

AWESOME

Seol 4 U 수학 I

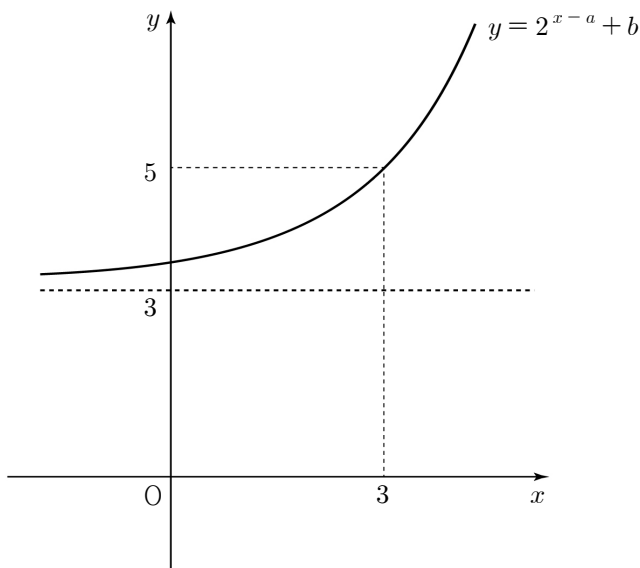
성공을 원한다면 어썸하라

민족의 대명절 seol을 맞이하여 4일간 휴일을 보람되게 지낼 수 있도록 어려운 3점과 브릿지 4점 문항을 올려드립니다.

성공을 원한다면 “어썸하라”

01

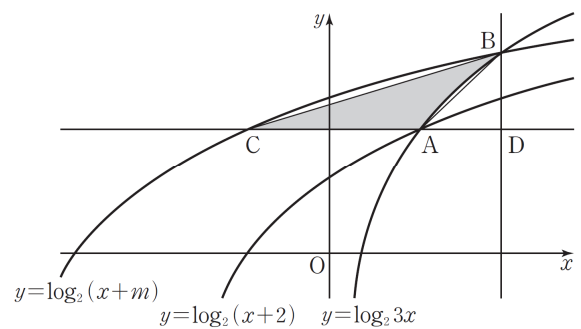
함수 $y = 2^{x-a} + b$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?
(단, 직선 $y=3$ 은 그래프의 점근선이다.)



- ① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

02

그림과 같이 2보다 큰 자연수 m 에 대하여 함수 $y = \log_2 3x$ 의 그래프가 두 함수 $y = \log_2(x+2)$, $y = \log_2(x+m)$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 y 축에 수직인 직선과 함수 $y = \log_2(x+m)$ 의 그래프가 만나는 점을 C, 점 B에서 x 축에 수직인 직선과 직선 AC가 만나는 점을 D라 하자. $\overline{CD} = 3$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?



- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

03

$a = \sqrt[6]{3}, b = \sqrt[4]{2}$ 일 때, 두 자연수 m, n 에 대하여 ab 가 m 의 n 제곱근이다. $m+n$ 의 최솟값은? (단, $n \geq 2$)

- ① 72 ② 84 ③ 96
④ 108 ⑤ 120

04

1이 아닌 세 양수 a, b, c 가 다음 조건을 만족시킨다.

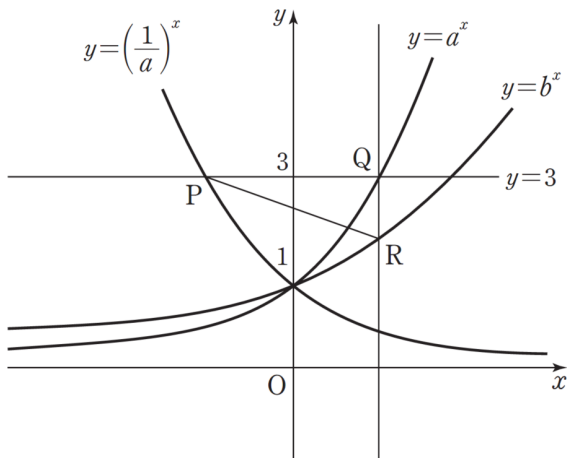
$$(가) \log_a b + \log_b c = \frac{11}{2}$$

$$(나) \log_a c = 6$$

$\log_b a + \log_c b = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

05

$1 < b < a$ 인 두 상수 a, b 에 대하여 그림과 같이 세 지수함수 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $y = a^x$, $y = b^x$ 의 그래프가 있다. 직선 $y = 3$ 과 두 지수함수 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $y = a^x$ 의 그래프가 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나면서 y 축에 평행한 직선이 지수함수 $y = b^x$ 의 그래프와 만나는 점을 R라 하자. $\overline{PQ} = 2\overline{QR}$ 이고 삼각형 PRQ의 넓이가 2일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $(ab)^{2\sqrt{2}}$ 의 값은 $c + d\sqrt{2}$ 이다. $c + d$ 의 값을 구하시오. (단, c, d 는 유리수이다.)

