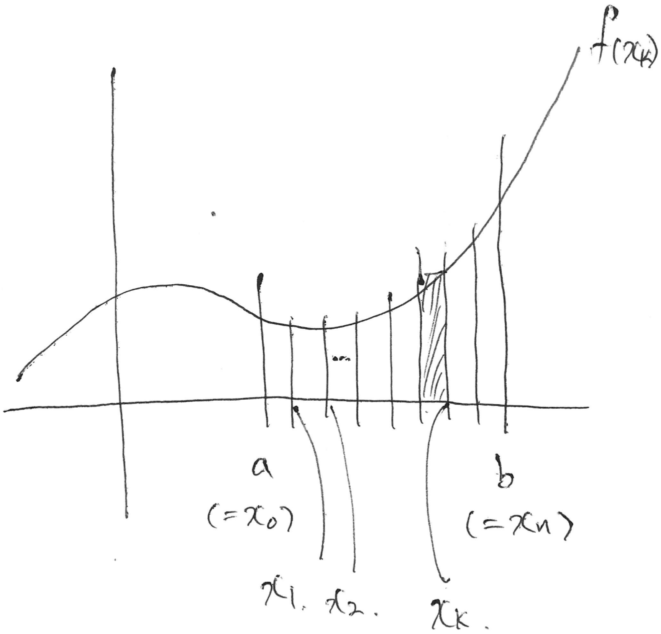
* 정적분과 무한급수.



연속인 함수 $f(x)$를 닫힌 구간 $[a, b]$에서 n등분 했을 때,

$x_0 = a$, $f(x_0)$

$x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $f(x_1) = f(a + \frac{b-a}{n})$

$x_2 = a + \frac{b-a}{n} \times 2$, $f(x_2) = f(a + \frac{b-a}{n} \times 2)$

사각기둥 하나의 넓이 = 밑변 × 높이 = $dx \times f(x_k)$.

닫힌 구간 $[a, b]$를 n등분 했으므로 밑변의 길이는 모두 $\frac{b-a}{n} = dx$ 로 일정하다.

높이는 함수에 x좌표값을 넣은 $f(x_k)$ 이다

$x_k = a + \frac{b-a}{n} \times k$.

⇒ $(a, 0)$을 기준으로 밑변의 길이가 $\frac{b-a}{n}$인 칸이 k개 연결되었을 때의 x값.

∴ 높이 $= f(x_k) = f(a + \frac{b-a}{n} \times k)$.

따라서 닫힌구간 $[a, b]$를 n등분했을 때 나오는 n개의 사각기둥들의 합은

$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{b-a}{n}\right) \times f\left(a + \frac{b-a}{n} \times k\right) \right\}$ 로 나타낼 수 있고, 여기에 $n \to \infty$ 극한 개념을 적용하면 $\int$로 표현가능하다. (consecutive ⇒ continuous)

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{b-a}{n}\right) \times f\left(a + \frac{b-a}{n} \times k\right) \right\} = \int_a^b f(x)\,dx$$

* 무한급수 형태를 정적분 형태로 바꾸기.

A) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{b-a}{n}\right) \times f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right) \right\}$.

1) x_k 설정. (why?)

$f(\triangle)$ 형태가 있을 때에는 $\triangle$ 전체를 x_k로 설정하는 것이 좋다.

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k$$

2) dx 확인 (정적분은 등분의 형태이므로 x 값들의 공차가 밑변의 길이이고 그 값이 바로 dx가 된다)

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= a + \frac{b-a}{n} \times 2 \\ x_1 &= a + \frac{b-a}{n} \times 1 \end{aligned}\right\} \quad x_2 - x_1 = d = dx = \frac{b-a}{n}$$

3) 밑끝, 위끝 확인.

밑끝(=시작점) : $\lim_{n\to\infty} x_1 = \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{b-a}{n}\right) = a + 0 = a$.

위끝(=끝점) : $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{b-a}{n} \times n\right) = a + b - a = b$.

$\therefore$ 적분구간은 a부터 b까지이다.

⇒ 2), 3)은 1)의 설정에 따라 달라진다.

☆☆☆

B) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{pk}{n}\right) \times \frac{p}{n} = \int_a^{a+p} f(x)\,dx$

$$= \int_0^p f(a+x)\,dx$$

$$= p \times \int_0^1 f(a+px)\,dx$$

* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{pk}{n}) \cdot \frac{p}{n}$.

1) $x_k = a+\frac{pk}{n}$. $x_2 - x_1 = \frac{p}{n}$.

$\lim_{n\to\infty} x_1 = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a+p$.

$\therefore \int_a^{a+p} f(x)\,dx$.

2) $x_k = \frac{pk}{n}$, $x_2 - x_1 = \frac{p}{n}$

$\lim_{n\to\infty} x_1 = 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

$\therefore \int_0^p f(a+x)\cdot dx$.

⇒ 1과 2는 평행이동으로 생각할 수도 있다..

3) $x_k = \frac{k}{n}$. $x_2 - x_1 = \frac{1}{n}$. $f(a+\frac{pk}{n}) = f(a+p\times x_k)$

$\frac{p}{n} = p\times\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} x_1 = 0$. $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

$\therefore p\times\int_0^1 f(a+px)\,dx$.

* 2014학년도 대수능 A-29.

$f(x) = 3x^2 - ax$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k}{n}\right) = f(1)$, $a = ?$

A) $x_k = \frac{3k}{n}$. $x_2 - x_1 = \frac{3}{n}$.

$\lim_{n\to\infty} x_1 = 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$.

$\frac{1}{n} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{n}$.

$\frac{1}{3} \times \int_0^3 f(x)dx$

$= \frac{1}{3}\left[x^3 - \frac{ax^2}{2}\right]_0^3$

$= \frac{1}{3} \times \left(27 - \frac{9a}{2}\right) = f(1) = 3 - a$.

$\therefore 9 - \frac{3a}{2} = 3 - a$ 에서 $\frac{a}{2} = 6$. $\therefore a = 12$.

B) $x_k = \frac{k}{n}$. $x_2 - x_1 = \frac{1}{n}$.

$\lim_{n\to\infty} x_1 = 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

$f\left(\frac{3k}{n}\right) = f(3x)$.

$\int_0^1 f(3x)dx = f(1) = 3 - a$.

$= \int_0^1 (27x^2 - 3ax)dx$

$= \left[9x^2 - \frac{3ax^2}{2}\right]_0^1 = 9 - \frac{3a}{2}$.

$\therefore 9 - \frac{3a}{2} = 3 - a$. $\frac{a}{2} = 6$. $a = 12$.

⇒ A), B) 방법 모두 같은 결과가 나온다.

* 구간을 n 등분이 아니고 2n 등분 했을 때, 생각해 볼 것.

f(x) 형태가 아니고 직접 무한수열 형태로 주어졌을 때, 생각해 볼 것.