AWESOME

Seol 4 U 수학Ⅱ

성공을 원한다면 어썸하라

민족의 대명절 seol을 맞이하여 4일간 휴일을 보람되게 지낼 수 있도록 어려운 3점과 브릿지 4점 문항을 올려드립니다.

성공을 원한다면 "어썸하라"

01

1. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x+a}{x^n+3}$, $g(x)=ax^2-5x$ 에 대하여 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)$ 의 값이 존재하도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하시오.

02

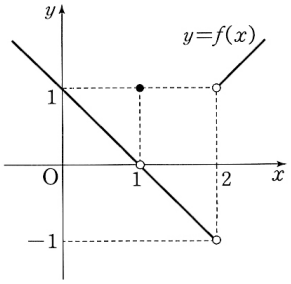
2. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$ 일 때,

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+3x+1}-(x+1)}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03

3. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x+1)}$와 $\lim_{x \to 2} f(x)g(2x-1)$의 값이 모두 존재할 때, $g(10)$의 값은?



① 50 ② 60
③ 70 ④ 80
⑤ 90

04

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$(x+1)f(x)=x^2-x+k$$

를 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

05

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x-3 & (x<0) \\ x^2-4x+3 & (x \geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)f(x-a)$가 실수 전체의 잡합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06

6. $a^2+b^2=1$을 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx & (|x| \leq 1) \\ x & (|x|>1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 불연속이고, $x=-k$에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?

(단, k는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

07

7. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f'(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 2를 갖는다.
> (나) $f(1)=f(0)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기는?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

08

8. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-3}{x-2}=6$
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $(x^2-x-2)g(x)=f(x)-3$이다.

$f'(2)+g(2)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

09

9. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

10

10. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

(가) $f(0)=-3$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여
$6x-6\le f(x)\le 2x^3-2$이다.

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

11

11. 함수 $f(x)=x^4-4x^2+a$ 의 그래프가 직선 $y=k$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수가 4 가 되도록 하는 정수 k 의 최솟값이 3 일 때, 자연수 a 의 값을 구하시오.

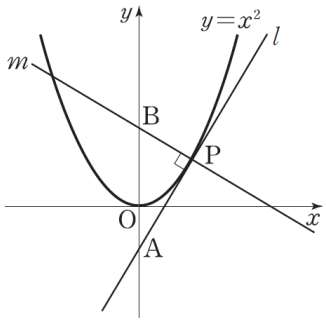
12

12. 실수 t 에 대하여 닫힌 구간 $[t,\ t+1]$ 에서 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 할 때, $\lim_{t\to-1-}\frac{g(t)-g(-1)}{(t+1)^2}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

13

13. 양수 a에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$에서의 접선을 l, 점 P를 지나고 직선 l과 수직인 직선을 m이라 할 때, 두 직선 l, m이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리가 1이 되도록 하는 a의 값은?



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{5}{6}$

14

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, $x=\alpha$에서 극소이다.
> (나) 방정식 $f(x)=f(0)$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(5)-f(1)$의 값을 구하시오.

15

15. 최고차항의 계수가 $\frac{2}{3}$인 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 곡선 $y=f'(x)+a$는 $x=-3$과 $x=2$에서 x축과 만난다. 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 가질 때, 정수 a의 최솟값은?

① -13 ② -12 ③ -11
④ -10 ⑤ -9

16

16. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$x\{f(x)+x^2\}=\int_0^x f(t)dt-x^3\int_0^1 f'(t)dt+3x^4$$

을 만족시킨다. $f(0)=0$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

17

17. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x (2t-x)f(t)dt = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + ax^3$$

을 만족시킨다. $f(0)=0$, $f(1)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이다.)

18

18. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{-x} f(t)\,dt \text{ 이다.}$$

(나) $f'(0)=1$, $f'(1)=7$

$\int_2^4 f(x)\,dx$의 값은?

① 118 ② 122 ③ 126
④ 130 ⑤ 134

19

19. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_1^2 f'(x)g(x)dx+\int_1^2 f(x)g'(x)dx$의 값은?

