
본 자료의 저작권은 토퀴즈(박민렬)에게 있습니다.

고1 수학

사건

반복할 수 있는 실험이나 관찰에 의하여 일어나는 결과를 사건이라고 합니다.

합의 법칙

두 사건 A, B 가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B 가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n 이면 사건 A 또는 사건 B 가 일어나는 경우의 수는 $m + n$ 입니다. 이를 합의 법칙이라고 합니다.¹⁾

1) 합의 법칙은 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립합니다.

곱의 법칙

두 사건 A, B 에 대하여 사건 A 가 일어나는 경우의 수가 m 이고 그 각각에 대하여 사건 B 가 일어나는 경우의 수가 n 일 때, 두 사건 A, B 가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m \times n$ 입니다. 이를 곱의 법칙이라고 합니다.²⁾

2) 곱의 법칙은 잇달아 일어나는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립합니다.

계승(팩토리얼)

1부터 n 까지의 자연수를 차례로 곱한 것을 n 의 계승이라 하고, $n!$ 과 같이 표기합니다.³⁾ 한편 자연수가 아닌 수인 0에 대하여 $0! = 1$ 이라 정의합니다.

3) 읽을 때는 '엔 팩토리얼'이라 읽습니다.

순열과 조합

순열

서로 다른 n 개에서 r ($0 \leq r \leq n$)개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 ' n 개에서 r 개를 택하는 순열'이라 하고, 이 순열의 수를 ${}_nP_r$ 과 같이 표기합니다.

조합

서로 다른 n 개에서 순서를 생각하지 않고 r ($0 \leq r \leq n$)개를 택하는 것을 ' n 개에서 r 개를 택하는 조합'이라 하고, 이 조합의 수를 ${}_nC_r$ 과 같이 표기합니다.

순열과 조합의 식과 관계

순열과 조합에 대하여 다음이 성립합니다.

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad {}nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}nC_{n-r}$$

확률과 통계

여러 가지 순열과 조합

원순열

서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라고 하며, 원순열의 수는 $(n-1)!$ 입니다.

중복순열

서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 순열을 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 ${}_n\Pi_r$ 과 같이 표기하며, ${}_n\Pi_r = n^r$ 이 성립합니다.

같은 것이 있는 순열

n 개 중에서 서로 같은 것이 각각 p 개, q 개, $\dots$, r 개 있을 때, 이 n 개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\dots r!}$ 입니다.⁴⁾

4) '같은 것이 있는 순열'은 앞으로 이 책에서 **같은순**이라 줄여 부르기로 합니다.

중복조합

서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 조합을 중복조합이라 하고, 이 중복조합의 수를 ${}_nH_r$ 과 같이 표기하며, ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 이 성립합니다.

이항정리

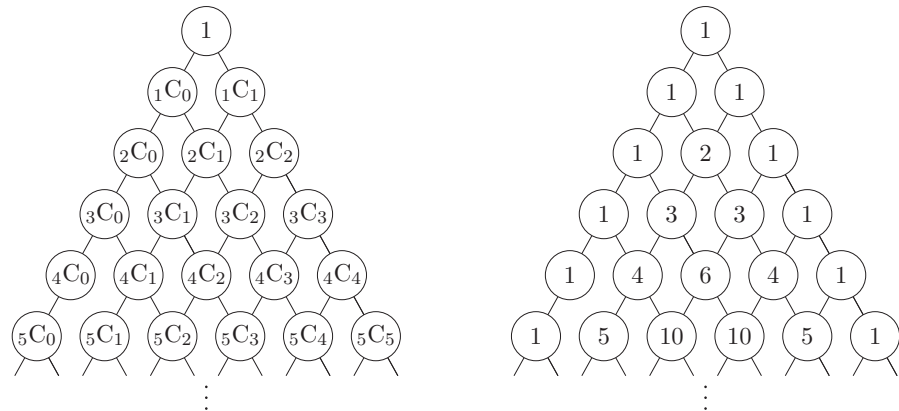
이항정리와 이항계수

다항식 $(a+b)^n$ 에 대하여 다음이 성립하며, 이를 이항정리라 합니다.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{r=0}^n {}_nC_r a^r b^{n-r} = \sum_{r=0}^n {}_nC_r a^{n-r} b^r \\&= {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + \dots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \dots + {}_nC_{n-1} a b^n + {}_nC_n b^n \\&= {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + \dots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \dots + {}_nC_{n-1} a^1 b^n + {}_nC_n a^0 b^n\end{aligned}$$

