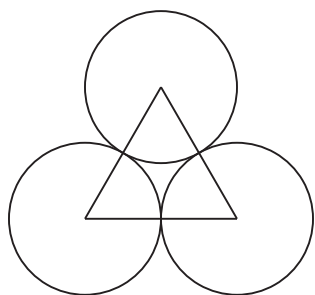


01 [2012학년도 6월 평가원 수리 가형 15번]

그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 3개와 이 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 있다. 원의 내부 또는 정삼각형의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

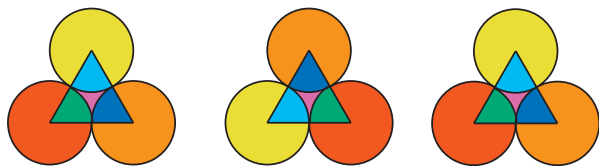


- ① 1260 ② 1680 ③ 2520 ④ 3760 ⑤ 5040

1.1.1 해설

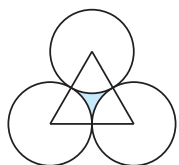
풀이 1) 회전의 관점

7가지 색을 7가지 영역에 하나씩 칠하는 경우의 수는 $7!$ 입니다.

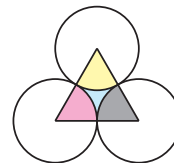


문제에서 주어진 도형은 $\frac{1}{3}$ 바퀴를 회전할 때마다 처음 상태와 합동이 되므로 구하고자 하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3} = 1680$ 입니다.

풀이 2) 고정의 관점 - (1)



도형의 가장 안쪽 영역에 칠할 1가지 색을 선택하는 경우의 수는 ${}^7C_1 = 7$ 입니다. 그러나 여기에 색을 칠했다고 해서 도형이 고정되지는 않습니다.

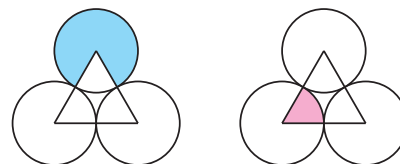


이제 방금 칠한 영역과 이웃한 3개의 영역을 색칠해보겠습니다. 이미 칠한 색 1가지를 제외한 6가지 색 중에서 3개의 영역에 칠할 3가지 색을 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$ 입니다. 이때 도형을 고정하기 위해 하나의 색을 셋 중 아무 곳이나 칠하는 경우의 수는 1이고, 남은 두 색을 남은 두 자리에 칠하는 경우의 수는 $2!$ 입니다.¹

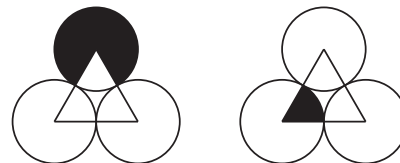
마지막으로 가장 바깥에 위치한 3개의 원 영역을 색칠해봅시다. 앞선 색칠로 인해 도형이 고정되었으므로, 남은 3가지 색을 3개의 영역에 1개씩 칠하는 경우의 수는 $3!$ 입니다.

이제 상황을 종합하면 구하고자 하는 경우의 수는 ${}^7C_1 \times {}_6C_3 \times 1 \times 2! \times 3! = 7 \times 20 \times 2! \times 3! = 1680$ 라는 것을 알 수 있습니다.

풀이 3) 고정의 관점 - (2)



7가지의 색 중 하나를 선택하여 (7C_1) 큰 부채꼴에 칠하거나 작은 부채꼴에 칠하면 (${}_2C_1$) 도형이 고정됩니다.



이제 나머지 6개의 영역에 6개의 색을 배열하면 ($6!$) 됩니다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}^7C_1 \times {}_2C_1 \times 6! = 1680$ 입니다.

정답 : ②

¹이때 $1 \times 2!$ 은 곧 3가지 색을 원순열로 배열한 것과 같습니다.

02 [2013학년도 수능 수리 나형 29번]

다음 좌석표에서 2행 2열 좌석을 제외한 8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 1명씩 임의로 배정할 때, 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정될 확률은 p 이다. $70p$ 의 값을 구하시오. (단, 2명이 같은 행의 바로 옆이나 같은 열의 바로 앞뒤에 있을 때 이웃한 것으로 본다.) [4점]

	1열	2열	3열
1행			
2행			
3행			

1.1.2 해설

풀이 1) 여사건 이용 (1)

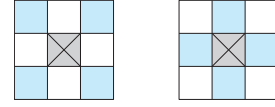
문제 상황을 생각해보면, 표본공간은 8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 1명씩 임의로 배정하는 사건이고, 해당 사건은 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되는 사건입니다. 이때 해당 사건을 A , 표본공간을 U 로 두면, 구하고자 하는 확률은

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} \text{입니다. 각각을 구해보겠습니다.}$$

$n(U)$ 부터 구해봅시다. $n(U)$ 는 8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 1명씩 배정하는 경우의 수입니다. 여학생과 남학생은 모두 서로 구분되는 학생이므로, $n(U) = 8!$ 입니다.