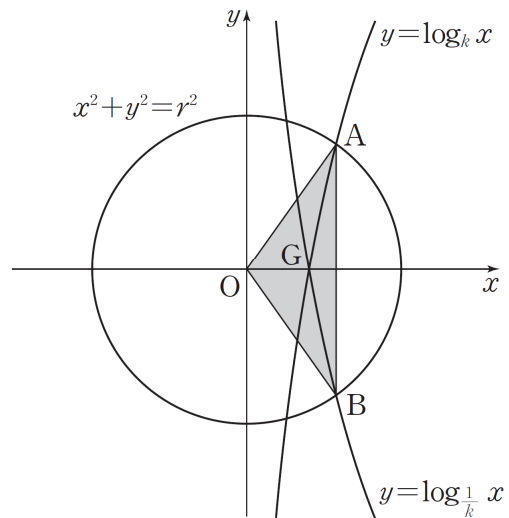


06

1보다 큰 두 실수 k, r 에 대하여 곡선 $y = \log_k x$ 와 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 이 제1사분면에서 만나는 점을 A, 곡선 $y = \log_{\frac{1}{k}} x$ 와 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 이 제4사분면에서 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 AOB가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 두 곡선 $y = \log_k x$ 와 $y = \log_{\frac{1}{k}} x$ 가 만나는 점을 G라 할 때, 점 G는 삼각형 AOB의 무게중심이다.
(나) 삼각형 AOB의 넓이는 3이다.

$4(k^2 + r^2)$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

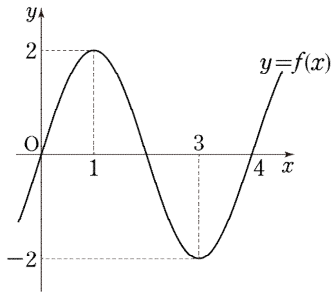


07

함수 $f(x) = a \sin(bx)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 함수

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 1) \\ 1 - 2x & (x < 1) \end{cases}$$

에 대하여 $0 < x \leq 4$ 에서 방정식 $(g \circ f)(x) = 1$ 을 만족시키는 모든 x 의 값의 곱은? (단, $a > 0$, $b > 0$)



- ① $\frac{20}{9}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{40}{9}$
 ④ $\frac{50}{9}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

08

자연수 n 에 대하여 점 P_n 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점일 때, 점 P_{n+1} 을 다음 규칙에 따라 정한다. (단, 점 P_n 은 좌표축 위의 점이 아니다.)

동경 OP_1 이 나타내는 각의 크기를 θ 라 할 때
 (가) 점 P_n 이 제1사분면 또는 제3사분면 위의 점이면, 점 P_{n+1} 은 점 P_n 을 원 위의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 이동시킨 점이다.

(나) 점 P_n 이 제2사분면 위의 점이면, 점 P_{n+1} 은 점 P_n 을 원 위의 호를 따라 시계 반대 방향으로 θ 만큼 이동시킨 점이다.

(다) 점 P_n 이 제4사분면 위의 점이면, 점 P_{n+1} 은 점 P_n 을 원 위의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\theta}{2}$ 만큼 이동시킨 점이다.

점 P_1 의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 일 때, 점 P_{11} 의 좌표는?

- ① $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ② $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
 ③ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ④ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
 ⑤ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

09

함수 $f(x) = k \sin x + \sin(\pi + x)$ 의 최솟값이 $3k$ 일 때, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값은?

- ① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

10

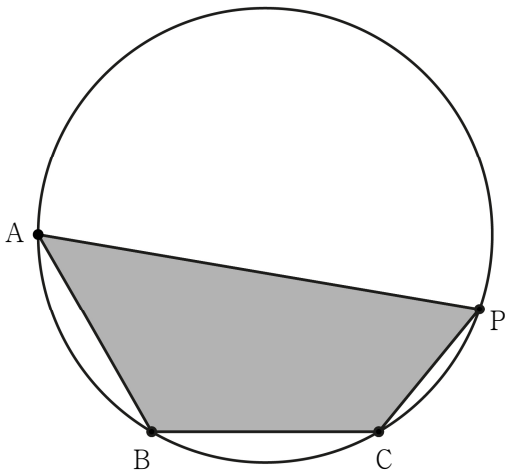
점 O 를 중심으로 하고 중심각의 크기가 1라디안인 부채꼴 OAB 에 대하여 점 A 에서 선분 OB 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 삼각형 AHB 의 넓이가 $1 - \cos 1$ 일 때, 부채꼴 OAB 의 넓이는?

- ① 1 ② $\frac{1}{\sin 1}$ ③ $\frac{1}{\cos 1}$
 ④ $\cos 1$ ⑤ $\sin 1$

11

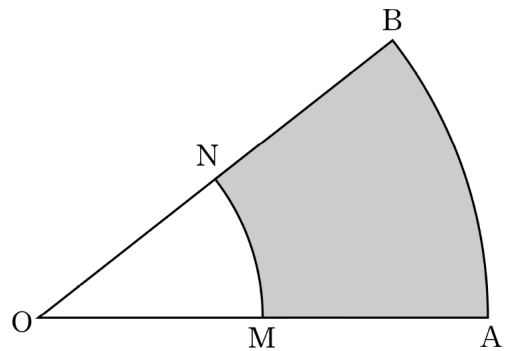
반지름의 길이가 3인 원의 둘레를 6등분하는 점 중에서 연속된 세 개의 점을 각각 A, B, C라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{CP} = 8$ 이다. 사각형 ABCP의 넓이는?