이때 우변의 각 항의 계수 ${}_nC_0, {}_nC_1, \dots, {}_nC_r, \dots, {}_nC_n$ 을 이항계수라 합니다.

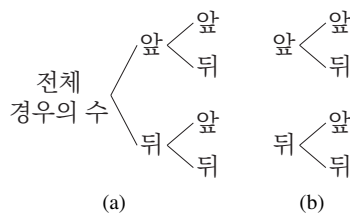
파스칼의 삼각형



위 그림과 같이 이항계수를 삼각형 모양으로 나타낸 것을 파스칼의 삼각형이라고 합니다. ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ 이므로 파스칼의 삼각형은 좌우 대칭이며, ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$ 이 성립함을 시각적으로 확인할 수 있습니다.

경우의 수 단원의 실력은 ‘수형도를 얼마나 잘 그리느냐’에 달려 있습니다. 그리고 수형도를 얼마나 잘 그리느냐는 수형도를 얼마나 덜 그리느냐, 궁극적으로는 수형도를 얼마나 그리지 않느냐에 달려 있습니다. 잘 그리는 방법이 얼마나 덜 그리고 안 그리냐에 달렸다? 언뜻 보기에는 앞뒤가 맞지 않는 이 말이 도대체 무슨 의미인지 차차 알아보도록 합시다.

수형도



수형도란 경우를 세는 방법의 하나로, ‘나무 모양의 그림’이라는 의미를 갖고 있습니다. 이름 그대로 나무가 가지를 뻗어나가는 것과 같은 모습으로 경우를 세어나갑니다.⁵⁾ 그림 (a)는 동전을 두 번 던졌을 때, 전체 경우의 수 4가지를 수형도를 이용하여 그린 예입니다. 이때 수형도에서 가지가 갈라지는 지점을 **마디**라 부르도록 합시다. 그림 (a)에는 3개의 마디가 있음을 알 수 있습니다.

그림 (a)를 보면 가장 왼쪽 마디인 ‘전체 경우의 수’는 모든 수형도에 반드시 등장할 수밖에 없음을 알 수 있습니다. 따라서 그림 (b)와 같이 동일한 상황에서 가장 왼쪽 마디를 생략하고 그리면 마치 두 개의 수형도를 각각 그린 것과 같은 형태를 띠니다. 우리는 앞으로 수형도를 그릴 때 그림 (b)와 같이 불필요한 ‘전체 경우의 수’는 생략하고 그리기로 약속합니다.

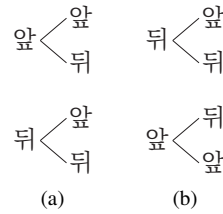
수형도는 경우의 수의 처음이자 끝이라고 해도 과언이 아닙니다. 모든 경우의 수 문제는 수형도를 그리면 반드시 풀립니다. 특히 수능 주관식 문항은 답이 1000 미만이므로, 아무런 이론적 배경을 갖추지 못했더라도 시간 내에 수형도를 그린다면 반드시 맞힐 수 있습니다.⁶⁾

5) 우리가 경우의 수를 셀 때 ‘가짓수를 센다’의 가지는 결국 수형도의 나뭇가지의 수를 세는 것과 같은 것이지요. 국어사전에서는 이 두 단어를 동음이의어로 보고 있는데, 경우의 수의 관점에서는 다의어로 생각해도 일리가 있겠습니다.

6) 물론 이론 상 그렇다는 것이고, 더 나은 길이 있는데도 불구하고 모든 문제를 수형도로 풀이할 할 필요는 없습니다.

