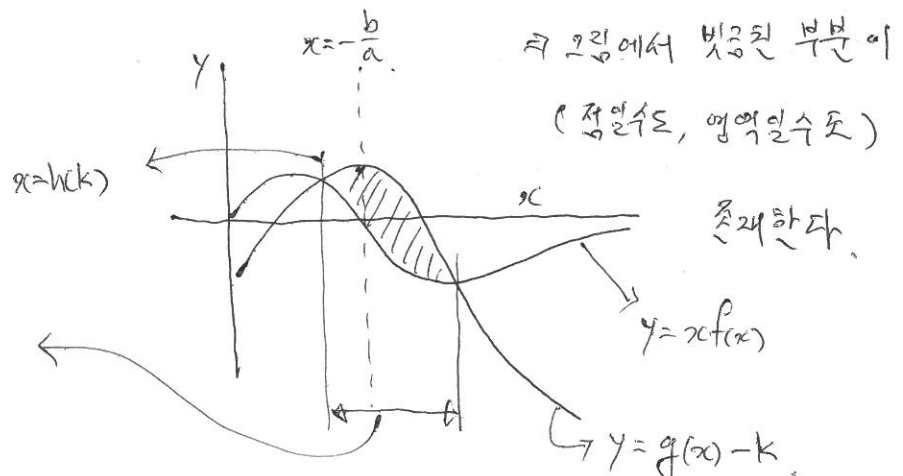
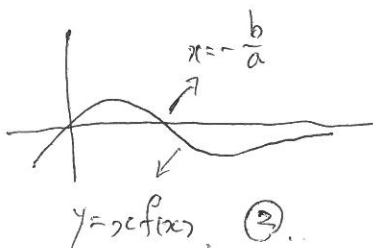
(가) $g(x)$ 는 극대값 α , $h(\alpha) = 2$. → 위의 그림에서 ($a < 0$) 경우에 해당,

(나) $h(k)$ 존재할 때, $k \leq 8e^{-2}$. ($g'(x) = f(x)$ 이므로 $f(-\frac{b}{a}) = 0$ 에서 부호를 판단하는 경우도...

$g(x) - k$ ($k > 0$) : $g(x)$ 의 그래프를 밑으로 내린 그래프가 된다.

$$x f(x) = x(ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$$

$\Rightarrow g(x) - k \geq x f(x)$ 을 만족시키는 양의 실수 x 가 존재.



빛금친 부분이 존재하는 x 구간,

그 중 최솟값이 $h(k)$

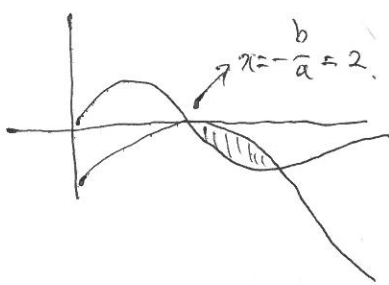
이 그림에서 빛금친 부분이
(점일수도, 영역일수도)

존재한다.

(가)에서 $h(x)=2$ 를 해석할 수 있어야 한다.

→ $g(x)$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로 x 만큼 이동시켰을 때, 위의 영역 중 x 좌표값이 2.

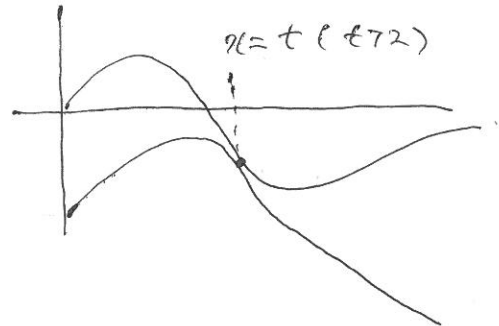
$g(x)$ 의 극댓값이 x 이므로 $g(x)-x$ 의 극댓값은 0이다.



$$\therefore b = -2a,$$

(나)에서 K 값이 최대인 경우는

아래와 같이 접할 때이다.



