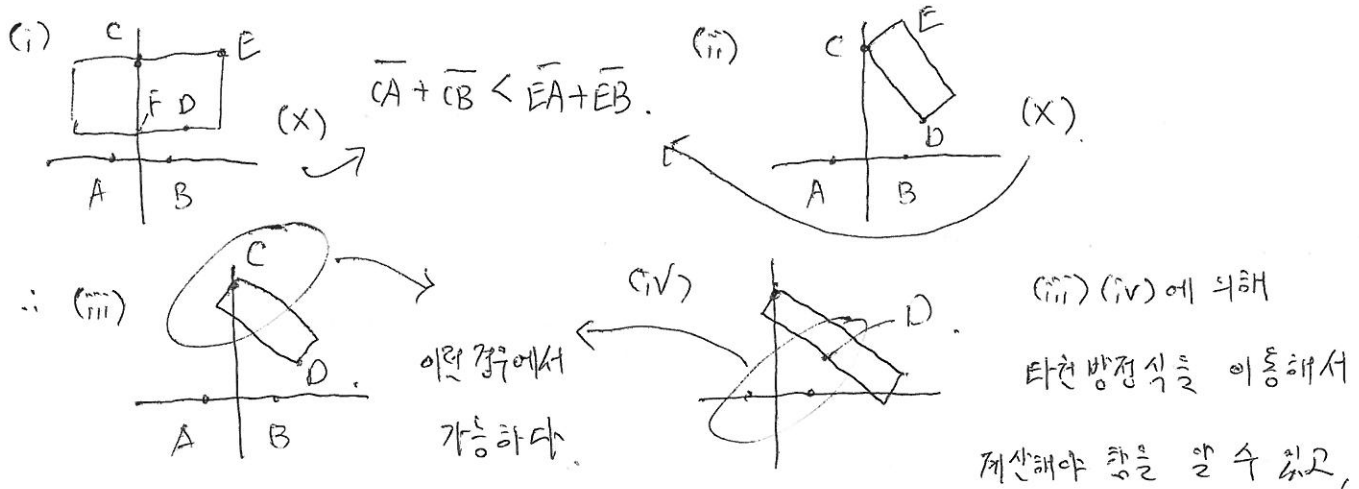


※ 2020학년도 평가전 9월 수학가형 21번

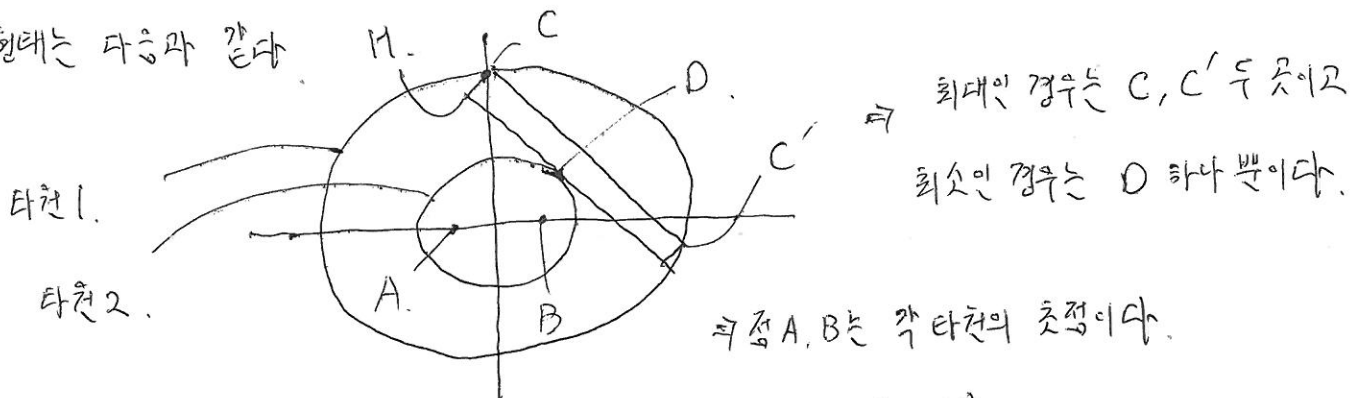
점 $A(-2, 0)$, 점 $B(2, 0)$, 점 $C(0, 6)$, 점 $D(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ 라 할 때,

두 점 A, B로부터의 거리의 합이 최대인 경우가 점 C이고, 최소인 경우가 점 D이다.

↳ 타협을 떠올릴 수 있어야 한다. 그렇지 못한 경우, 상황과 자신을 통해 떠올려야 한다.



형태는 다음과 같다



$$\overline{CA} (= \overline{CB}) = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad (\text{장죽의 길이는 } 4\sqrt{10}) \quad \therefore \text{타원} \text{은 } \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

$$\overline{DA} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}, \quad \overline{DB} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad \therefore \text{Eti} 2 \approx \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1.$$

점선 HD는 타원 2개의 점 D에서의 접선 이므로

$$\frac{x dx}{5} + \frac{y dy}{3} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{5} \times \frac{3}{y} = -\frac{3}{5} \times \frac{5}{2} = -1.$$

$$\therefore \text{HD: } y = -\left(x - \frac{5}{2}\right) + \frac{3}{2} = -x + 4 \quad (x + y - 4 = 0).$$

CC': $y = -x + 6$. ($\because$ 같은 기울기, 점 C는 y절편)

따라서 직사각형 넓이의 최댓값은 $\overline{CH} \times \overline{CG}'$ 와 같다.

선분 CH의 길이는 점 C와 직선 HD의 거리와 같으므로

$$(0, 6) \text{과 } x+y-4=0 \text{ 에서 } \frac{|6-4|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \dots\dots ①$$

점 C'은 타원 1과 직선 CC'의 교점 중 하나이므로

$$y = -x+6 \text{과 } \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1 \text{ 을 연립하면 } \frac{x^2}{40} + \frac{(-x+6)^2}{36} = 1 \text{ 에서 } \frac{x^2}{40} + \frac{x^2-12x+36}{36} = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{40} + \frac{x^2-12x}{36} = 0 \quad \therefore 36x^2 + 40x^2 - 480x = 76x^2 - 480x = 0$$

$$\therefore x = 0 (\text{점 C}) \text{ or } \frac{480}{76} = \frac{120}{19} (\text{점 C'})$$

따라서 $\overline{CC}'$ 은 점 C(0, 6)와 점 C'($\frac{120}{19}, -\frac{6}{19}$) 사이의 거리이므로

$$\overline{CC}' = \sqrt{\left(\frac{120}{19}\right)^2 + \left(-\frac{6}{19} - 6\right)^2} = \sqrt{2 \times \left(\frac{120}{19}\right)^2} = \frac{120\sqrt{2}}{19} \quad \left(-\frac{120}{19} + 6 = -\frac{6}{19}\right)$$

$$\therefore \text{구하는 직사각형의 넓이의 최댓값은 } \overline{CH} \times \overline{CC}' = \sqrt{2} \times \frac{120\sqrt{2}}{19} = \frac{240}{19} //$$