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 4)$, $(2,\ 8)$을 지난다.
(나) 함수 $y=g(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 4)$를 지난다.

① 28 ② 29 ③ 31
④ 31 ⑤ 32

20

20. 실수 전체의 집합에서 증가하면서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(x-3)+4$
(나) $\int_0^3 f(x)dx=1$, $\int_0^3 |f(x)|dx=7$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=6$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

2021학년도 ETOOS 정현경 커리큘럼

정확한 개념 X 트렌디한 문제 X 체계적인 커리큘럼

2021 수능 대비 AWESOME MATH

커리큘럼 가이드

단계	STEP1. 개념	STEP2. 유형 훈련	STEP3. 실전	STEP4. 파이널
강좌	개념으로 문풀까지 가능한 진개념학습 **AWESOME 개념** (a.k.a 어썸개)	취약유형 및 문제풀이의 맹그라즘 분석 **어삼쉬사** (어려운 3점 쉬운 4점)	브랜치 4점과 준킬러를 해결하는 실전 문제풀이 **AWESOME 문제 풀이** (a.k.a 어썸문)	평가원의 난도와 의도만을 담아낸 파이널 최종점검 **AWESOME 모의고사** (a.k.a 어썸모)
이과	수학 I < 삼/하 >	가형	가형	가형
	미적분 < 삼/하 >			
	확률과 통계 < 삼/하 >			
문과	수학 I < 삼/하 >	나형	나형	나형
	수학 II < 삼/하 >			
	확률과 통계 < 삼/하 >			

주제별 준킬러 정복 | 월간 준킬러

준킬러 집중공략	매 월 핵심 주제별 준킬러 제작문항 20제와 필수 기출 20제로 최근 수능 트렌드의 핵심인 준킬러를 정복한다!

Awesome Basic Class (a.k.a ABC 특강)

기초개념	AWESOME BASIC CLASS (A.B.C.) **A 기하 CLASS**	AWESOME BASIC CLASS (A.B.C.) **B 수와 식 CLASS**	AWESOME BASIC CLASS (A.B.C.) **C 함수 CLASS**

현장 강의 시간표

강의 시간표	월	화	수	목	금	토	일
09:30 - 13:00	다원교육 가형						대치 이강 가형
13:30 - 17:30							대치 나다어 나형
06:30 - 10:00	나다어 일산 가형	광교 THE올림 가형	송파 이강 가형 클리닉 나형	광교 THE올림 나형	송파 이강 나형 클리닉 가형		

이강학원 송파캠퍼스 : 02-2202-2005 ,010-8640-2204(문자용)
대치캠퍼스 : 02-554-2005 ,010-6539-1362 (문자용)

대치 나다어 학원 : 02-552-1003 . 010-7193-1148(문자용)
일산 나다어 학원 : 031-909-0910
정현경 수학 연구실 - 광교 THE올림학원 031-216-4505
정현경 선생님 H.P 010 3333 7438

---

1) 정답 7

$f(x) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{x^{n+1} + x + a}{x^n + 3}$ 에서

$0 < x < 1$ 이면 $f(x) = \dfrac{1}{3}(x+a)$

$x > 1$ 이면 $f(x) = x$

$\lim_{x \to 1} f(x)g(x)$ 의 값이 존재하려면

$\lim_{x \to 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)g(x)$ 이어야 한다.

$g(x) = ax^2 - 5x$ 이므로

$$\lim_{x \to 1-} f(x)g(x)$$
$$= \lim_{x \to 1-} \left\{ \frac{1}{3}(x+a)(ax^2 - 5x) \right\}$$
$$= \frac{1}{3}(1+a)(a-5)$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x)g(x)$$
$$= \lim_{x \to 1+} \{x(ax^2 - 5x)\}$$
$$= a - 5$$

$$\frac{1}{3}(1+a)(a-5) = a - 5$$

$$\frac{1}{3}(a-5)(a-2)=0$$

에서 $a=5$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $5+2=7$

2) 정답 ④

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ 이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+3x+1}-(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\left\{\sqrt{x^2+3x+1}+(x+1)\right\}}{\left\{\sqrt{x^2+3x+1}-(x+1)\right\}\left\{\sqrt{x^2+3x+1}+(x+1)\right\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\left\{\sqrt{x^2+3x+1}+(x+1)\right\}}{x}$$