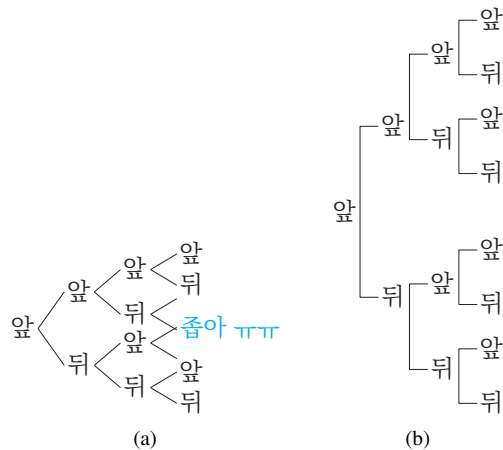
수형도를 잘 그리는 원칙

순서에 대한 규칙을 정하자



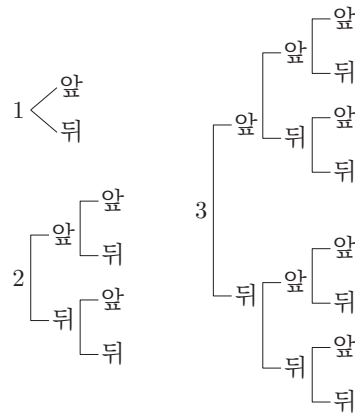
수형도를 혼동 없이 그리기 위해서는 일정한 규칙을 정하는 것이 좋습니다. 가령 그림 (a)와 같은 수형도에서는 항상 '앞'을 마디보다 위쪽에 적고, '뒤'를 마디보다 아래쪽에 적는 규칙을 따라 그리고 있습니다. 그림 (b)와 같이 순서가 뒤죽박죽이라면, 수형도를 그리는 과정에서도 헷갈릴 것이고, 나중에 검토할 때 수형도에 틀린 부분이 있는지 검증하기도 까다로울 것입니다.

첫 마디는 넓게 뻗어나가자



수형도의 특성상 뒤의 가지가 많이 퍼질 수밖에 없습니다. 그래서 그림 (a)와 같이 첫마디에서 좁게 뻗어나가면 나중에 그림의 한가운데에서 위쪽 가지와 아래쪽 가지가 겹치게 됩니다. 그림 (b)와 같이 첫 마디에서 위아래로 멀리 뻗어나가면 이러한 문제를 예방할 수 있습니다.

원칙 적용의 예



주사위를 던져 나온 눈의 수 만큼 동전을 던지는 경우의 수형도를 일부만 그려보면 위 그림과 같습니다. 가장 작은 수인 1부터 위에 적어나가면서, 동전은 앞을 항상 뒤보다 위에 적어주고 있음을 알 수 있습니다. 4, 5, 6일 때는 일부러 생략했으므로, 반드시 직접 빈 종이에 수형도를 그려보시기 바랍니다.

예제 1. 주사위를 던져 나온 눈의 수 만큼 동전을 던진다. 이 때 앞면이 나온 횟수가 5인 경우의 수는?

예제 1 풀이

주사위를 던져 나온 눈의 수 만큼 동전을 던진다. 이 때 앞면이 나온 횟수가 5인 경우의 수는?

$$5 \begin{array}{l} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \dots \qquad 6 \begin{array}{l} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \dots$$

주사위의 눈이 1, 2, 3, 4가 나온 경우는 셀 필요가 없으므로, 수형도는 ‘첫 마디가 5인 경우’와 ‘첫 마디가 6인 경우’ 두 개만 그리면 됩니다.