- ① $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{19\sqrt{3}}{3}$
 ④ $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{25\sqrt{3}}{3}$



12

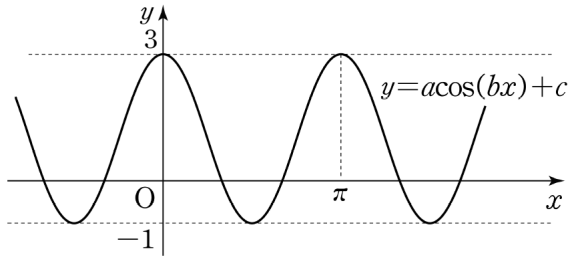
그림과 같이 부채꼴 OAB 에 대하여 두 선분 OA , OB 의 중점을 각각 M , N 이라 할 때, 부채꼴 OAB 의 내부와 부채꼴 OMN 의 외부의 공통 부분에 색칠하여 얻은 도형을 R 라 하자. 도형 R 의 둘레의 길이가 24일 때, 도형 R 의 넓이의 최댓값을 구하시오.



13

그림과 같이 함수

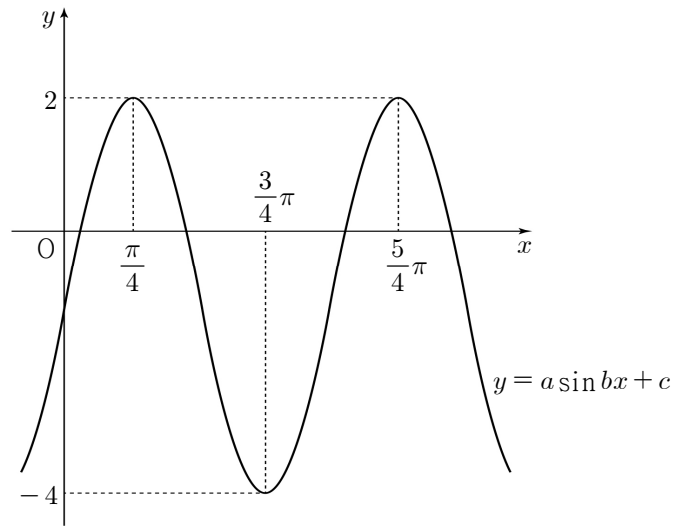
$y = a \cos(bx) + c$ ($a > 0, b > 0$)의 그래프가 두 점 $(0, 3), (\pi, 3)$ 을 지날 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값은?



- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

14

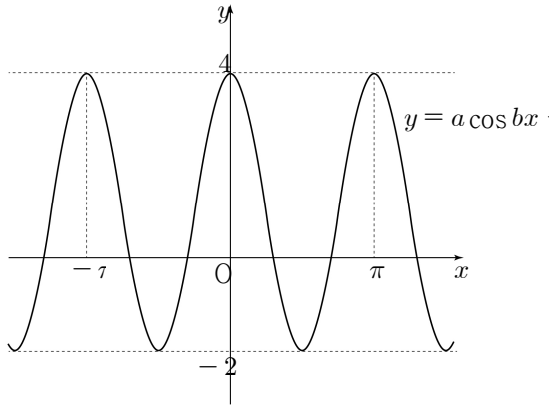
함수 $y = a \sin bx + c$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 세 상수 a, b, c 에 대하여 $2a + b + c$ 의 값은?
(단, $a > 0, b > 0$)



- ① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

15

세 양수 a, b, c 에 대하여 함수 $y = a \cos bx + c$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $2a + b + c$ 의 값은?



- ① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

16

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_3 = S_{10}$ 일 때, a_{16} 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

17

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$S_1 = 20, S_4 - S_2 = 25$$

일 때, S_n 의 최댓값을 구하시오.

18

첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 자연수 n 에 대하여 직선 $x = a_n$ 과 곡선 $y = x^2$ 의 교점을 P_n 이라 하자. 두 점 P_n, P_{n+1} 을 지나 는 직선의 기울기가 20일 때, n 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

19

세 자연수 a, b, c 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 수 $2^a, 4^b, 8^c$ 이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

(나) $a \log 2 - b \log 4 = \log 256 - c \log 8$

$a + b + c$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

20

첫째항이 1, 공비가 양수인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 곱이 2^{20} 일 때, 이 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합을 구하시오.

21

자연수 n 에 대하여 두 집합

$$X = \{x \mid x \text{는 } n \text{ 이하의 자연수}\},$$

$$Y = \{y \mid y \text{는 } 6 \text{의 양의 약수}\}$$

가 있다. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수를 a_n 이라 할 때,

$$\sum_{n=1}^{10} a_n \text{의 값은?}$$

① $\frac{1}{3}(2^{20} - 4)$ ② $\frac{1}{3}(2^{21} - 4)$ ③ $\frac{1}{3}(2^{22} - 4)$

④ $\frac{1}{3}(2^{21} + 4)$ ⑤ $\frac{1}{3}(2^{22} + 4)$

22

첫째항이 양수이고 공비가 -2 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^9 (|a_k| + a_k) = 66$$

일 때, a_1 의 값은?