이제 $n(A)$ 를 구해보겠습니다. $n(A)$ 는 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되는 경우의 수입니다. 그런데 조건에 ‘적어도’라는 표현이 있으므로 여사건을 생각해볼 수 있습니다. 따라서 $n(A) = n(U) - n(A^C)$ 를 이용해 여사건의 경우의 수를 구해보겠습니다.

$n(A^C)$ 를 구해봅시다. 사건 A^C 는 남학생 4명이 모두 서로 이웃하지 않게 배정되는 사건입니다. 따라서 $n(A^C)$ 는 모든 남학생이 서로 이웃하지 않게 배정되는 경우의 수입니다.



남학생 4명의 좌석이 모두 떨어진 위치를 선택하려면, 위 그림의 두 가지 경우만 존재함을 알 수 있습니다. 이제 선택한 4개의 좌석에 남학생 4명을 배정하는 경우의 수와 남은 4개의 좌석에 여학생 4명을 배정하는 경우의 수는 모두 $4!$ 이므로 $n(A^C) = 2 \times 4! \times 4!$ 을 구할 수 있습니다.

식을 정리하면,

$$n(A) = n(U) - n(A^C) = 8! - 2 \times 4! \times 4! = 4! \times 6 \times 8 \times 34$$

를 구할 수 있습니다. 따라서 구하고자 하는 값은

$$p = P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{34 \times 8 \times 6 \times 4!}{8!} = \frac{34}{35} \text{이므로,}$$

답은 $70p = 68$ 입니다.

풀이 2) 여사건 이용 (2)

풀이 1과 표본공간을 약간 다르게 설정해보겠습니다. 확률은 경우의 수를 경우의 수로 나눈 형태의 식입니다. 따라서 두 경우의 수에 같은 값이 곱해진다면, 이를 무시하고 계산하더라도 아무 문제가 없습니다.

풀이 1에서는 좌석을 선택하는 경우의 수에 남학생 4명과 여학생 4명을 배정하는 $4! \times 4!$ 을 곱하여 경우의 수를 구했습니다. 그런데 후자의 $4! \times 4!$ 은 표본공간 U 와 사건 A 에 모두 들어가는 값이므로, 확률을 계산하는 과정에서 분모와 분자에 모두 들어 있어 약분됩니다. 따라서 후자의 계산은 확률에 영향을 미치지 못하므로, 전자만 고려하면 된다는 사실을 알 수 있습니다.

표본공간 S 를 ‘남학생 4명이 앉을 좌석 4개를 선택하는 사건’, 사건 B 를 ‘적어도 2개의 좌석이 서로 이웃하는 사건’으로 설정하면, 구하고자 하는 확률은

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \text{입니다.}$$

$n(S)$ 부터 구해봅시다. $n(S)$ 는 남학생의 좌석을 선택하는 모든 경우의 수입니다. 이는 8개의 좌석 중 4개의 좌석을 선택하는 것이므로 $n(S) = {}_8C_4 = 70$ 입니다.

이제 $n(B)$ 를 구해봅시다. 풀이 1과 마찬가지로 식 $n(B) = n(S) - n(B^C)$ 을 이용해 여사건으로 해석하면, 여사건의 경우의 수는 2라는 것을 알 수 있습니다. 따라서

$n(B^C) = 2$ 이고 $n(B) = n(S) - n(B^C) = 70 - 2 = 68$ 입니다.

정리하면 구하고자 하는 확률은

$$p = P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{68}{70} \text{ 이고, 답은 } 70p = 68 \text{입니다.}$$

여사건으로 풀 때 주의할 점과 실수 예방 요령

풀이 1, 풀이 2와 같이 여사건을 이용해 문제를 푸는 경우 학생들이 자주 하는 실수는 여사건의 값을 잘 구해놓고도 이를 답으로 써서 틀리는 것입니다.

따라서 여사건을 이용하여 풀이할 때에는 자신이 여사건을 구하고 있다는 것을 머릿속에 상기시키며 문제를 풀어야 합니다. 또한 마지막에 답을 적을 때, 구한 값이 문제에서 요구하는 값인지를 꼭 확인해야 실수하지 않을 수 있습니다. 이 점을 유의합니다. 이를 구체적인 행동으로 예방할 수 있는 요령을 소개합니다. 확률을 구하기 전에 ‘ $p = ?$, 답 = $1 - p =$ ’이라 적어두는 것입니다. 그러면 p 를 구하고 나서 자신이 적어둔 ‘답 = $1 - p =$ ’을 보고 올바른 답을 적을 수 있을 것입니다.