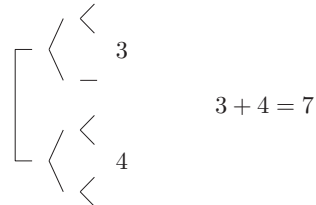
5 — $\frac{\text{O}}{\text{H}}$ — $\frac{\text{O}}{\text{H}}$ — $\frac{\text{O}}{\text{H}}$ — $\frac{\text{O}}{\text{H}}$ — $\frac{\text{O}}{\text{H}}$

6 앞 앞 앞 앞 앞 뒤
뒤 뒤 앞 앞 앞 앞 앞
뒤 앞 앞 앞 앞 앞 앞
뒤 앞 앞 앞 앞 앞 앞
뒤 앞 앞 앞 앞 앞 앞
뒤 앞 앞 앞 앞 앞 앞

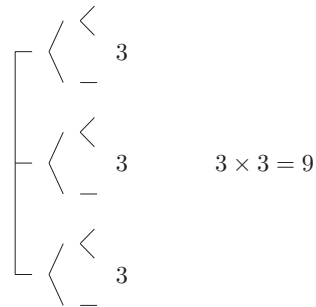
5에서는 앞앞앞앞앞 1가지, 6에서는 앞앞앞앞앞뒤, 앞앞앞앞뒤앞, 앞앞앞뒤앞앞, 앞앞뒤앞 앞앞, 앞뒤앞앞앞앞, 뒤앞앞앞앞앞 6가지가 있습니다. 따라서 모든 경우의 수는 $1 + 6 = 7$ 가지입니다.

합의 법칙과 곱의 법칙 : 수형도를 그리는 데 활용되는 기본 원리

합의 법칙과 곱의 법칙은 수형도를 그리는 데 활용되는 기본 원리입니다. 수형도를 그리다 보면 수형도가 매 마디에서 갈라질 때, 갈라져 나온 이후의 구조가 다른지 같은지를 따지게 됩니다. 예상하셨겠지만, 다르다면 합의 법칙을, 같다면 곱의 법칙을 씁니다.



갈라진 각 마디 이후 단계에서 수형도의 구조가 다르다면, 구조가 각기 다른 수형도를 각각 그리고, 각각의 경우의 수를 더하여 셉니다. 이것이 곧 합의 법칙입니다.



갈라진 각 마디 이후 단계에서 수형도의 구조가 같다면, 하나만 그리고 나머지 수형도는 그리지 않아도 됩니다. 그저 수형도를 한 번만 그려 세고, 구조가 동일한 수형도가 몇 개인지를 파악하여 곱해주면 되는 것입니다. 이것이 곧 곱의 법칙입니다.

결국 합의 법칙과 곱의 법칙을 쓰는 것은, 수형도의 구조를 파악하여 가급적 수형도를 덜 그리기 위한 것이라 생각할 수 있습니다. 수형도의 패턴이 반복되면 곱의 법칙을 이용해 수형도를 한 번만 그려 생략하고, 패턴이 다른 경우에만 어쩔 수 없이 각각의 수형도를 그린 후 합의 법칙으로 더하는 것이지요.

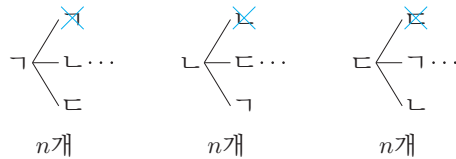
지금까지 배운 내용만 이용하여 아래의 문제를 풀어봅시다. 단, 같은 것이 있는 순열(같은순)은 사용하지 마시기 바랍니다.

예제 2. 여섯 개의 자음 ㄱ, ㅋ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㄴ을 일렬로 나열하여 문자열을 만든다. ㄱ은 ㄱ과 서로 이웃하지 않고, ㄴ은 ㄴ과 서로 이웃하지 않고, ㄷ은 ㄷ과 서로 이웃하지 않도록 배열된 문자열의 개수를 구하시오.

예제 2 풀이

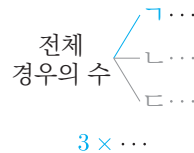
여섯 개의 자음 ㄱ, ㅋ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㄴ을 일렬로 나열하여 문자열을 만든다. ㄱ은 ㄱ과 서로 이웃하지 않고, ㄴ은 ㄴ과 서로 이웃하지 않고, ㄷ은 ㄷ과 서로 이웃하지 않도록 배열된 문자열의 개수를 구하시오.

