1. (가)의 $f(0)=f(6)=0$만 가지고 할 수 있는 것은 없다. 인수정리를 이용하여 $f(x)=x(x-6)(x-a)$(단, a는 상수)로 식을 세울 순 있지만, **아무 생각 없이 식부터 세우고 들어가는 습관은 문제 전체를 '수식적 관점'으로만 바라보게 할 가능성이 크므로 지양하자.** 당연히 식부터 세워야 하는 문제도 존재하지만, 그 경우 식으로 접근해야 할 이유가 반드시 존재한다. 중요한 점은 '아무 생각 없이 식부터 세우는 습관'이 나쁘다는 것이다.

   조건 (나)는 까다로워 보이지만, 'k의 값에 관계 없이'에 주목하면 간단히 처리할 수 있다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-k)$가 서로 다른 세 점에서 만날 때의 모든 k를 따지기는 거의 불가능하다. **〈Chapter 6〉의 항등식 파트에서 배운 함수 특정과 비슷한 느낌으로 계산에 용이한 k를 선정하자.**

   두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만날 때 **k의 값에 관계없이** $\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)+f(x-k)\}dx=0$이 성립하므로 복잡한 k의 값까지 일일이 따질 필요 없이 **계산에 용이한 k의 값을 대입하여 미지수를 밝혀내면 된다.**

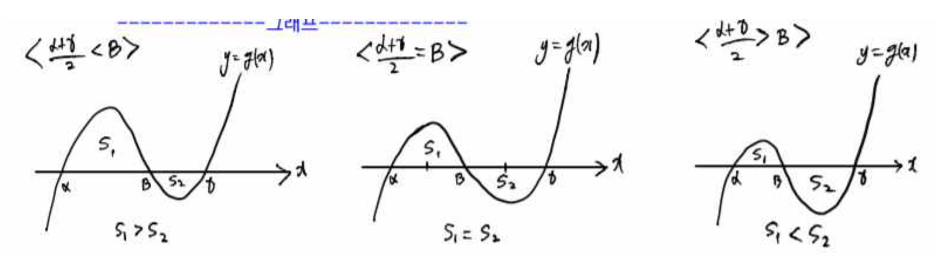
   두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만날 때, 가장 간단하면서도 계산하기 편한 k의 값은 0이므로 $k=0$일 때를 관찰하자. $k=0$일 때 $-f(x-k)$는 $-f(x)$가 된다. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=-f(x)$는 x축에 대하여 서로 대칭이며 서로 다른 세 점 $(0,f(0))$, $(\beta,f(\beta))$, $(6,f(6))$ $(0<\beta<6)$에서 만나므로 정적분을 계산하면 다음과 같다.

   $$\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)+f(x-k)\}dx=\int_{0}^{6}\{f(x)+f(x)\}dx=2\int_{0}^{6}f(x)dx=0$$

   $$\therefore \int_{0}^{6}f(x)dx=0$$

2. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=f(6)=0$을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{0}^{6}f(x)dx=0$이다. 인수정리를 통해 $f(x)=x(x-6)(x-a)$(단, a는 상수)로 식을 세워 $\int_{0}^{6}x(x-6)(x-a)dx=0$을 푼 다음 a의 값을 구할 수도 있지만, 그래프를 바탕으로 사고하는 것을 추천한다.

   ※ **삼차함수 $g(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 세 점 $(\alpha,g(\alpha))$, $(\beta,g(\beta))$, $(\gamma,g(\gamma))$ (단, $\alpha<\beta<\gamma$) 에서 만날 때, 세 점 간의 거리는 $g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이에도 영향을 준다.** - 〈Chapter 4. 다항함수〉-------------그래프-------------



이를 이 문제에도 적용해 보자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 나머지 한 점의 x좌표를 a라고 할 때,

$a \neq 3$이면 $\int_0^6 f(x)dx \neq 0$이다. $\int_0^a |f(x)|dx$와 $\int_a^6 |f(x)|dx$의 값이 서로 다르기 때문이다.

$a=3$이면 $\int_0^6 f(x)dx=0$이다. $\int_0^a |f(x)|dx$와 $\int_a^6 |f(x)|dx$의 값이 서로 같기 때문이다. 따라서 $a=3$이다.

3. 다음으로 문제 속 그림을 만족시키는 k의 값을 구하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 만나는 교점 중 한 교점의 x좌표가 4이므로 $f(4)=-f(4-k)$이다.