표본공간 설정의 중요성

풀이 1과 풀이 2를 비교하면, 표본공간을 적절하게 설정하는 것이 중요함을 알 수 있습니다. 따라서 문제를 풀 때 굳이 고려하지 않아도 되는 부분은 배제하고, 구해야 하는 값만 정확하게 찾아낼 수 있도록 표본공간을 설정하는 연습을 많이 해보도록 합시다.

풀이 3) 직접 구하기

상당히 비효율적이지만, 여사건을 사용하지 않고 직접 경우의 수를 구해 문제를 풀 수도 있습니다. 풀이 2의 상황에서 전체 사건의 경우의 수는 쉽게 구할 수 있으므로 해당 사건의 경우의 수만 구해보겠습니다.

적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배치되는 경우는 다음과 같이 분류할 수 있습니다.

- ① 2명이 이웃하고, 나머지는 서로 이웃하지 않는 경우

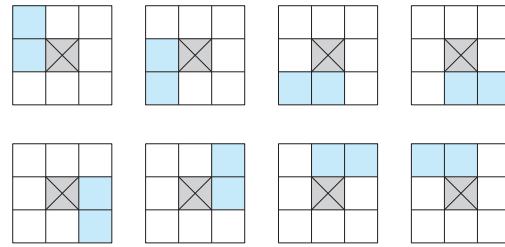
- ② 2명씩 짝지어 각각 이웃하는 경우

- ③ 3명이 잇달아 이웃하고, 1명은 이웃하지 않는 경우

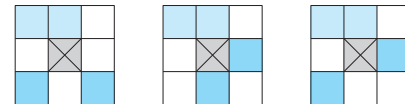
- ④ 4명이 잇달아 이웃하는 경우

각각의 경우의 수를 구하면 다음과 같습니다.

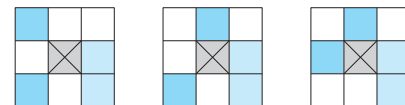
- ① 2명이 이웃하고, 나머지는 서로 이웃하지 않는 경우



서로 이웃하는 2개의 좌석을 선택하는 경우의 수는 그림과 같이 8입니다.

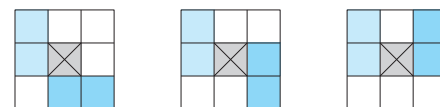


서로 이웃하는 2개의 좌석이 1행 1열과 1행 2열일 때, 서로 이웃하지 않는 나머지 2개의 좌석을 선택하는 경우의 수는 그림과 같이 3입니다.



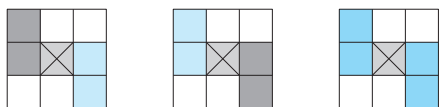
이때 좌석표의 대칭성에 의해 서로 이웃하는 2개의 좌석이 어느 것이든 관계없이 서로 이웃하지 않는 나머지 2개의 좌석을 선택하는 경우의 수는 항상 3입니다. 따라서 ①의 경우의 수는 $8 \times 3 = 24$ 입니다.

- ② 2명씩 짝지어 각각 이웃하는 경우



①에서 구했던 것과 마찬가지로, 서로 이웃하는 2개의 좌석을 선택하는 경우의 수는 8입니다. 이때 또

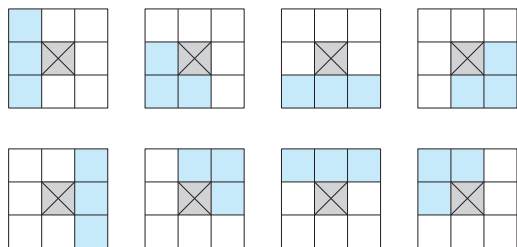
다른 2명이 서로 이웃하는 좌석을 선택하는 경우의 수는 항상 3입니다. 따라서 ②의 경우의 수가 $8 \times 3 = 24$ 이라고 생각하기 쉽지만, 사실은 24가 아니라 12입니다. 왜 이런 오류가 생겼는지 알아보시다.



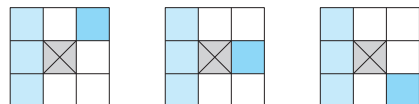
처음 고른 2개의 좌석을 회색으로 칠하고, 다음으로 고른 2개의 좌석을 색칠한다고 생각해봅시다. 24가지라고 세면 위의 두 경우는 서로 다른 경우로 세어집니다. 그런데 우리는 '8개의 좌석 중에서 남학생이 앉을 4개의 자리를 선택'하고 있으므로, 두 경우는 사실 같은 경우입니다.