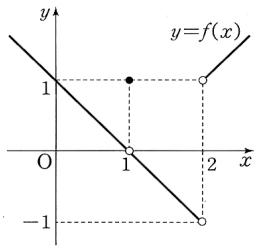
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\times\lim_{x\to 0}\left\{\sqrt{x^2+3x+1}+(x+1)\right\}$$

$$=2\times(1+1)$$

$$=4$$

3) 정답 ③

$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓자.



$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x+1)}$ 의 값이 존재하고 $\lim_{x\to 0}f(x+1)=0$ 이므로 $\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$ 이다.

즉, $g(0)=b=0$

또, $\lim_{x\to 2}f(x)g(2x-1)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)g(2x-1)=\lim_{x\to 2+}f(x)g(2x-1)$이다.

$\lim_{x\to 2-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to 2+}f(x)=1$ 이고

$g(x)=x^2+ax$ 이므로

$$\lim_{x\to 2-}f(x)g(2x-1)$$

$$=(-1)\times g(3)$$

$$=-(9+3a)$$

$$\lim_{x\to 2+}f(x)g(2x-1)$$

$$=1\times g(3)$$

$$=9+3a$$

에서 $-(9+3a)=9+3a$ 이므로 $a=-3$

따라서 $g(x)=x^2-3x$ 이므로 $g(10)=70$

4) 정답 ①

$f(-1)=a$ (a는 상수)라 하면 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x+k}{x+1} & (x\neq -1)\\ a & (x=-1)\end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$에서도 연속이다. 즉, $\lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)$ 이다.

따라서 $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+k}{x+1}=a$ 이고 $\lim_{x\to -1}(x+1)=0$ 이므로 $\lim_{x\to -1}(x^2-x+k)=0$ 에서 $k=-2$

$x\neq -1$ 일 때

$$\frac{x^2-x+k}{x+1}=\frac{x^2-x-2}{x+1}=\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=x-2$$

따라서

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x+k}{x+1} & (x\neq -1)\\ a & (x=-1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x-2 & (x\neq -1)\\ a & (x=-1)\end{cases}$$

$f(-1)$

$$=a=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}(x-2)=-3$$

5) 정답 ③

함수 $f(x)$는 $x\neq 0$인 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $f(x-a)$는 $x\neq a$인 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 a의 값에 관계없이 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x\neq 0$, $x\neq a$인 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=0$, $x=a$에서

연속이어야 한다.

(ⅰ) $a=0$일 때 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x\to 0-}\{f(x)\}^2=(-3)^2=9,$$

$$\lim_{x\to 0+}\{f(x)\}^2=3^2=9$$

$$\{f(0)\}^2=3^2=9$$

이므로 $\lim_{x\to 0}\{f(x)\}^2=\{f(0)\}^2$

즉, 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 연속이다.

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $a=0$은 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $a>0$일 때 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=0$, $x=a$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0-}f(x)f(x-a)$$

$$=\lim_{x\to 0+}f(x)f(x-a)=f(0)f(0-a)$$

$(-3)\times f(-a)=3\times f(-a)=3\times f(-a)$이므로

$f(-a)=0$, $-(-a)-3=0$ ($-a<0$이므로)

에서 $a=3$

…… ㉠

또, $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)$$

$$=\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)=f(a)f(a-a)$$

$f(a)\times(-3)=f(a)\times 3=f(a)\times 3$이므로

$f(a)=0$, $a^2-4a+3=0$ ($a>0$이므로)

$(a-1)(a-3)=0$

에서 $a=1$ 또는 $a=3$

…… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$

(ⅲ) $a<0$일 때 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$, $x=0$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)$$

$$=\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)=f(a)f(a-a)$$

$f(a)\times(-3)=f(a)\times 3=f(a)\times 3$이므로

$f(a)=0$, $-a-3=0$ ($a<0$이므로)

