

* 2020 학년도 평가전 6월 수학 사형 30번.

$$f(x) = x^3 + \dots, f(2) = 3$$

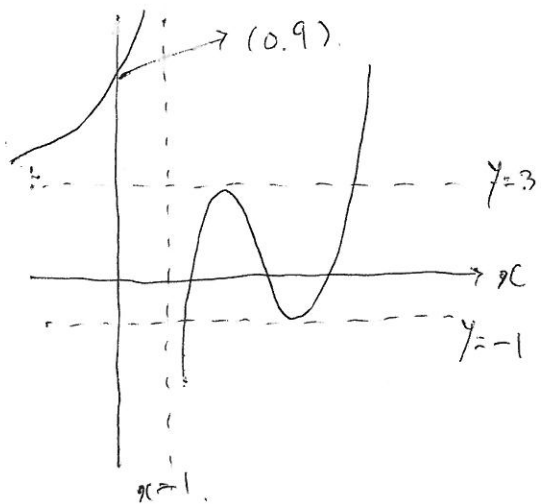
$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax-9}{x-1} & (x < 1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} y = g(x) \text{ 와 } y = t \text{ 가 서로 다른 두 점에서만 만난다.} \\ g(0) = 9 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \{t \mid t = -1 \text{ or } t \geq 3\}$$

→ 구간 (t의 구간) $[3, \infty)$ 에서 위 조건을 만족시키려면, 유리함수의 위치가 점근선 $(x=1, y=a \neq 9)$ 을 기준으로 서듬분했을 때, 좌상쪽에 위치해야 한다. t가 충분히 커지면 $(x \geq 1)$ 부분에서 교점이 하나이므로 $(x < 1)$ 부분에서도 하나가 있어야 한다.
 $\therefore a < 9$ ($a=9$ 일 때는 유리함수가 아니고 상수함수이므로 조건에 위배).

→ 또한 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으면 ($t=-1$)인 경우는 논외로 치더라도, 해집합의 부분이 $(t \geq 3)$ 인 경우에서 $t=3$ 인 경우가 불가능하다. ($\because$ 유리함수의 치역이 $y < a$ 이 아니고 $y > a$ 이다). 따라서 $f(x)$ 는 극값을 갖는 3차함수이다.

따라서 기본개형을 살펴보면 다음과 같다.



유리함수에서의 점근선은 $(x=1, y=3)$

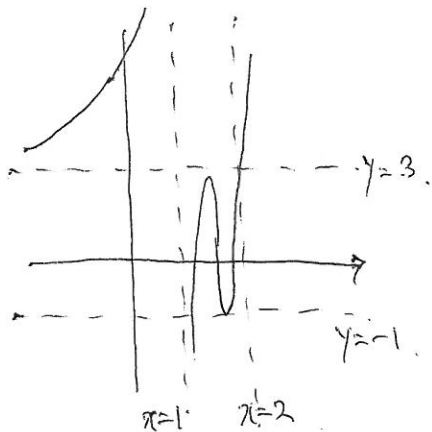
$$\therefore a = 3$$

$f(x)$ 의 극댓값은 3이고, 극솟값은 -1이고, 극댓값과 극솟값 모두 $(x < 1)$ 구간에서 나타나다.

또한 $f(1) \leq -1$ (등호만 포함되는 것이 아닌 점에 주의).

$$\therefore g \circ g(-1) = g(6) \quad (\because g(-1) = \frac{-3-9}{-1-1} = 6) = f(6) \quad (\because (x \geq 1) \text{ } g(x) = f(x))$$

(i)



$$f(k) = -1, f(\alpha) = 3, f(\beta) = -1, f(2) = 3$$

$$(C), 1 \leq k < \alpha < \beta < 2$$

$$f(x) - 3 = (x - \alpha)^2 (x - 2)$$

$$f'(x) = (x - \alpha)(x - \alpha + 2x - 4)$$

$$= 3(x - \alpha)\left(x - \frac{4 + \alpha}{3}\right)$$

$$\therefore \beta = \frac{4 + \alpha}{3} \quad (\because f'(\alpha) = f'(\beta) = 0)$$

$$f(\beta) - 3 = -4 = \left(\frac{4 - 2\alpha}{3}\right)^2 \times \left(\frac{\alpha - 2}{3}\right)$$

$$= -\frac{4(2 - \alpha)^3}{27}$$

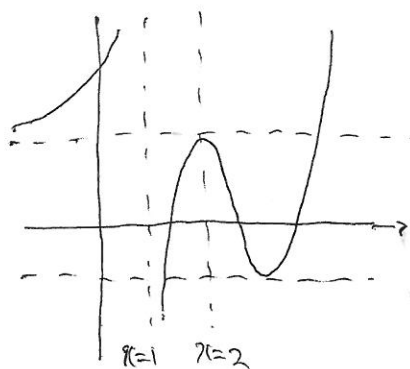
$$\therefore (2 - \alpha) = 3, \alpha = -1$$

→ 조건에 위배.

$$\therefore f(x) = (x - 2)^2 (x - 5) + 3$$

$$\text{따라서 } f \circ f(-1) = f(6) = f(6) = 16 + 3 = 19 //$$

(ii)



$$f(k) = -1, f(2) = 3, f(\alpha) = -1, f(\beta) = 3$$

$$(C), 1 \leq k < 2 < \alpha < \beta$$

$$f(x) - 3 = (x - 2)^2 (x - \beta)$$

$$f'(x) = (x - 2)(x - \beta + 2x - 2\beta)$$

$$= 3(x - 2)\left(x - \frac{2 + 2\beta}{3}\right)$$

$$\therefore \alpha = \frac{2 + 2\beta}{3} \quad (\because f'(2) = 0, f'(\alpha) = 0)$$

$$f(\alpha) - 3 = \left(\frac{2\beta - 4}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2 - \beta}{3}\right) = -4$$

$$= -\frac{4(\beta - 2)^3}{27} \quad \therefore (\beta - 2) = 3$$

$$\therefore \beta = 5, \alpha = 4$$

→ 조건에 부합.

* 극대, 극소를 갖는 최고차항의 계수가 1인 3차함수의 극를 특성상, 변곡점을 지나는 상수항과의 근의 간격이 (이반 (i) 경우) 일 때에는 극댓값과 극솟값의 차이가 4가 나올 수가 없으므로 (ii)의 경우로 올바르게 계산해도 상관은 없는 문제다.