이는 '조합'에는 순서가 반영되면 안 되는데, 우리가 좌석을 선택하는 과정에서 순서를 부여했기 때문에 생긴 오류입니다. 따라서 24개의 경우는 본래 우리가 구하려던 값의 2배이므로, 2로 나누어주어야 합니다. 따라서 ②의 경우의 수는 $\frac{24}{2} = 12$ 입니다.

③ 3명이 잇달아 이웃하고, 1명은 서로 이웃하지 않는 경우

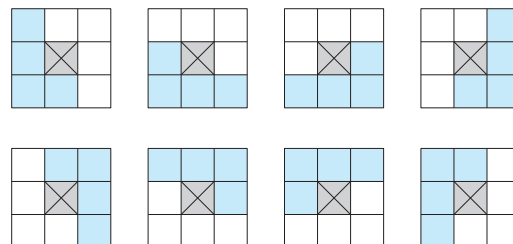


서로 이웃하는 3개의 좌석을 선택하는 경우의 수는 그림과 같이 8입니다.



남은 한 자리를 선택하는 경우의 수는 3입니다. 따라서 ③의 경우의 수는 $8 \times 3 = 24$ 입니다.

④ 4명이 잇달아 이웃하는 경우의 수

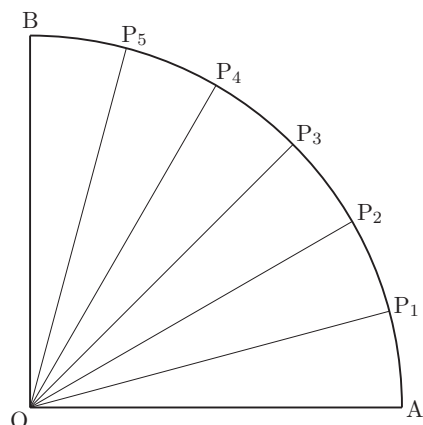


서로 이웃하는 4개의 좌석을 선택하는 경우의 수는 그림과 같이 8입니다. 따라서 ④의 경우의 수는 8입니다.

이를 종합하면 $24 + 12 + 24 + 8 = 68$ 입니다.

정답 : 68

03 [2015학년도 9월 평가원 수학 B형 14번]



그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 AOB의 호를 6등분하는 점을 순서대로 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 라 할 때, 이 다섯 개의 점 중에서 임의로 선택한 한 개의 점을 P 라 하자. 부채꼴 OPA의 넓이와 부채꼴 OPB의 넓이의 차를 확률변수 X 라 할 때, $E(X)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\pi}{11}$ ② $\frac{\pi}{10}$ ③ $\frac{\pi}{9}$ ④ $\frac{\pi}{8}$ ⑤ $\frac{\pi}{7}$

1.1.3 해설

점 $P = P_k (k=1, 2, 3, 4, 5)$ 에 대하여 $\angle AOP_k = \frac{\pi}{12}k$ 로 둘 수 있습니다. 이때 부채꼴 OP_kA 와 OP_kB 의 넓이를 구해보면 각각 $\frac{\pi}{24}k, \frac{(6-k)\pi}{24}$ 라는 것을 알 수 있고, 따라서 두 부채꼴의 넓이의 차는 $\left| \frac{(3-k)\pi}{12} \right|$ 입니다.

이제 확률변수 X 에 대해서 생각해봅시다. 확률변수 X 는 $k=1, 5$ 일 때 $\frac{\pi}{6}$, $k=2, 4$ 일 때 $\frac{\pi}{12}$, $k=3$ 일 때 0라는 것을 알 수 있습니다. 이때 확률 $P(P = P_k) = \frac{1}{5}$ 이므로 확률변수 X 의 분포표는 다음과 같습니다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합계
$P(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서 $E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + \frac{\pi}{12} \times \frac{2}{5} + \frac{\pi}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{\pi}{10}$ 이므로, 답은 $\frac{\pi}{10}$ 입니다.

대칭성의 발견과 꼼수

문제에서 주어진 상황이 대칭적이므로 X 가 될 수 있는 값은 모두 $\frac{\pi}{24} \times (\text{짝수})$ 꼴임을 알 수 있습니다. 이때 점 P 로 선택할 수 있는 점이 총 5개이므로 평균을 구할 때 나중엔 5로 나누어야 한다는 것을 알 수 있습니다. 따라서 분모에 5의 배수가 있어야 합니다. 그런데 선지를 보면 이를 만족하는 것은 $\frac{\pi}{10}$ 로 유일합니다. 따라서 답은 $\frac{\pi}{10}$ 입니다.