에서 $a=-3$

…… ㉢

또, $f(x)f(x-a)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0-}f(x)f(x-a)$$

$$=\lim_{x\to 0+}f(x)f(x-a)=f(0)f(0-a)$$

$(-3)\times f(-a)=3\times f(-a)=3\times f(-a)$이므로

$f(-a)=0$, $(-a)^2-4(-a)+3=0$

($-a>0$이므로)

$(a+1)(a+3)=0$

에서 $a=-1$ 또는 $a=-3$

…… ㉣

㉢, ㉣에서 $a=-3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 a의 값은

$a=-3$ 또는 $a=0$ 또는 $a=3$

따라서 구하는 상수 a의 개수는 3이다.

6) 정답 ②

$a^2+b^2=1$ …… ㉠

함수 $f(x)$는 $x\neq -1$, $x\neq 1$인 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ⅰ) $k=-1$일 때, 즉 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 불연속이고, $x=1$에서 연속인 경우

$\lim_{x\to -1-}f(x)\neq\lim_{x\to -1+}f(x)$에서

$-1\neq -1+a-b$

$a-b\neq 0$

…… ㉡

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$에서 $1+a+b=1$

$a+b=0$

…… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

(ⅱ) $k=1$일 때, 즉 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연

속이고, $x=-1$에서 연속인 경우

$\lim_{x\to 1-} f(x) \neq \lim_{x\to 1+} f(x)$에서 $1+a+b \neq 1$

$a+b \neq 0$

…… ㉣

$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$에서 $-1+a-b=-1$

$a-b=0$

…… ㉤

㉠, ㉣, ㉤을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 4이다.

7) 정답 ④

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 상수, $a \neq 0$)

로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ …… ㉠

조건 (가)에서 이차함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 최댓값 2를 가지므로

$f'(x)=3a(x-1)^2+2$ $(a<0)$

$=3ax^2-6ax+(3a+2)$ …… ㉡

㉠, ㉡이 같아야 하므로

$b=-3a,\ c=3a+2$

즉, $f(x)=ax^3-3ax^2+(3a+2)x+d$

$f(1)=f(0)$에서

$a+2+d=d$이므로 $a=-2$

따라서 $f'(x)=-6(x-1)^2+2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-6(2-1)^2+2=-4$

8) 정답 ③

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=6$에서

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2} f(x)=3$

다항함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=3$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=6$

조건 (나)에서

$(x^2-x-2)g(x)=f(x)-3$

…… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(2x-1)g(x)+(x^2-x-2)g'(x)=f'(x)$

…… ㉡

㉡에 $x=2$를 대입하면

$3\times g(2)+0\times g'(2)=f'(2)$

따라서 $g(2)=\frac{1}{3}f'(2)=\frac{1}{3}\times 6=2$이므로

$f'(2)+g(2)=6+2=8$

[다른 풀이]

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=6$에서

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2} f(x)=3$

다항함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=3$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=6$

조건 (나)에서 $x\neq -1$이고 $x\neq 2$일 때

$$g(x)=\frac{f(x)-3}{(x+1)(x-2)}=\frac{f(x)-f(2)}{(x+1)(x-2)}$$

다항함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)$이므로

$$g(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(2)-f(2)}{(x+1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$

$$=f'(2)\times\frac{1}{3}=6\times\frac{1}{3}=2$$

따라서 $f'(2)+g(2)=6+2=8$

9) 정답 ④

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$ 에서 $x\to 2$ 일 때, (분모) $\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$

또한

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{\{f'(x)\}^2}\right]$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{\{f'(2)\}^2}$$
$$=\frac{1}{f'(2)}$$

이므로 $\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{4}$ 에서 $f'(2)=4$ 이다.