접점의 x 좌표를 t ($t > 2$)라 하면

$$1. g(t) - 8e^{-2} = tf(t)$$

$$2. g'(t) = f(t) + tf'(t) \rightarrow f'(t) = 0 \quad (\because g'(x) = f(x))$$

$$\therefore f'(t) = \left(a - \frac{a}{2}x - \frac{b}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = 0 \text{에서 } x=t = \frac{a - \frac{b}{2}}{\frac{a}{2}} = 2 - \frac{b}{a} = 4.$$

$$\therefore g(4) - 8e^{-2} = 4f(4) = 4(4a+b)e^{-2}$$

$$g(4) = \int_0^4 (ax+b)e^{-\frac{x}{2}} dx = \int_0^4 (ax-2a)e^{-\frac{x}{2}} dx \quad \begin{cases} u = -2e^{-\frac{x}{2}} & v = ax-2a \\ u' = e^{-\frac{x}{2}} & v' = a \end{cases}$$

$$= \left[(ax-2a)(-2e^{-\frac{x}{2}}) \right]_0^4 - \int_0^4 -2ae^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= (2a \times (-2e^{-2})) - (-2a \times (-2)) - \left[4ae^{-\frac{x}{2}} \right]_0^4$$

$$= -4ae^{-2} - 4a - (4ae^{-2} - 4a) = -8ae^{-2} = g(4)$$

$$\therefore g(4) - 8e^{-2} = -8ae^{-2} - 8e^{-2} = 4f(4) = 4(4a+b)e^{-2} = 4(4a-2a)e^{-2}$$

$$\therefore -8a - 8 = 8a. \quad \therefore a = -\frac{1}{2}, b = 1 //$$

* $g(x) - k \geq x f(x)$ 인 조건이 있으면 보통의 경우 $g(x) - x f(x) \geq k$ 형태로 (함수들의 부등호가 아니고 함수와 상수간의 부등호) 접근하는 것이 일반적이데 이 문제에서 나오는 함수들의 그래프가 원이므로 백형없이 접근할 수도 있다.

(가)에서 $g(x)$ 의 극댓값은 α , $h(x) = 2$, $\therefore a < 0, b > 0$

$h(k)$ 는 $g(x) - k \geq x f(x)$ 을 만족시키는 x 의 최솟값이므로 $g(x)$ 의 극댓값이 α 라면

$g(x) - \alpha$ 의 극댓값은 0이다. $\therefore$ 조건을 만족시키는 x 의 최솟값이 2가 된다.

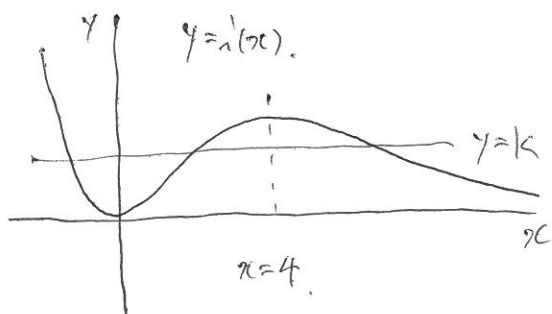
$\therefore g'(x) = f(x) = 0$ 을 만족시키는 x 는 $x = -\frac{b}{a}$ 이고, 이 때 $x = 2$ 이므로 $b = -2a$.

* $g(x) - x f(x) = \lambda(x) \geq k$ 을 만족하는 k 의 Max = $8e^{-2}$ (조건 4)

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^x (at - 2a) e^{-\frac{t}{2}} dt \\
 &= \left[(at - 2a)(-2e^{-\frac{t}{2}}) \right]_0^x - \int_0^x -2ae^{-\frac{t}{2}} dt \\
 &= (-2ax + 4a)e^{-\frac{x}{2}} - 4a - (4ae^{-\frac{x}{2}}) + 4a \quad \leftarrow [4ae^{-\frac{t}{2}}]_0^x \\
 &= -2axe^{-\frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

$\left\{ \begin{array}{l} u = -2e^{-\frac{t}{2}}, \quad v = at - 2a \\ u' = e^{-\frac{t}{2}}, \quad v' = a \end{array} \right.$

$$\therefore \lambda(x) = -2axe^{-\frac{x}{2}} - (ax^2 - 2ax)e^{-\frac{x}{2}} = (-ax^2 e^{-\frac{x}{2}}), \quad (a < 0)$$



$$\lambda'(x) = \left(-2ax + \frac{ax^2}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \frac{ax}{2} (x-4) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\therefore (x > 0) \text{ } k \text{의 최댓값은 } \lambda(4) = 8e^{-2}$$

$$\therefore \lambda(4) = -16ae^{-2} = 8e^{-2}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, \quad b = 1 //$$