정답 : ②

04 [2016학년도 6월 평가원 수학 B형 27번]

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u 의 모든 순서쌍 (x, y, z, u) 의 개수를 구하시오. [4점]

$$(가) \ x + y + z + u = 6$$

$$(나) \ x \neq u$$

1.1.4 해설

(가) 조건은 전형적인 중복조합입니다. 따라서 (나) 조건을 어떻게 해석하는지에 따라 풀이가 달라집니다.

풀이 1) 여사건 이용

(가)를 만족하는 경우의 수는 ${}_4H_6 = {}_9C_3 = 84$ 라는 것을 쉽게 알 수 있습니다. 이때 ‘(나) 조건을 만족하는 사건’의 여사건인 ‘ $x = u$ 인 사건’의 경우의 수를 구하기가 쉬우므로, 전사건의 경우의 수에서 여사건의 경우의 수를 빼어 구하겠습니다.

가능한 (x, u) 의 순서쌍은 $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ 으로 총 4개입니다. 이를 (가) 조건에 대입하면 경우의 수는 각각 $y + z = 6, y + z = 4, y + z = 2, y + z = 0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 y, z 의 모든 순서쌍 (y, z) 의 개수와 같습니다. 이제 중복조합으로 계산하면 순서쌍의 개수는 각각 ${}_2H_6, {}_2H_4, {}_2H_2, {}_2H_0$ 라는 것을 알 수 있으므로, 여사건의 경우의 수는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} {}_2H_6 + {}_2H_4 + {}_2H_2 + {}_2H_0 &= {}_7C_1 + {}_5C_1 + {}_3C_1 + {}_1C_1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

따라서 답은 $84 - 16 = 68$ 입니다.

풀이 2) 직접 구하기, 그리고 일반화

$$(1) \ x + u = 1$$

순서쌍 (x, u) 의 개수는 2이고, 이때 $y + z = 5$ 이므로 순서쌍 (y, z) 의 개수는 6입니다. 따라서 순서쌍 (x, y, z, u) 의 개수는 $2 \times 6 = 12$ 입니다.

$$(2) \ x + u = 2$$

순서쌍 (x, u) 의 개수는 2이고, 이때 $y + z = 4$ 이므로 순서쌍 (y, z) 의 개수는 5입니다. 따라서 순서쌍 (x, y, z, u) 의 개수는 $2 \times 5 = 10$ 입니다.

$$(3) \ x + u = 3$$

순서쌍 (x, u) 의 개수는 4이고, 이때 $y + z = 3$ 이므로 순서쌍 (y, z) 의 개수는 4입니다. 따라서 순서쌍 (x, y, z, u) 의 개수는 $4 \times 4 = 16$ 입니다.

$$(4) \ x + u = 4$$

순서쌍 (x, u) 의 개수는 4이고, 이때 $y + z = 2$ 이므로 순서쌍 (y, z) 의 개수는 3입니다. 따라서 순서쌍 (x, y, z, u) 의 개수는 $4 \times 3 = 12$ 입니다.

$$(5) \ x + u = 5$$

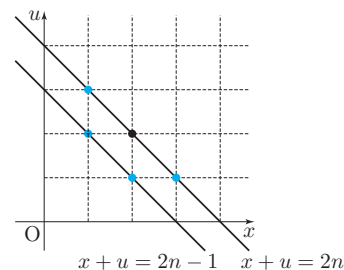
순서쌍 (x, u) 의 개수는 6이고, 이때 $y + z = 1$ 이므로 순서쌍 (y, z) 의 개수는 2입니다. 따라서 순서쌍 (x, y, z, u) 의 개수는 $6 \times 2 = 12$ 입니다.

$$(6) \ x + u = 6$$

순서쌍 (x, u) 의 개수는 6이고, 이때 $y + z = 0$ 이므로 순서쌍 (y, z) 의 개수는 1입니다. 따라서 순서쌍 (x, y, z, u) 의 개수는 $6 \times 1 = 6$ 입니다.

따라서 모든 순서쌍 (x, y, z, u) 의 개수는 $12 + 10 + 16 + 12 + 12 + 6 = 68$ 입니다.

그런데 열심히 분류하여 답을 쓰다보니 뭔가 규칙성이 보이죠? 이를 멋있게 일반화해보고, 이를 시각적으로도 확인해보시다.



먼저 $x \neq u$ 인 경우 순서쌍 (x, u) 는 대칭적이기 때문에 $x + u = 2n$ 일 때와 $x + u = 2n - 1$ 일 때 순서쌍 (x, u) 의 개수는 $2n$ 개입니다. 이는 위 그림과 같이 xu 평면에서 $x + u = 2n, x + u = 2n - 1$ 을 그려 시각적으로도 확인할 수 있습니다.