처음에 ㄱ, ㄴ, ㄷ으로 분류하여 수형도를 3개 그리겠다고 생각했다면, 그것만으로도 절반은 성공한 것입니다. 이때 ㄱ으로 시작하든, ㄴ으로 시작하든, ㄷ으로 시작하든, 이후 수형도의 구조가 같은지 꼼꼼히 생각해봅시다.

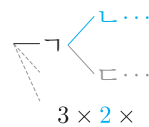


ㄱ의 입장에서 남은 것은 ㄱㄴㄴㄷㄷ인데, 두 개씩 남은 ㄴ, ㄷ 중 하나를 선택하면 됩니다. ㄴ의 입장에서 남은 것은 ㄴㄷㄷㄱㄱ인데, 두 개씩 남은 ㄱ, ㄷ 중 하나를 선택하면 됩니다. ㄷ의 입장에서 남은 것은 ㄷㄱㄱㄴㄴ인데, 두 개씩 남은 ㄱ, ㄴ 중 하나를 선택하면 됩니다. 즉 서로 입장만 다를 뿐 완전히 동일한 상황임을 알 수 있습니다. 그래서 ㄱ에서의 경우의 수인 n 을 구한 후, 여기에 3을 곱하면 전체 경우의 수인 $3n$ 을 구할 수 있는 것입니다.⁷⁾

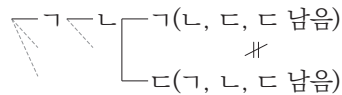
7) 이것이 곧 곱의 법칙입니다.



여기까지 우리가 풀이하며 작성하는 식은 $3 \times$ 입니다.

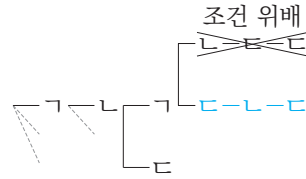


이제 ㄱ에만 집중하여 수형도를 그려나가봅시다. 앞서와 동일한 원리로, ㄴ을 고르든 ㄷ을 고르든 뒤의 수형도의 구조가 동일합니다. 따라서 ㄱ-ㄴ 이후만 그려나가면 됩니다. 여기까지 우리가 풀이하며 작성하는 식은 $3 \times 2 \times$ 입니다.



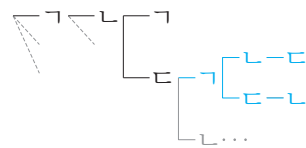
그런데 ㄱ-ㄴ-ㄱ과 ㄱ-ㄴ-ㄷ은 상황이 달라집니다. ㄱ-ㄴ-ㄱ에서는 ㄱ이 이미 다 쓰여 ㄴㄷㄷ만 남고, ㄱ-ㄴ-ㄷ은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 하나씩 남아 있는 상황이기 때문입니다. 따라서 이런 경우는 각각의 경우의 수인 a , b 를 구한 후 더하여야 합니다.⁸⁾ 여기까지 우리가 풀이하며 작성하는 식은 $3 \times 2 \times (\quad + \quad)$ 입니다. 더하기의 왼쪽에는 a 의 값을, 더하기의 오른쪽에는 b 의 값을 적으면 됩니다.

8) 이것이 곧 합의 법칙입니다.



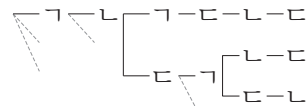
$$3 \times 2 \times (1 + \quad)$$

이제 a 를 구하기 위해 $\neg\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\neg$ 를 마저 그려봅시다. $\neg\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\neg\text{-}\text{ㄷ}\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\text{ㄷ}$ 는 ㄷ 끼리 이웃하여 문제의 조건에 위배되므로 세지 않습니다. $\neg\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\neg\text{-}\text{ㄷ}\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\text{ㄷ}$ 는 문제의 조건을 만족시킵니다. 따라서 $a = 1$ 입니다.