① $\frac{3}{31}$ ② $\frac{5}{31}$ ③ $\frac{7}{31}$

④ $\frac{9}{31}$ ⑤ $\frac{11}{31}$

23

자연수 n 의 양의 약수의 개수를 $f(n)$ 이라 하고,
36의 모든 양의 약수를 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 라 하자.

$$\sum_{k=1}^9 \{(-1)^{f(a_k)} \times \log a_k\} \text{의 값은?}$$

- ① $\log 2 + \log 3$ ② $2 \log 2 + \log 3$
 ③ $\log 2 + 2 \log 3$ ④ $2 \log 2 + 2 \log 3$
 ⑤ $3 \log 2 + 2 \log 3$

24

함수 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$ 와 $a_3 = -2, a_7 = 0$
인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$$\sum_{k=1}^m f(a_k) = f(a_{m+2}) + f(a_{m+3}) + \dots + f(a_{17})$$

을 만족시키는 자연수 m 에 대하여 $\sum_{k=1}^m |a_k|$ 의 값

을 구하시오

2021학년도 ETOOS 정현경 커리큘럼

커리큘럼
가이드

정확한 개념 X 트렌디한 문제 X 체계적인 커리큘럼 2021 수능 대비 AWESOME MATH				
단계	STEP1. 개념	STEP2. 유형 훈련	STEP3. 실전	STEP4. 파이널
강좌	개념으로 문제풀기 가능한 단계별 개념 AWESOME 개념 (a.k.a 이영재)	직관적 풀이와 문제풀이와 정확한 풀이 이심위사 (아마존 3월 4월 4월)	분량지 4월과 문제풀이를 해결하는 정현 경 선생의 AWESOME 문제 풀이 (a.k.a 이영재)	평가원의 난도와 영도영을 상회하는 정현 경 선생의 AWESOME 모의고사 (a.k.a 이영재)
이과	수학 I < 심/하 > 미적분 < 심/하 > 확률과 통계 < 심/하 >	가형	가형	가형
문과	수학 I < 심/하 > 수학 II < 심/하 > 확률과 통계 < 심/하 >	나형	나형	나형

주제별 준비러 정복 | 월간 준비러

준비러 집중공략	매 월 핵심 주제별 준비러 제작한 20개의 필수 기술 20개의 최근 수능 트렌드의 핵심인 준비러를 정복한다!
-------------	--

Awesome Basic Class (a.k.a ABC 특강)

기초개념	AWESOME BASIC CLASS (A.B.C.) A 기하 CLASS	AWESOME BASIC CLASS (A.B.C.) B 수역 CLASS	AWESOME BASIC CLASS (A.B.C.) C 함수 CLASS
------	--	--	--

'수능에 최적화된 문제 개념'을 준비한다 수능을 위한 개념 4월 4월

성공을 원한다면 어썸하라

AWESOME NEO

어썸 네 오

Slim&Compact
정현경 선생님

Trendy
정현경 선생님

Dense
정현경 선생님

새로운 수능의 새로운 기준점, 정현경입니다

For. 2021
AWESOME CURRICULUM

1 A.B.C.
Awesome Basic Class
기초개념 4월 4월
수능을 위한
기본개념을
정현경 선생님이
정현경 선생님이

2 AWESOME
NEO
정현경 선생님의
정현경 선생님의
정현경 선생님의

3 어썸위사
정현경 선생님의
정현경 선생님의
정현경 선생님의

4 Awesome
Moon
정현경 선생님의
정현경 선생님의
정현경 선생님의

5 SPOT
정현경 선생님의
정현경 선생님의
정현경 선생님의

오직 준비러에 의한, 준비러를 위한 준비된 모의고사
월간 준비러 AWESOME JUN

정현경이 올랐다

현장 강의 시간표

강의 시간표	월	화	수	목	금	토	일
09:30 - 13:00	다원교육 가형						대치 이강 가형
13:30 - 17:30							대치 나다어 나형
06:30 - 10:00	나다어 일산 가형	광고 THE올 림 가형	송파 이강 가형 클리닉 나형	광고 THE올 림 나형	송파 이강 나형 클리닉 가형		

이강학원 송파캠퍼스 : 02-2202-2005 , 010-8640-2204(문자용)

대치캠퍼스 : 02-554-2005 , 010-6539-1362 (문자용)

대치 나다어 학원 : 02-552-1003 . 010-7193-1148(문자용)

일산 나다어 학원 : 031-909-0910

정현경 수학 연구실 - 광고 THE올림학원 031-216-4505

정현경 선생님 H.P 010 3333 7438

1) ②

함수 $y = 2^{x-a} + b$ 의 그래프의 점근선이 $y = 3$ 이므로 $b = 3$ 이다. 함수 $y = 2^{x-a} + 3$ 의 그래프가 점 $(3, 5)$ 를 지나므로 $5 = 2^{3-a} + 3$ 에서 $a = 2$ 이다.

따라서 $a + b = 5$ 이다.

2) ②

두 함수 $y = \log_2 3x$, $y = \log_2 (x+2)$ 의 그래프가 만나는 점 A의 좌표는 $A(1, \log_2 3)$

두 함수 $y = \log_2 3x$, $y = \log_2 (x+m)$ 의 그래프가

만나는 점 B의 좌표는 $B\left(\frac{m}{2}, \log_2 \frac{3m}{2}\right)$ 이다.

$\log_2 3 = \log_2 (x+m)$ 에서 $x = 3-m$ 이므로

$C(3-m, \log_2 3)$, $D\left(\frac{m}{2}, \log_2 3\right)$ 이다.