한편 $x + u = k$ (k 는 6 이하의 자연수)로 두면 $y + z = 6 - k$ 이고, 이를 만족시키는 순서쌍 (y, z) 의 개수가 ${}_2H_{6-k} = {}_{7-k}C_1 = {}_{7-k}C_1 = 7 - k$ 임을 쉽게 알 수 있습니다.

이 둘을 종합하면, 위에서 일일이 나열하여 풀이할 때
순서쌍 (x, u) 의 개수가 2, 2, 4, 4, 6, 6이고, 순서쌍
 (y, z) 의 개수가 6, 5, 4, 3, 2, 1로 나타났던 것을 이해할
수 있습니다.

정답 : 68

05 [2017학년도 6월 평가원 수학 가형 27번]

사과, 감, 배, 귤 네 종류의 과일 중에서 8개를
선택하려고 한다. 사과는 1개 이하를 선택하고, 감, 배,
귤은 각각 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 각 종류의 과일은 8개 이상씩 있다.) [4점]

1.1.5 해설

풀이 1) 사과를 기준으로 분류

사과가 x 개이므로 사과가 선택된 개수를 기준으로
분류할 수 있습니다. 이때 선택된 감, 배, 귤의 개수를
각각 y, z 로 두면 x, y, z 는 자연수입니다.

(1) 사과를 1개 선택

$$x + y + z = 7 \text{이므로 } {}_3H_4 + {}_6C_2 = 15 \text{입니다.}$$

(2) 사과를 0개 선택

$$x + y + z = 8 \text{이므로 } {}_3H_5 + {}_7C_2 = 21 \text{입니다.}$$

따라서 $15 + 21 = 36$ 입니다.

풀이 2) 여사건 이용

사과를 1개 이하로 선택하는 사건을 A 라 하고, 감, 배,
귤을 각각 1개 이상 선택하는 사건을 B 라 하면, 구하고자
하는 경우의 수는 $n(A \cap B)$ 입니다. 이때

$n(A \cap B) = n(B) - n(A^C \cap B)$ 입니다. 따라서 $n(B)$,
 $n(A^C \cap B)$ 를 구하면 됩니다.

(1) $n(B)$

감, 배, 귤을 각각 1개 이상 선택하는 경우의
수이므로 감, 배, 귤을 각각 1개씩 먼저 선택한 후, 4
종류의 과일에서 나머지 5개를 선택한다고 생각할 수
있습니다. 따라서 $n(B) = {}_4H_5 = {}_8C_3 = 56$ 입니다.

(2) $n(A^C \cap B)$

A 의 여사건 A^C 는 사과를 2개 이상 선택하는
사건입니다. 따라서 사과는 2개 이상, 감, 배, 귤은
각각 1개 이상 선택하는 경우의 수는 감, 배, 귤은
각각 1개씩, 사과는 2개를 먼저 선택한 후 4종류의
과일에서 나머지 3개를 선택한다고 생각할 수
있습니다. 경우의 수는

$$n(A^C \cap B) = {}_4H_3 = {}_6C_3 = 20 \text{입니다.}$$

따라서 $n(A \cap B) = n(B) - n(A^C \cap B) = 56 - 20 = 36$ 입니다.

왜 굳이 여사건으로 풀었나요?

풀이 2)를 보고 ‘여사건을 도입하는 바람에 쉬운 문제를 쓸데없이 복잡하게 푸는 거 아니냐’고 생각할 수도 있습니다. 그러나 풀이 2)는 문제 상황을 잘 파악했다면 간단히 경우의 수를 구할 수 있다는 장점이 있습니다. 또한 케이스를 분류하지 않으므로 실수의 여지도 줄일 수 있습니다. 만약 문제의 조건을 고쳐서 사과를 3개 이하로 선택하는 경우의 수를 물어봤다고 가정해봅시다. 그렇다면 풀이 1)은 4가지로 분류해야 하는 데 반해, 풀이 2)는 동일한 논리로 간단하게 풀립니다. 따라서 두 풀이를 모두 확실히 숙지하도록 합시다.