$$3 \times 2 \times (1 + 2 \times 2)$$

이제 b 를 구하기 위해 $\neg\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\text{ㄷ}$ 를 마저 그려봅시다. $\neg\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\text{ㄷ}\text{-}\neg$ 와 $\neg\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\text{ㄷ}\text{-}\text{ㄴ}$ 는 뒤의 수형도의 구조가 같습니다. 따라서 $\neg\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\text{ㄷ}\text{-}\neg$ 만 풀이하고 2를 곱하면 b 를 구할 수 있습니다. $\neg\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\text{ㄷ}\text{-}\neg$ 에서는 $\neg\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\text{ㄷ}\text{-}\neg\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\text{ㄷ}$ 와 $\neg\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\text{ㄷ}\text{-}\neg\text{-}\text{ㄷ}\text{-}\text{ㄴ}\text{-}\text{ㄷ}$ 의 2가지가 있으므로, $b = 2 \times 2$ 입니다.



$$3 \times 2 \times (1 + 2 \times 2)$$

따라서 최종적으로 정답은 $3 \times 2 \times (1 + 2 \times 2) = 30$ 이 됩니다.

마치며

이와 같이 경우의 수를 잘 하는 것은, 수형도를 얼마나 잘 그리느냐에 달려 있습니다. 그리고 수형도를 잘 그리는 것은 '몇개의 수형도를 그릴 것이며', '언제 더하고 언제 곱하는지'를 아는 것과 같습니다.

이에 더하여, 앞으로 다룰 여러가지 순열과 조합 공식들은 그저 자주 나오는 수형도를 그리지 않고도 한 방에 구하는 테크닉에 불과할 뿐입니다. 결국 이러한 테크닉을 적재적소에 활용한다면, 수형도를 그리지 않고도 수형도의 가지수를 알 수 있을 것입니다.

자, 이제는 이 단원을 시작하며 말했던 아래의 문장이 다시금 와닿을 것입니다.

경우의 수 단원의 실력은 '수형도를 얼마나 잘 그리느냐'에 달려 있습니다. 그리고 수형도를 얼마나 잘 그리느냐는 수형도를 얼마나 덜 그리느냐, 궁극적으로는 수형도를 얼마나 그리지 않느냐에 달려 있습니다.

9) 교과서에는 없지만, 일반적인 수학에서 널리 쓰이는 용어입니다.

10) 전사건은 뒤의 확률 단원에서 배울 표본공간(Sample Space)과 동일한 개념입니다. 따라서 집합의 이름을 주로 S 라 짓습니다.

11) 본문에서는 A 를 S 의 부분집합으로 전제하였으므로 $n(A) = 0$ 이면 A 를 공사건이라 할 수 있었습니다. A 가 S 의 부분집합이 아닌 상황도 일반적으로 설명하기 위해서는 ' $n(A \cap S) = 0$ 인 집합 A '를 공사건이라 부르는 것이 자연스럽습니다.

집합을 이용하면 경우의 수를 보다 매끄럽게 설명할 수 있습니다. 그런데 교과서에서는 경우의 수를 집합으로 설명하고 있지 않으므로, 당연히 이에 대한 용어도 정의되어 있지 않습니다. 따라서 어쩔 수 없이 교과외 용어를 먼저 약속하도록 합니다.⁹⁾

용어 정의

전사건

반복할 수 있는 실험이나 관찰에 의하여 일어날 수 있는 모든 각각의 결과들을 원소로 하는 집합을 **전사건**이라 부르기로 합니다.¹⁰⁾

예를 들어, 주사위를 한 번 던지는 상황을 생각해봅시다. 주사위를 던지면 1, 2, 3, 4, 5, 6이 나올 수 있으므로 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 라 생각할 수 있습니다.

근원사건, 사건, 공사건

전사건 S 의 부분집합을 사건이라 하고, 특히 원소의 개수가 1인 사건을 근원사건이라 부르기로 합니다. 사건 A 의 원소의 개수를 $n(A)$ 라 할 때, $n(A) = 0$ 인 경우, 사건 A 를 **공사건**이라 부르기로 합니다.¹¹⁾

앞서 주사위를 한번 던지는 상황을 전사건으로 할 때, 각각의 예를 들면 다음과 같습니다.