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이고 $f(1)=0$, $f(2)=0$ 이므로

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)\ (a\text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$f'(x)=(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)$ 이므로

$f'(2)=2+a=4$ 에서

$$a=2$$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$ 이므로

$$f(3)=2\times 1\times 5=10$$

10) 정답 1

조건 (나)의 부등식에 $x=1$ 을 대입하면 $0\le f(1)\le 0$ 이므로

$$f(1)=0$$

$x>1$ 일 때, $\frac{6x-6}{x-1}\le\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\frac{2x^3-2}{x-1}$ 이므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{6x-6}{x-1}\le\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\lim_{x\to 1+}\frac{2x^3-2}{x-1}$$

에서 $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$

$x<1$ 일 때, 같은 방법으로

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$$

즉, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=6$

또 $6x-6\le f(x)\le 2x^3-2$ 이므로 다항함수 $f(x)$ 는 일차함수 또는 이차함수 또는 삼차함수이다.

(i) $f(x)$ 가 일차함수인 경우

$f(x)=x-3$ 이고, $f'(x)=1$ 이므로 조건을 만족시키는 일차함수는 존재하지 않는다.

(ii) $f(x)$ 가 이차함수인 경우

$f(x)=x^2+ax-3$ 으로 놓으면 $f(1)=0$ 이므로 $a=2$

$$f(x)=x^2+2x-3,\ f'(x)=2x+2$$

$f'(1)=4\ne 6$ 이므로 조건을 만족시키는 이차함수는 존재하지 않는다.

(iii) $f(x)$ 가 삼차함수인 경우

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ 으로 놓으면 $f(1)=0$ 이므로 $a+b=2$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 에서 $f'(1)=6$ 이므로 $2a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$ 이므로

$$f(x)=x^3+x^2+x-3$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(3)=27+9+3-3=36$

11) 정답 6

$f(x)=x^4-4x^2+a$ 에서

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

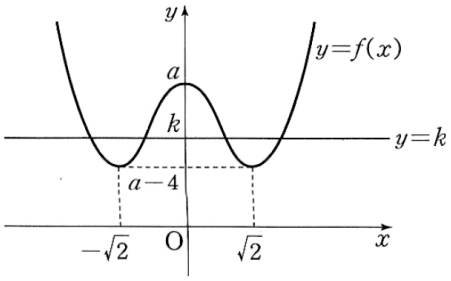
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소 $a-4$	↗	극대 a	↘	극소 $a-4$	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$ 일 때 극소, $x=0$ 일 때 극대이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 4 이려면

$a-4<k<a$ ……㉠

이어야 한다.



㉠을 만족시키는 정수 k의 최솟값이 3이므로

$$2 \le a-4 < 3,\ 6 \le a < 7$$

따라서 구하는 자연수 a의 값은 6이다.

12) 정답 ②

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$에서

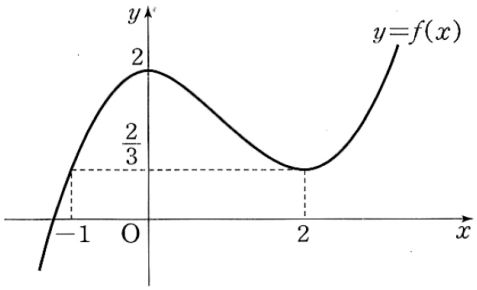
$$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

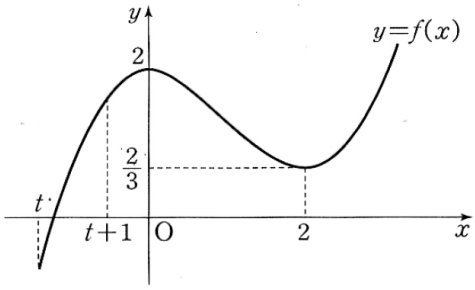
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극댓값 2, $x=2$일 때 극솟값 $\frac{2}{3}$를 가지므로 그래프는 그림과 같다.



