

* 2019학년도 대수능 수학 가형 21번.

→ 정의역 $\mathbb{R}$, 미분가능한 함수 $f(x)$, $f(-1)=?$

(가) $x \in \mathbb{R}$, $2\{f(x)\}^2 \cdot f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 \cdot f'(2x+1)$ (나) $f(-\frac{1}{8})=1$, $f(6)=2$.

(가) 조건에서 미분 관련된 내용으로 보이지만 (차적으로) 연는 것이 없으므로 변수인 x 와 $2x+1$ 의 관계를 살펴봐야 하고, (나) 조건에서 주어진 $(x=-\frac{1}{8})$ 과 $(x=6)$ 을 대입해서 정리한다.

또한 $2\{f(x)\}^2 \cdot f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} \{f(x)\}^3 + C_1 \right)$ 이라는 부분도 인지해야 한다.

(i) $x/2x+1$	(ii) $x/2x+1$	} $\therefore$	$2\{f(-\frac{1}{8})\}^2 \cdot f'(-\frac{1}{8}) = \{f(\frac{3}{4})\}^2 \cdot f'(\frac{3}{4})$
$6 \rightarrow 13$	$(-\frac{1}{8}) \rightarrow \frac{3}{4}$		$2\{f(\frac{3}{4})\}^2 \cdot f'(\frac{3}{4}) = \{f(\frac{5}{2})\}^2 \cdot f'(\frac{5}{2})$
$13 \rightarrow 27$	$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{5}{2}$		$2\{f(\frac{5}{2})\}^2 \cdot f'(\frac{5}{2}) = \{f(6)\}^2 \cdot f'(6)$
-----	$\frac{5}{2} \rightarrow (6)$		

따라서 $8\{f(-\frac{1}{8})\}^2 \cdot f'(-\frac{1}{8}) = \{f(6)\}^2 \cdot f'(6)$

$\therefore 8f'(-\frac{1}{8}) = 4f'(6)$ 이므로 $2f'(-\frac{1}{8}) = f'(6) \dots \textcircled{1}$

(iii) $x=1$ 을 대입하면 $2\{f(-1)\}^2 \cdot f'(-1) = \{f(-1)\}^2 \cdot f'(-1)$

$\begin{cases} f'(-1) \neq 0 \text{ 이면 } f(-1)=0, & (\text{주관식으로 네기에 함든 부분이 있음을 알아차려야 한다}) \\ f'(-1)=0 \text{ 이면 } f(-1)=? \end{cases}$

→ 문제를 다 푼고 난 다음이면 ①이 의미없다는 점을 알 수 있지만, 이런 문제를 시험장에서 푼 때, ①을 정리 못하는 것은 바보짓에 가깝다.

(iv) $f(-1)$ 에 대한 접근이 주어진 식에서는 방향성을 잡기 어려우므로 양변을 적분한다.

$\begin{cases} 2\{f(x)\}^2 \cdot f'(x) = \left(\frac{2}{3} \{f(x)\}^3 + C_1 \right)' \\ \{f(2x+1)\}^2 \cdot f'(2x+1) = \left(\frac{1}{6} \{f(2x+1)\}^3 + C_2 \right)' \end{cases}$

$$\therefore \frac{2}{3} \{f(x)\}^3 = \frac{1}{6} \{f(2x+1)\}^3 + C. \rightarrow \{f(x)\}^3 = \frac{1}{4} \{f(2x+1)\}^3 + \frac{3}{2} C \dots (2)$$

$$\{f(-\frac{1}{8})\}^3 = 1 = \frac{1}{4} \{f(\frac{3}{4})\}^3 + \frac{3}{2} C$$

$$\{f(\frac{3}{4})\}^3 = \frac{1}{4} \{f(\frac{5}{2})\}^3 + \frac{3}{2} C$$

$$\{f(\frac{5}{2})\}^3 = \frac{1}{4} \{f(6)\}^3 + \frac{3}{2} C = 2 + \frac{3}{2} C.$$

$$\therefore \{f(\frac{3}{4})\}^3 = \frac{1}{4} \times (2 + \frac{3}{2} C) + \frac{3}{2} C = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} C + \frac{3}{2} C = \frac{1}{2} + \frac{15}{8} C.$$

$$\{f(-\frac{1}{8})\}^3 = 1 = \frac{1}{8} + \frac{15}{32} C + \frac{3}{2} C = \frac{1}{8} + \frac{63}{32} C. \therefore C = \frac{7}{8} \times \frac{32}{63} = \frac{4}{9}.$$

$$(2) \text{에 } x = -1, C = \frac{4}{9} \text{를 대입하면 } \frac{3}{4} \{f(-1)\}^3 = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore \{f(-1)\}^3 = \frac{8}{9}, \quad \{f(-1)\} = \frac{2}{\sqrt[3]{9}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{3} //$$

$$2 \{f(x)\}^2 \cdot f'(x) = \left(\frac{2}{3} \{f(x)\}^3 + C_1 \right)'$$

최적적분을 통하지 않고 바로 적분함수를 생각할 수 있어야 한다. 최적적분함수의 형태가 이러이러하므로 최적적분을 하거나 부분적분을 하는 것이 먼저가 아니고, 어떤 함수 (적분함수)를 미분하면 최적적분함수가 나오는가?를 생각해야 한다. 즉, 형태에 따라서 적분을 하는 것은 다음 문제지, 구선이다. 최적적분의 기본 정리를 한번 더 생각해 볼 것.