1. S 의 부분집합인 $B = \{1\}$ 은 '주사위를 한 번 던지는 상황에서 1이 나오는 사건'을 의미하며, 동시에 근원사건입니다.
2. S 의 부분집합인 $C = \{2, 4, 6\}$ 은 '주사위를 한번 던지는 상황에서 짝수가 나오는 사건'을 의미합니다.
3. $D = \{7\}$ 은 S 의 부분집합이 아니므로 공사건입니다.

합사건, 곱사건, 여사건

두 사건 A 와 B 에 대하여 다음의 두 사건 C, D, E 를 생각할 수 있습니다.

$$C = A \cup B, \quad D = A \cap B, \quad E = A^C$$

이때 C 를 ' A 와 B 의 **합사건**', D 를 ' A 와 B 의 **곱사건**', E 를 ' A 의 **여사건**'이라 부르기로 합니다. 합사건은 ' A 또는 B 가 일어나는 사건'을 의미하고, 곱사건은 ' A 와 B 가 동시에 일어나는 사건'을, 여사건은 ' A 가 일어나지 않는 사건'을 의미합니다.

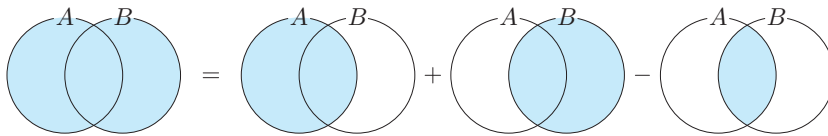
정리

결국 찬찬히 뜯어보면 용어만 집합에서 사건으로 바꾸었을 뿐임을 알 수 있습니다. 따라서 우리는 앞으로 경우의 수를 풀이할 때 집합의 연산 체계를 그대로 가져다 쓸 수 있습니다.

합의 법칙의 재해석

합의 법칙은 곱사건이 공사건인 경우이다.

앞서 말했듯이 우리는 경우의 수를 풀이할 때 집합의 연산 체계를 그대로 활용할 수 있습니다. 이를 이용하여 합의 법칙을 다시 설명해봅시다.



우리는 위의 벤 다이어그램을 통해 집합에서 다음의 식이 성립함을 고1 수학에서 배운 바 있습니다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

이는 합사건과 곱사건에도 그대로 적용할 수 있습니다. 이를 확실히 숙지한 상태에서, 우리가 합의 법칙을 어떻게 정의했는지 다시 살펴봅시다.

두 사건 A, B 가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B 가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n 이면 사건 A 또는 사건 B 가 일어나는 경우의 수는 $m + n$ 입니다.

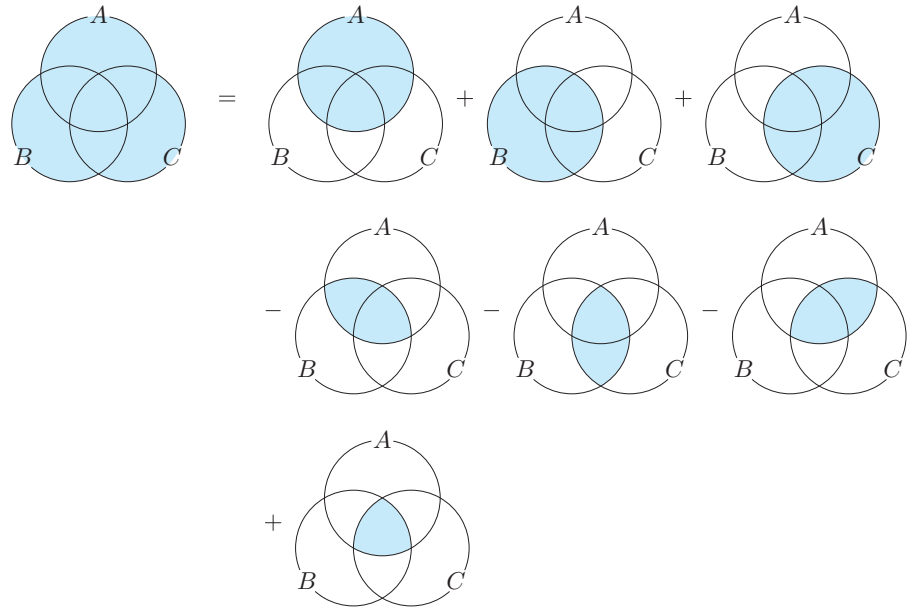
두 사건 A, B 가 동시에 일어나지 않는다는 것은 곱사건이 공사건임을, 즉 $n(A \cap B) = 0$ 의미합니다. 결국 합의 법칙은 곱사건이 공사건인 아주 간단한 경우를 다루었을 뿐임을 알 수 있습니다. 결국 곱사건이 공사건이 아닌 경우까지 합의 법칙을 확장할 수 있습니다.¹²⁾