(ⅰ) $t=-1$일 때 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 2이므로 $g(-1)=2$

(ⅱ) $t<-1$, 즉 $t+1<0$일 때



닫힌 구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(t+1)$이므로

$g(t)=f(t+1)$

$$=\frac{1}{3}(t+1)^3-(t+1)^2+2=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{4}{3}$$

따라서

$$\lim_{t\to-1-}\frac{g(t)-g(-1)}{(t+1)^2}$$

$$=\lim_{t\to-1-}\frac{\left(\frac{1}{3}t^3-t+\frac{4}{3}\right)-2}{(t+1)^2}=\frac{1}{3}\lim_{t\to-1-}\frac{t^3-3t-2}{(t+1)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{t\to-1-}\frac{(t+1)^2(t-2)}{(t+1)^2}=\frac{1}{3}\lim_{t\to-1-}(t-2)$$

$$=\frac{1}{3}\times(-3)=-1$$

13) 정답 ②

$f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$이므로 $f'(a)=2a$

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$에서의 접선 l의 기울기가 $2a$이므로 접선 l의 방정식은

$$y=2a(x-a)+a^2,\ y=2ax-a^2$$

직선 l과 y축이 만나는 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(0,\ -a^2)$

점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$을 지나고 접선 l과 수직인 직선 m의 기울기는 $-\frac{1}{2a}$이므로 직선 m의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2,$$

$$y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$

직선 m과 y축이 만나는 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}\left(0,\ a^2+\frac{1}{2}\right)$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=a^2+\frac{1}{2}-(-a^2)=2a^2+\frac{1}{2}$$

$\overline{\mathrm{AB}}=1$에서 $2a^2+\frac{1}{2}=1$, $2a^2=\frac{1}{2}$, $a^2=\frac{1}{4}$

이때 $a>0$이므로 $a=\frac{1}{2}$

14) 정답 16

삼차함수 $f(x)$의 삼차항의 계수가 양수이므로 조건 (가)에서 $1<\alpha$이다.

또한 조건 (나)에서 $f(0)$은 극댓값 또는 극솟값과 같다.

그런데 $0<1<\alpha$이므로 $f(0)$은 극솟값과 같다.

즉, $f(0)=f(\alpha)$이다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 1, α이다.

$f'(\alpha)=0$이므로 $3\alpha^2+2a\alpha+b=0$ …… ㉠

$f(\alpha)=f(0)$이므로 $\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=c$에서

$$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha=0$$

$a\neq 0$이므로 $\alpha^2+a\alpha+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2\alpha^2+a\alpha=0$, $2\alpha+a=0$, $a=-2\alpha$

이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\alpha=-\frac{2}{3}a$, $1\times\alpha=\frac{b}{3}$이므로

$1+\alpha=-\frac{2}{3}\times(-2\alpha)$에서 $1+\alpha=\frac{4}{3}\alpha$

즉, $\alpha=3$

$a=-2\alpha=-2\times 3=-6$, $b=3\alpha=3\times 3=9$이므로

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+c$$

$f(5)=20+c$, $f(1)=4+c$이므로

$$f(5)-f(1)=(20+c)-(4+c)=16$$

15) 정답 ②

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{2}{3}$이므로 도함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 2이다.

$y=f'(x)+a=2(x+3)(x-2)$라 하면

$$f'(x)=2x^2+2x-(a+12)$$

$f(x)$가 극댓값과 극솟값을 갖기 위해서는 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2+2(a+12)=2a+25>0$$

에서 $a>-\frac{25}{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 -12이다.

16) 정답 20

$$xf(x)+x^3=\int_0^x f(t)dt-x^3\int_0^1 f'(t)dt+3x^4$$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)+3x^2=f(x)-3x^2\int_0^1 f'(t)dt+12x^3$$

$$xf'(x)=-3x^2-3x^2\int_0^1 f'(t)dt+12x^3$$

$f(x)$가 다항함수이므로

$$f'(x)=-3x-3x\int_0^1 f'(t)dt+12x^2$$

$\int_0^1 f'(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f'(x)=-3(1+k)x+12x^2$이므로

$$\begin{aligned}k&=\int_0^1 f'(t)dt\\&=\int_0^1\{-3(1+k)t+12t^2\}dt\\&=\left[-\frac{3}{2}(1+k)t^2+4t^3\right]_0^1\\&=-\frac{3}{2}(1+k)+4\end{aligned}$$