$\overline{CD} = 3$ 에서 $\frac{m}{2} - (3-m) = 3 \therefore m = 4$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \{1 - (-1)\} \times (\log_2 6 - \log_2 3) = 1$$

3) ②

ab 가 자연수 m 의 n 제곱근이므로 $(ab)^n = m$

이때 $a = \sqrt[3]{6}, b = \sqrt[4]{2}$ 이므로

$$m = (ab)^n = (\sqrt[6]{3} \times \sqrt[4]{2})^n = \left(3^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{4}}\right)^n = 3^{\frac{n}{6}} \times 2^{\frac{n}{4}}$$

m 이 자연수이려면 $\frac{n}{6}, \frac{n}{4}$ 이 모두 자연수이어야 한다.

즉, 자연수 n 은 12의 배수이다.

따라서 n 의 최솟값은 12이고, 이때 m 의 값은

$$3^{\frac{12}{6}} \times 2^{\frac{12}{4}} = 3^2 \times 2^3 = 72 \text{ 이므로}$$

$m+n$ 의 최솟값은 $72+12=84$

4) 23

$$\begin{aligned} \log_b a + \log_c b &= \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b c} \\ &= \frac{\log_a b + \log_b c}{\log_a b \times \log_b c} = \frac{\log_a b + \log_b c}{\log_a c} \\ &= \frac{\frac{11}{2}}{6} = \frac{11}{12} \end{aligned}$$

따라서 $p=12, q=11$ 이므로 $p+q=23$

5) 45

$y = a^x$ 의 그래프와 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ 의 그래프는 y

축에 대하여 대칭이므로 점 Q 의 좌표를 $Q(p, a^p)$ ($p > 0$)라 하면

$$P(-p, a^p), R(p, b^p)$$

$$a^p = 3$$

.....㉠

$\overline{PQ} = 2\overline{QR}$ 에서

$$2p = 2(a^p - b^p), \quad \text{즉} \quad a^p - b^p = p$$

.....㉡

직각삼각형 PRQ 의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2} \times 2p \times (a^p - b^p) = 2 \quad \text{에서}$$

$$a^p - b^p = \frac{2}{p} \quad \text{.....㉢}$$

㉠과 ㉢에서

$$p = \frac{2}{p}, p^2 = 2, p = \sqrt{2} \quad \text{.....㉣}$$

㉠과 ㉣에서 $a^{\sqrt{2}} = 3$ ㉤

㉢, ㉣, ㉤에서 $3 - b^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, b^{\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$

$$\therefore (ab)^{2\sqrt{2}} = (a^{\sqrt{2}} b^{\sqrt{2}})^2$$

$$= \{3(3 - \sqrt{2})\}^2$$

$$= 9(11 - 6\sqrt{2})$$

$$= 99 - 54\sqrt{2}$$

$$\therefore c + d = 99 + (-54) = 45$$

6) 31

수학 내적 문제 해결 능력 - 로그함수의 그래프

두 곡선 $y = \log_k x, y = \log_{\frac{1}{k}} x$ 는 항상 점 $(1, 0)$ 을

지나므로 점 G 의 좌표는 $(1, 0)$ 이다.

또한, 두 곡선 $y = \log_k x, \log_{\frac{1}{k}} x$ 는 x 축에 대하여

대칭이므로

점 A 의 좌표를

(a, b) 라 하면 점

B 의 좌표는

$(a, -b)$ 이다. 조

건 (가)에서 점 G

가 삼각형 AOB

의 무게중심이므

로

$$\frac{0 + a + a}{3} = 1,$$

$$\frac{0 + b - b}{3} = 0 \quad \text{에서} \quad a = \frac{3}{2}$$

삼각형 AOB 는 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 인 이등변 삼각형이고 무게중심이 $G(1, 0)$ 이므로 선분 AB 를 밑변으로

생각하면 높이는 $\frac{3}{2}$ 이다.

조건 (나)에서 삼각형 AOB 의 넓이가 3 이므로

$$\frac{1}{2} \times 2b \times \frac{3}{2} = 3 \quad \text{에서} \quad b = 2$$

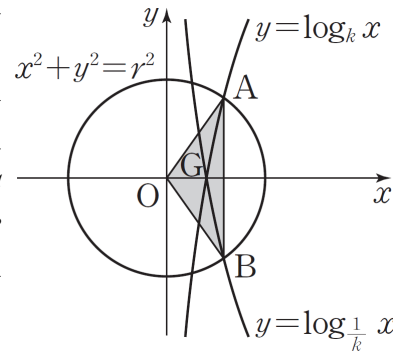
따라서 점 A 의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 이다.

곡선 $y = \log_k x$ 가 점 $A\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 를 지나므로

$$2 = \log_k \frac{3}{2} \quad \text{에서} \quad k^2 = \frac{3}{2}$$

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 이 점 $A\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 를 지나므로

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 = r^2 \quad \text{에서} \quad r^2 = \frac{25}{4}$$



따라서 $4(k^2 + r^2) = 4 \times \left(\frac{3}{2} + \frac{25}{4}\right) = 4 \times \frac{31}{4} = 31$

7) 3번

주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프에 의하여
함수 $f(x)$ 의 최댓값, 최솟값이 각각 2, -2이므로
 $a = 2$ 이고, ($\because a > 0$)

함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{b} = 4$ 이므로 $b = \frac{\pi}{2}$ 이다.