12) 이를 **포함과 배제의 원리**라는 이름으로 부르기도 합니다.

세 개 이상의 사건에도 일반화된 합의 법칙을 적용할 수 있다.

세 개 이상의 사건에 대해서도 합의 법칙을 일반화할 수 있습니다. 단 보통 네 개 이상의 사건에 대해서 곱사건이 공사건이 아니면 상황이 너무 복잡하여 곱사건이 공사건인 경우¹³⁾만 다룹니다. 세 개의 사건에 대해서만 합의 법칙을 확장하여 논해봅시다.

13) 즉 기본적인 합의 법칙이 논하는 경우



위의 벤 다이어그램을 통해 다음의 식이 성립함을 알 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\
 &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\
 &\quad + n(A \cap B \cap C)
 \end{aligned}$$

이를 이용하여 앞서 풀었던 아래의 문제를 집합의 관점으로 다시 풀어봅시다. 풀이 과정에서 같은 것이 있는 순열(같은순)을 사용하세요.

예제 1. 여섯 개의 자음 ㄱ, ㅋ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㄺ을 일렬로 나열하여 문자열을 만든다. ㄱ은 ㄱ과 서로 이웃하지 않고, ㄴ은 ㄴ과 서로 이웃하지 않고, ㄷ은 ㄷ과 서로 이웃하지 않도록 배열된 문자열의 개수를 구하시오.

예제 1 풀이

여섯 개의 자음 ㄱ, ㅋ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㄺ을 일렬로 나열하여 문자열을 만든다. ㄱ은 ㄱ과 서로 이웃하지 않고, ㄴ은 ㄴ과 서로 이웃하지 않고, ㄷ은 ㄷ과 서로 이웃하지 않도록 배열된 문자열의 개수를 구하시오.

전사건을 S , 구하는 사건을 E , ㄱ끼리 이웃하는 사건을 A , ㄴ끼리 이웃하는 사건을 B , ㄷ끼리 이웃하는 사건을 C 라 할 때, 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \\ n(E) &= n((A \cup B \cup C)^C) = n(S) - n(A \cup B \cup C) \end{aligned}$$

이때 같잇순에 의해 $n(S) = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$ 임은 쉽게 알 수 있고, $n(A) = x$, $n(A \cap B) = y$, $n(A \cap B \cap C) = z$ 라 하면 다음이 성립합니다. ¹⁴⁾

$$\begin{aligned} n(A) &= n(B) = n(C) = x \\ n(A \cap B) &= n(B \cap C) = n(C \cap A) = y \end{aligned}$$

따라서 $n(E) = 90 - (3x - 3y + z)$ 이므로 x, y, z 를 구하면 답을 구할 수 있습니다. x, y 는 각각 같잇순에 의해 $x = \frac{5!}{2!2!}$, $y = \frac{4!}{2!}$ 이고, $z = 3!$ 입니다. 따라서 $n(E) = 90 - 3(30 - 12 + 2) = 30$ 입니다.

14) 아래의 식이 왜 성립하는지 이해가 되지 않으면, 조금만 머리를 굴려 고민해보세요!

마치며

위 문제를 풀며 같은 문제도 완전히 다른 관점으로 풀이할 수 있으며, 답은 동일함을 알 수 있습니다. 여러 관점으로 풀이하며 경험을 쌓아나가고, 그 중 자신에게 가장 잘 맞는 방법을 찾아보시기 바랍니다.