정답 : 36

06 [2017학년도 수능 수학 가형 18번]

확률변수 X 는 평균이 m , 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

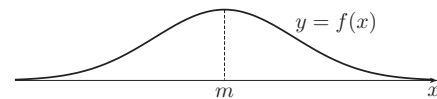
$$(가) \ f(10) > f(20)$$

$$(나) \ f(4) < f(22)$$

$$z \ P(0 \leq Z \leq z)$$

m 이 자연수일 때 $P(17 \leq X \leq 18) = a$ 이다. $1000a$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점]

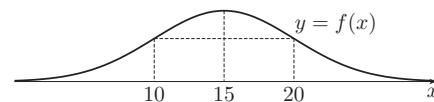
1.1.6 해설



정규분포 $N(m, 5^2)$ 을 따르는 확률밀도함수 $f(x)$ 는 $(-\infty, m]$ 에서 증가하고, $[m, \infty)$ 에서 감소합니다. 한편 $y = f(x)$ 는 대칭축이 $x = m$ 인 선대칭함수이며, $x = m$ 에서 극대이자 최대입니다. 따라서 x 가 m 에 가까울수록 $f(x)$ 가 더 큼니다.

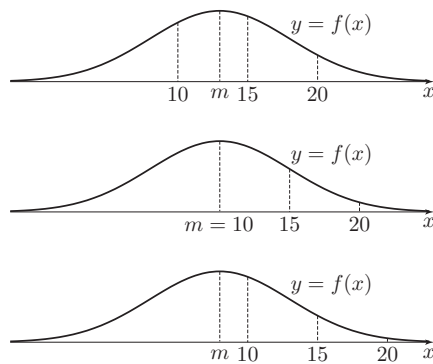
먼저 (가) 조건을 해석해봅시다. $x = 10$ 과 $x = 20$ 의 중점이 $x = 15$ 이므로 15와 m 의 대소관계를 기준으로 생각해볼 수 있습니다.

(1) $m = 15$ 일 경우



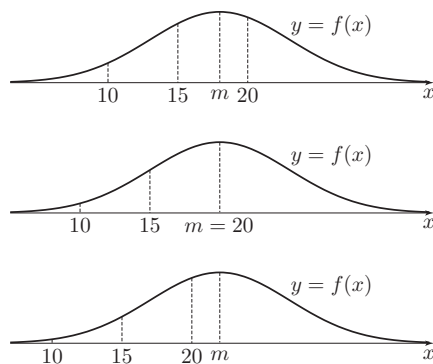
$f(10) = f(20)$ 이므로 조건에 위배됩니다.

(2) $m < 15$ 일 경우



$f(10) > f(20)$ 이므로 조건에 위배됩니다.

(3) $15 < m$ 일 경우



$f(10) < f(20)$ 이므로 조건을 만족시킵니다.

따라서 (가)에 의해 $m < 15$ 입니다.

(나) 조건도 (가) 조건과 동일하게 생각하면 $m > 13$ 입니다. 따라서 (가), (나) 조건을 종합하면 $13 < m < 15$ 입니다. 문제의 조건에서 m 은 자연수라 하였으므로 $m = 14$ 입니다.

풀이 1) 표준화

주어진 확률을 구하기 위해 식을 표준화하면 $P(17 \leq X \leq 18) = P(0.6 \leq Z \leq 0.8)$ 입니다. 따라서 표준정규분포표를 이용해 계산하면 $a = 0.288 - 0.226 = 0.062$ 입니다.

풀이 2) 표준화 없이

$17 = 14 + 0.6 \times 5$, $18 = 14 + 0.8 \times 5$ 이므로 $a = 0.288 - 0.226 = 0.062$ 라는 것을 구할 수 있습니다.

해석 없이도 m 을 구하는 합리적 의심

문제에서 $P(17 \leq X \leq 18)$ 의 값을 구해야 하는데 m 은 하나의 값으로 정해져야 한다는 것을 알 수 있습니다. 그런데 m 이 자연수라는 조건을 줬다는 것은 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 m 의 값은 2개 이상이지만 자연수인 값은 유일하다는 것을 눈치챌 수 있습니다.

정규분포는 평균 m 에 대해서 대칭이고, 확률밀도함수 $f(x)$ 도 $x = m$ 에 대해 대칭인 함수입니다. 따라서 (가), (나) 조건을 생각해보면, 두 값의 중점과 평균의 대소관계가 중요하다는 것을 추측할 수 있습니다.

이를 바탕으로 (가), (나) 조건에서 중점을 구하면 각각 $\frac{10+20}{2} = 15$, $\frac{4+22}{2} = 13$ 이고, 이 두 중점과 m 의 대소관계를 생각해보면 $m = 14$ 일 것이라고 추측할 수 있습니다.

정답 : ④

07 [2017학년도 수능 수학 가형 27번]

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a + b + c = 7$

(나) $2^a \times 4^b$ 은 8의 배수이다.

1.1.7 해설

(가) 조건은 전형적인 중복조합이고, (나) 조건에 의해 a 와 b 에 제약이 생기는 상황입니다. 따라서 (나) 조건을 어떻게 해석하느냐에 풀이가 좌우될 것입니다. 이때 (나) 조건에 따르면 $a + 2b \geq 3$ 입니다.