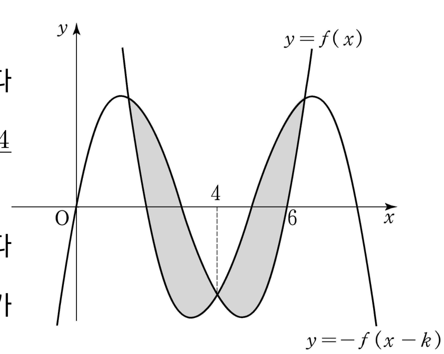
$f(x)=x(x-3)(x-6)$이므로
$4(4-3)(4-6)=-(4-k)(4-k-3)(4-k-6)$
$-8=(k-4)(k-1)(k+2)$, $k^3-3k^2-6k+16=0$

조립제법을 사용하면 $(k-2)(k^2-k-8)=0$
$\therefore$ $k=2$ 또는 $k=\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}\ (=3.\cdots)$ 또는 $k=\dfrac{1-\sqrt{33}}{2}\ (=-2.\cdots)$

실전에서 k의 범위를 따질 시간이 없다면 평가원을 믿고 $k=2$를 고르는 게 옳은 선택이다. 출제자가 의도한 사고과정을 모두 거친 다음 최종적인 계산만 남은 순간에 평가원이 $\int_0^{\frac{1\pm\sqrt{33}}{2}} f(x)dx$라는 매우 복잡한 계산을 하도록 문제를 설계했을 확률은 지극히 낮기 때문이다. 그러나 지금은 기출을 공부하고 분석하는 과정이므로 k의 범위를 정확히 따져 보자.

우선, '실수인' k의 값이 3개나 등장한 이유부터 알아야 한다. 우리는 $f(4)=-f(4-k)$를 통해 k에 관한 방정식을 얻었는데, **함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 점 $(4, f(4))$를 지나는 경우가 '3가지'이기 때문에 가능한 실수 k의 값(=방정식의 실근)도 3개일 수밖에 없다.**

문제 속 조건에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나고 가운데 교점의 x좌표가 4여야 한다.
하지만



(i) $k=\dfrac{1-\sqrt{33}}{2}$인 경우 두 함수의 그래프의 서로 다른 세 교점 중 가장 오른쪽에 위치한 교점의 x좌표가 4가 되고,
(ii) $k=\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$인 경우 두 함수의 그래프의 서로 다른 세 교점 중 가장 왼쪽에 위치한 교점의 x좌표가 4가 되어 조건을 만족시키지 못한다.

※ $k=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{2}$ 인 경우 두 함수의 그래프의 교점의 개수가 정확히 몇 개인지 실전에서는 알기 어렵고 알 필요도 없다. 교점의 개수와 상관없이 $k=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{2}$ 는 조건을 만족시키지 못하기 때문이다.

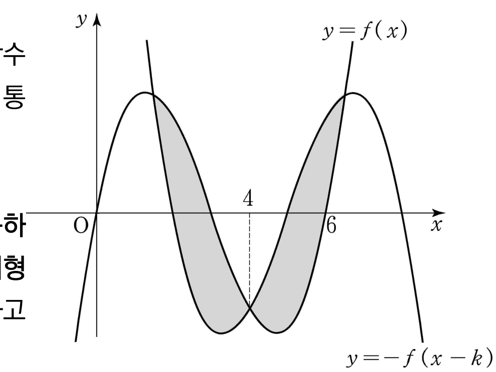
(ⅲ) $k=2$인 경우에만 두 함수의 그래프의 서로 다른 세 교점 중 가운데 교점의 x좌표가 4가 되므로 $k=2$이다.

$$\therefore \int_0^k f(x)dx = \int_0^2 x(x-3)(x-6)dx = \int_0^2 (x^3-9x^2+18x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 9x^2\right]_0^2$$
$$= 4-24+36=16$$ **답은 16!!**

※ k의 값을 구하는 다른 방법

k의 값을 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프 개형이 일치한다는 점을 통해서도 구할 수 있다.

어떤 함수의 그래프를 아무리 평행이동하고 대칭이동하더라도, 평행·대칭이동한 그래프와 기존 그래프의 개형은 서로 같다. 단지 그래프를 좌표평면상에서 이동하고 회전시킨 것이기 때문이다.



그래프를 자세히 관찰해보자. **(함수 $y=f(x)$의 그래프의 $x=4$부터 $x=6$까지의 개형)과 (함수 $y=-f(x-k)$의 그래프의 $x=4$부터 $x=p$까지의 개형)은 정확히 일치한다.**

즉, p와 6은 4를 기준으로 대칭이므로 $p=2$이다. $p=k$이므로 $k=2$이다. ($y=-f(x)$ 위의 점 $(0,0)$은 그래프를 x축 방향으로 k만큼 평행이동했을 때 점 $(p,0)$이 되므로 $p=k$이다.)