($\because b > 0$)

한편 방정식 $g(x) = 1$ 의 실근은 $x = 0$ 또는 $x = 1$
이므로

$f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 1$ 일 때 방정식
 $(g \circ f)(x) = 1$ 을 만족시킨다.

(i) 방정식 $2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$ 의 실근

$\frac{\pi}{2}x = \pi$ 또는 $\frac{\pi}{2}x = 2\pi$ 이어야 하므로 $x = 2$ 또는
 $x = 4$ 이다.

(ii) 방정식 $2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$ 의 실근

$\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{2}x = \frac{5}{6}\pi$ 이어야 하므로 $x = \frac{1}{3}$

또는 $x = \frac{5}{3}$ 이다.

(i), (ii)에 의하여 $0 < x \leq 4$ 에서

방정식 $(g \circ f)(x) = 1$ 을 만족시키는 모든 x 의 값

의 곱은 $2 \times 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{40}{9}$ 이다.

8) 5번

반지름의 길이가 1인 부채꼴에 대하여
(호의 길이) = (반지름의 길이) $\times$ (중심각의 크기)
= (중심각의 크기)이다.

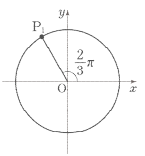
이때 모든 자연수 n 에 대하여 점 P_n 은 원
 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

점 P_{n+1} 을 얻기 위해 점 P_n 을 원 위의 호를 따라
시계 반대 방향으로 이동시키는 거리는 동경
 OP_{n+1} 을 얻기 위해 동경 OP_n 을 회전시킨 각의
크기와 같다.

따라서 점 P_1 의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

즉 $\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right), \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$ 일 때

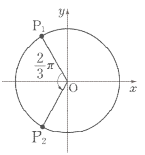
조건 (가), (나), (다)를 다음과 같이 적
용할 수
있다.



점 P_1 이 제2사분면 위의 점이므로

조건 (나)에 의하여

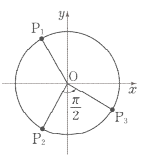
$P_2\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right), \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)$ 이다.



점 P_2 가 제3사분면 위의 점이므로

조건 (가)에 의하여

$P_3\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right), \sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right)$ 이다.



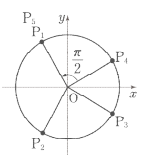
점 P_3 이 제4사분면 위의 점이므로

조건 (다)에 의하여 $P_4\left(\cos\left(\frac{13}{6}\pi\right), \sin\left(\frac{13}{6}\pi\right)\right)$ 이다.

점 P_4 가 제1사분면 위의 점이므로

조건 (가)에 의하여

$P_5\left(\cos\left(\frac{8}{3}\pi\right), \sin\left(\frac{8}{3}\pi\right)\right)$ 이다.

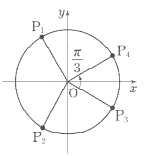
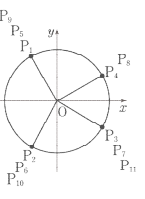


이때 점 P_5 는 점 P_1 과 일치하므로

점 P_n 의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이 반복되어 나타난다.



따라서 점 P_{11} 의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 이다.

9) 1번

$$f(x) = k \sin x + \sin(\pi + x)$$

$$= k \sin x - \sin x$$

$$= (k-1) \sin x \text{ 이므로}$$

(i) $k < 1$ 인 경우

$$k-1 \leq f(x) \leq 1-k \text{ 이므로}$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $k-1 = 3k$ 이다.

따라서 이 경우 $k = -\frac{1}{2}$ 이다.

(ii) $k = 1$ 인 경우

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0$ 이므로 최솟값이 $3k = 3$ 이라는 조건에 어긋난다.

(iii) $k > 1$ 인 경우

$$1-k \leq f(x) \leq k-1 \text{ 이므로}$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $1-k = 3k$ 이다.

즉, $k = \frac{1}{4}$ 이므로 $k > 1$ 인 조건에 어긋난다.

(i)~(iii)에 의하여 $f(x) = -\frac{3}{2} \sin x$ 이다.

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

10) 2번

중심각의 크기가 1라디안인 부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r 라 하자.

$$\overline{AH} = r \sin 1 \text{ 이고}$$

$$\overline{OH} = r \cos 1 \text{ 에서}$$

$$\overline{BH} = \overline{OB} - \overline{OH} = r - r \cos 1 = r(1 - \cos 1) \text{ 이므로}$$

$$(\text{삼각형 AHB의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{BH}$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \sin 1 (1 - \cos 1) \text{ 이다.}$$

이때 삼각형 AHB의 넓이가 $1 - \cos 1$ 로 주어졌으므로

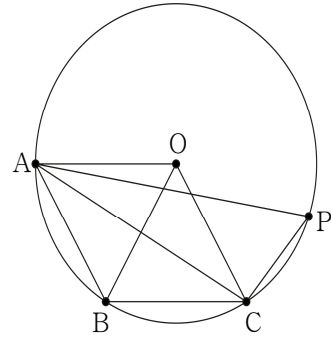
$$\frac{1}{2} r^2 \sin 1 (1 - \cos 1) = 1 - \cos 1 \text{ 에서 } r^2 = \frac{2}{\sin 1} \text{ 이다.}$$

$$\therefore (\text{부채꼴 OAB의 넓이}) = \frac{1}{2} \times r^2 \times 1$$

$$= \frac{1}{\sin 1}$$

11) ②

[출제의도] 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기



원의 중심을 O라 하자.