수많은 친구들의 잘못된 해석

당시 수능에서 (나) 조건을 잘못 해석하여 2^{a+2b} 가 8의 배수임을 $a + 2b$ 가 3의 배수이다로 두고 푼 후 채점 시 오열하는 경우가 많았습니다. 참으로 안타깝지만, 시험장에서 8의 배수가 실제로 무슨 수들이 있는지를 떠올렸다면(8, 16, 24, ...) 이런 어처구니없는 실수를 막을 수 있었을 것입니다.

풀이 1) a 의 값으로 분류하기

a 의 값을 기준으로 분류하면 다음과 같습니다.

(1) $a = 0$

$b + c = 7$ 이고 $b \geq 2$ 이므로 경우의 수는 6입니다.

(2) $a = 1$

$b + c = 6$ 이고 $b \geq 1$ 이므로 경우의 수는 6입니다.

(3) $a = 2$

$b + c = 5$ 이고 $b \geq 1$ 이므로 경우의 수는 5입니다.

(4) $3 \leq a \leq 7$

$3 \leq a \leq 7$ 이면 $b \geq 0$ 입니다.

$a = 3$ 이면 $b + c = 4$ 이고 경우의 수는 5입니다.

$a = 4$ 이면 $b + c = 3$ 이고 경우의 수는 4입니다.

$a = 5$ 이면 $b + c = 2$ 이고 경우의 수는 3입니다.

$a = 6$ 이면 $b + c = 1$ 이고 경우의 수는 2입니다.

$a = 7$ 이면 $b + c = 0$ 이고 경우의 수는 1입니다.

따라서 $6 + 6 + 5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 32$ 입니다.

풀이 2) 여사건 이용

$a + 2b \geq 3$ 인 사건보다는 그 여사건인 $a + 2b < 3$ 인 경우를 세기가 훨씬 더 간편하므로 이를 이용하여 풀이하겠습니다.

$a + 2b \geq 3$ 인 사건을 A 라 하고, $a + b + c = 7$ 인 사건을 B 라 하겠습니다. 문제에서 구하고자 하는 것은 $n(A \cap B)$ 입니다. 이때 $n(A \cap B) = n(B) - n(A^C \cap B)$ 이므로 $n(B)$ 와 $n(A^C \cap B)$ 를 구하면 $n(A \cap B)$ 를 구할 수 있습니다.

$n(B)$ 는 $a + b + c = 7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수이므로 $n(B) = {}_3H_7 = {}_9C_2 = 36$ 입니다.

$n(A^C \cap B)$ 는 $a + 2b < 3$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수입니다. 이때 $a + 2b = 0, a + 2b = 1, a + 2b = 2$ 로 두고 가능한 순서쌍을 직접 구하면 다음과 같습니다.

$(0, 0, 7), (1, 0, 6), (0, 1, 6), (2, 0, 5)$

따라서 $n(A^C \cap B) = 4$ 이므로 $n(A \cap B) = 36 - 4 = 32$ 입니다.

풀이 3) 식을 연립하기

(가)와 (나)를 연립하여 문자의 개수를 줄여봅시다. (가)의 양변에 2를 곱하면 $2a + 2b + 2c = 14$ 이고, (나)에서 $a + 2b \leq 3$ 이므로 $a + 2b + a + 2c = 14$ 에서 $a + 2c \leq 11 \cdots \textcircled{1}$ 입니다.

그런데 (가)에서 $a + b + c = 7$ 이므로 a 와 c 와 $a + c$ 의 값은 각각 아무리 커봐야 7입니다. 따라서 $a + c \leq 7 \cdots \textcircled{2}$ 입니다.

이때 ①과 ②를 동시에 만족시키는 a, c 의 값이 정해지면 b 는 자동으로 정해집니다. 따라서 c 를 기준으로 분류하여 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하면 각각 다음과 같습니다.

(1) $c = 0$

$a \leq 11$ 이고 $0 \leq a \leq 7$ 이므로 8입니다.

(2) $c = 1$

$a \leq 9$ 이고 $0 \leq a \leq 6$ 이므로 7입니다.

(3) $c = 2$

$a \leq 7$ 이고 $0 \leq a \leq 5$ 이므로 6입니다.

(4) $c = 3$

$a \leq 5$ 이고 $0 \leq a \leq 4$ 이므로 5입니다.

(5) $c = 4$

$a \leq 3$ 이고 $0 \leq a \leq 3$ 이므로 4입니다.

(6) $c = 5$

$a \leq 1$ 이고 $0 \leq a \leq 2$ 이므로 2입니다.

따라서 $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 2 = 32$ 입니다.

정답 : 32