$\frac{5}{2}k=\frac{5}{2}$에서 $k=1$

즉, $f'(x)=-6x+12x^2$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$= \int (-6x + 12x^2)dx$$

$$= -3x^2 + 4x^3 + C \ (C\text{는 적분상수})$$

그런데 $f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

따라서 $f(x) = -3x^2 + 4x^3$ 이므로

$$f(2) = -12 + 32 = 20$$

17) 정답 28

$\int_0^x (2t - x)f(t)dt = \int_0^x 2tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt$ 이 므로

$$\int_0^x 2tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + ax^3$$

위 식의 양변을 x 에 더하여 미분하면

$$2xf(x) - \int_0^x f(t)dt - xf(x) = \frac{15}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3ax^2$$

$$xf(x) - \int_0^x f(t)dt = \frac{15}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3ax^2$$

위 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) - f(x) = 15x^3 - 4x^2 + 6ax$$

$$xf'(x) = 15x^3 - 4x^2 + 6ax$$

$f(x)$ 는 다항함수이므로

$$f'(x) = 15x^2 - 4x + 6a$$

$$f(x) = \int (15x^2 - 4x + 6a)dx$$

$$= 5x^3 - 2x^2 + 6ax + C \ (C\text{는 적분상수})$$

$f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$ 이고,

$f(1) = 1$ 이므로 $5 - 2 + 6a = 1$ 에서 $a = -\frac{1}{3}$

따라서 $f(x) = 5x^3 - 2x^2 - 2x$ 이므로

$$f(2) = 5 \times 2^3 - 2 \times 2^2 - 2 \times 2 = 28$$

18) 정답 ③

조건 (가)에서

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{-x} f(t)\,dt = -\int_{-x}^0 f(t)\,dt$$

$$\int_{-x}^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = 0$$

$$\int_{-x}^x f(t)\,dt = 0$$

이므로 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $f(0) = 0$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(-x) = -f(x)$ 이므로

$f(x) = ax^3 + bx$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)

으로 놓을 수 있다.

$f'(x) = 3ax^2 + b$ 이므로

조건 (나)에 의하여

$f'(0) = b = 1$

$f'(1) = 3a + 1 = 7$, $a = 2$

따라서 $f(x) = 2x^3 + x$ 이므로

$$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 (2x^3 + x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_2^4$$

$$= 136 - 10 = 126$$

19) 정답 ①

조건 (가)에서 $f(1) = 4$, $f(2) = 8$

조건 (나)에서 $g(1) = 1$, $g(2) = 4$

따라서

$$\int_1^2 f'(x)g(x)dx + \int_1^2 f(x)g'(x)dx$$

$$= \int_1^2 \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx$$

$$= \int_1^2 \{f(x)g(x)\}'dx$$

$$= f(2)g(2) - f(1)g(1)$$

$$= 8 \times 4 - 4 \times 1 = 28$$

20) 정답 20

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하고

$$\int_0^3 f(x)dx = 1, \ \int_0^3 |f(x)|dx = 7$$

이므로 $f(a) = 0$ 인 $\alpha\ (0 < \alpha < 3)$ 이 존재 한다.

따라서 $f(3) > 0$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하고

$f(3) > 0$ 이므로 $\int_3^6 |f(x)|dx = \int_3^6 f(x)dx$

$f(x) = f(x-3) + 4$ 이므로

$$\int_3^6 f(x)dx = \int_3^6 \{f(x-3)+4\}dx$$

함수 $y=f(x-3)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동 시킨 것이므로 함수 $y=f(x-3)$을 $x=3$에서 $x=6$까지 적분한 값은 함수 $y=f(x)$를 $x=0$에서 $x=3$까지 적분한 값과 같다.

$\int_3^6 f(x-3)dx = \int_0^3 f(x)dx$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\int_3^6 f(x)dx \\
&= \int_3^6 \{f(x-3)+4\}dx \\
&= \int_3^6 f(x-3)dx + \int_3^6 4dx \\
&= \int_0^3 f(x)dx + \Big[4x\Big]_3^6 \\
&= 1+(24-12) = 13
\end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
&\int_0^6 |f(x)|dx \\
&= \int_0^3 |f(x)|dx + \int_3^6 |f(x)|dx \\
&= 7+13 = 20
\end{aligned}$$