두 삼각형 OAB와 OBC는 정삼각형이므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 3$$

삼각형 ABC에서 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ 이므로

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times \cos \frac{2\pi}{3} = 27$$

$$\overline{AC} = 3\sqrt{3}$$

사각형 ABCP가 원에 내접하므로

$$\angle ABC + \angle APC = \pi \text{ 즉, } \angle APC = \frac{\pi}{3}$$

$\overline{AP} = x$, $\overline{CP} = y$ 라 하면

삼각형 ACP에서 코사인법칙에 의하여

$$(3\sqrt{3})^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{3}$$

$$27 = (x+y)^2 - 3xy$$

$$x+y=8 \text{ 이므로 } xy = \frac{37}{3}$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

삼각형 ACP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times x \times y \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{37\sqrt{3}}{12}$$

따라서 사각형 ABCP의 넓이는

$$\frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{37\sqrt{3}}{12} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

12) 36

$\overline{OM} = \overline{MA} = r$ 라 하자.

호 MN의 길이를 l 이라 하면 호 AB의 길이는 $2l$

도형 R의 둘레의 길이가 24이므로

$$l + 2r + 2l = 24 \text{ 에서 } l = \frac{24 - 2r}{3}$$

도형 R 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 2r \times 2l - \frac{1}{2} \times r \times l$$

$$= \frac{3}{2}rl = \frac{3}{2}r \times \frac{24-2r}{3}$$

$$= r(12-r) = -(r-6)^2 + 36$$

$r=6$ 일 때, S 는 최댓값 36을 갖는다.

13) ②

함수 $y = a \cos(bx) + c$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 -1이므로

$$a + c = 3, -a + c = -1$$

$$\text{즉, } a = 2, c = 1$$

주어진 그래프에서 주기는 π 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \text{에서 } b = 2$$

$$\therefore abc = 2 \times 2 \times 1 = 4$$

14) ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y = a \sin bx + c$ 의 최댓값과 최솟값이 각각 2, -4이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 2, -a + c = -4 \text{에서 } a = 3, c = -1 \text{이다.}$$

함수 $y = a \sin bx + c$ 의 주기는 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \text{에서 } b = 2 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } 2a + b + c = 6 + 2 + (-1) = 7 \text{이다.}$$

15) ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

주어진 삼각함수의 주기가 $\frac{2\pi}{b} = \pi$ 이므로

$b = 2$ 이다. 이 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 -2

이므로 $a + c = 4, -a + c = -2$ 에서 $a = 3, c = 1$ 이다.

$$\text{따라서 } 2a + b + c = 9 \text{이다.}$$

16) ①

이해 능력 - 수열

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$S_3 = \frac{3\{2 \times 2 + (3-1)d\}}{2} = 6 + 3d$$

$$S_{10} = \frac{10\{2 \times 2 + (10-1)d\}}{2} = 20 + 45d$$

$$S_3 = S_{10} \text{이므로}$$

$$6 + 3d = 20 + 45d, 42d = -14$$

$$\text{따라서 } d = -\frac{1}{3}$$

$$a_{16} = 2 + (16-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -3$$

17) 77

$$a_1 = S_1 = 20$$

$$S_4 - S_2 = a_3 + a_4 = 25$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d \text{에서}$$

$$a_3 + a_4 = 2a_1 + 5d = 40 + 5d = 25$$

$$\therefore d = -3$$

$$\therefore a_n = -3n + 23$$

$$a_n = -3n + 23 > 0 \text{에서 } n < \frac{23}{3} = 7.XX$$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 7항까지의 합이 최대이다.

S_n 의 최댓값은

$$S_7 = \frac{7\{2 \times 20 + 6 \times (-3)\}}{2} = 7 \times (20 - 9) = 77$$

18) ①

수학 내적 문제 해결 능력 - 수열

등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3이고 공차가 2이므로

$$\text{일반항은 } a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$$

점 P_n 은 곡선 $y = x^2$ 위의 점이고,

x 좌표는 a_n 이므로

$$P_n(2n+1, (2n+1)^2), P_{n+1}(2n+3, (2n+3)^2)$$

두 점 P_n, P_{n+1} 을 지나는 직선의 기울기는

$$\begin{aligned} & \frac{(2n+3)^2 - (2n+1)^2}{(2n+3) - (2n+1)} \\ &= \frac{(4n^2 + 12n + 9) - (4n^2 + 4n + 1)}{2} \end{aligned}$$

$$= 4n + 4 = 20$$

$$\text{따라서 } n = 4$$

19) 28

#등비수열 #지수와_로그의_성질

[출제의도] 등비수열과 지수와 로그의 성질을 이용하여 식의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

조건 (가)에서 세 수 $2^a, 4^b, 8^c$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(4^b)^2 = 2^a \times 8^c, 2^{4b} = 2^{a+3c}$$

$$4b = a + 3c \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

조건 (나)에서

$$a \log 2 - b \log 4 = \log 256 - c \log 8$$

$$\log 2^a + \log 2^{3c} - \log 2^{2b} - \log 2^8 = 0$$

로그의 성질에 의하여

$$\log \frac{2^2 \times 2^{3c}}{2^{2b} \times 2^8} = 0, \quad \frac{2^2 \times 2^{3c}}{2^{2b} \times 2^8} = 10^0 = 1$$

$$\frac{2^{a+3c}}{2^{2b}} = 2^8, \quad 2^{a+3c-2b} = 2^8$$

$$a + 3c - 2b = 8 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{A} \text{에서 } 4b - 2b = 8 \quad \therefore b = 4$$

$$b = 4 \text{를 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } a + 3c = 16 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B}$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c 를 순서쌍 (a, b, c) 로 나타내면

$$(13, 4, 1), (10, 4, 2), (7, 4, 3), (4, 4, 4), (1, 4, 5)$$

따라서 $a + b + c$ 의 최댓값은 $13 + 4 + 1 = 18$ 이고,

최솟값은 $1 + 4 + 5 = 10$ 이므로 구하는 합은

$$18 + 10 = 28$$

$$20) 341$$

공비를 r ($r > 0$)라 하면

$$1 \times r \times r^2 \times r^3 \times r^4 = r^{1+2+3+4} = r^{10} = 2^{20}$$

$$\text{이므로 } r = 2^2 = 4 \quad (\because r > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= \frac{1 \times (4^5 - 1)}{4 - 1} = \frac{2^{10} - 1}{3} \\ &= \frac{1023}{3} = 341 \end{aligned}$$

$$21) \textcircled{3}$$

수학 내적 문제 해결 능력 - 수열

두 집합 X, Y 는

$$X = \{1, 2, 3, \dots, n\}, Y = \{1, 2, 3, 6\} \text{이므로}$$

집합 X 의 원소 $1, 2, 3, \dots, n$ 을

집합 Y 의 원소 $1, 2, 3, 6$ 에 대응시킬 때, 그 경우의

수는 정의역의 원소 n 개에 대하여 각각 4이므로

$$a_n = 4$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} 4^n = \frac{4(4^{10} - 1)}{4 - 1} \\ &= \frac{4}{3}(2^{20} - 1) = \frac{1}{3}(2^{22} - 4) \end{aligned}$$

$$22) \textcircled{1}$$

[출제의도] 수열의 합을 이용하여 첫째항을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 양수, 공비가 음수이므로

$$a_{2n-1} > 0 \text{에서 } |a_{2n-1}| + a_{2n-1} = 2a_{2n-1} \text{이고}$$

$$a_{2n} < 0 \text{에서 } |a_{2n}| + a_{2n} = 0 \text{이다.}$$

수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 a_1 , 공비가 $(-2)^2 = 4$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 (|a_k| + a_k) &= 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9) \\ &= 2 \times \frac{a_1(4^5 - 1)}{4 - 1} \\ &= \frac{2 \times 1023 \times a_1}{3} \\ &= 682a_1 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 682a_1 = 66 \text{이므로 } a_1 = \frac{3}{31}$$

$$23) \textcircled{1}$$

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

36의 양의 약수는

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$$

이고,

$f(1), f(4), f(9), f(36)$ 은 홀수,

$f(2), f(3), f(6), f(12), f(18)$ 은 짝수이다.

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 \{(-1)^{f(a_k)} \times \log a_k\} \\ &= -\log 1 + \log 2 + \log 3 - \log 4 + \log 6 - \log 9 \\ &\quad + \log 12 + \log 18 - \log 36 \\ &= \log \frac{2 \times 3 \times 6 \times 12 \times 18}{1 \times 4 \times 9 \times 36} \end{aligned}$$

$$= \log 6$$

$$= \log 2 + \log 3$$

$$24) 11$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 = -2, a_7 = 0 \text{이므로}$$

$$a_3 = a_1 + 2d = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

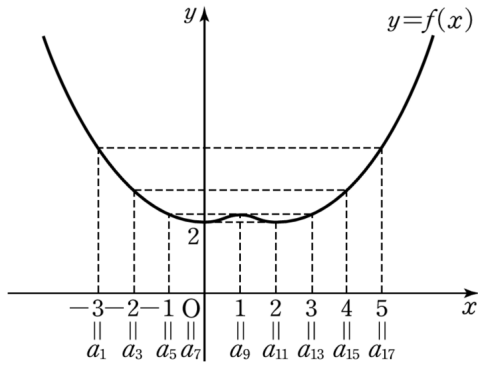
$$a_7 = a_1 + 6d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a_1 = -3, d = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } a_n = -3 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n - \frac{7}{2}$$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2 = x^2(x-2)^2 + 2 \text{이므로 합}$$

수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이고 $a_n = 1$ 인 n 의 값이 9이므로

$$\begin{aligned} & f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_8) \\ &= f(a_{10}) + f(a_{11}) + \cdots + f(a_{17}) \end{aligned}$$

따라서 m 의 값은 8이다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^m |a_k| &= \sum_{k=1}^8 \left| \frac{1}{2}k - \frac{7}{2} \right| = \sum_{k=1}^7 \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}k \right) + \frac{1}{2} \\ &= 7 \times \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{7 \times 8}{2} + \frac{1}{2} = 11 \end{aligned}$$