

* 2019 학년도 대수능 수학 가형 30번.

$$f(x) = 6\pi x^3 + \dots, \quad g(x) = \frac{1}{2 + \sin f(x)}, \quad g(x) \text{는 } x=\alpha \text{에서 극값을 갖는다.}$$

$$g'(x) = \frac{-\cos f(x) \times f'(x)}{(2 + \sin f(x))^2}, \quad \therefore \cos f(x) = 0 \text{ or } f'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{에서 } g'(x) = 0.$$

$$(가) \alpha_1 = 0, \quad g(\alpha_1) = \frac{2}{5} = g(0) \Rightarrow \frac{1}{2 + \sin f(0)} = \frac{2}{5} \therefore \sin f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(0) = \frac{\pi}{6} \dots \textcircled{1}$$

$$(나) \frac{1}{g(\alpha_5)} = \frac{1}{g(\alpha_2)} + \frac{1}{2} \quad (\because 0 < f(0) < \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \sin f(\alpha_5) - \sin f(\alpha_2) = \frac{1}{2} \dots \textcircled{2}$$

①을 이용해서 $f(x)$ 를 정리해보면, $f(x) = 6\pi x^3 + px^2 + qx + \frac{\pi}{6}$ 라 할 때,

$$f'(x) = 18\pi x^2 + 2px + q \text{ 에서 } f'(x) = 18\pi x^2 + 2px. \quad (\because \alpha_1 = 0, g'(\alpha_1) = g'(0) = 0$$

$$\cos f(0) \neq 0, f'(0) = 0)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 을 만족시키는 } x \text{는 } x=0, x = -\frac{p}{9\pi}.$$

(따라서 $p=0, p>0, p<0$ 일 때 $f(x)$ 의 개형이 달라질 수 있다).

* $g(x)$ 가 이분가능하고, $x=\alpha$ 에서 $g(x)$ 가 극값을 갖는 상황들은 다음과 같다.

$$A. f'(x) = 0 \text{ 이 구간, } \cos f(x) = 0 \rightarrow \text{case I}$$

$$B. f'(x) = 0 \text{ 이 구간, } \cos f(x) \neq 0. \rightarrow \text{극값 X.}$$

$$C. \cos f(x) = 0, f'(x) \neq 0 \rightarrow \text{case II.}$$

$$D. \cos f(x) = 0, f'(x) = 0. \rightarrow \text{극값 X.}$$

$$E. \cos f(x) \neq 0, f'(x) = 0. \rightarrow \text{case III.}$$

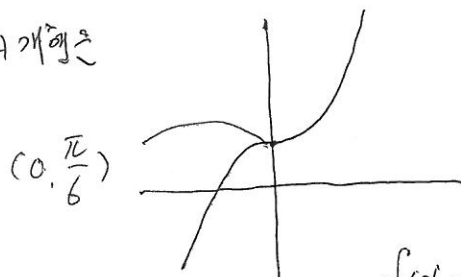
$$g'(x) = 0 \text{ 인 상황들,} \\ (A \wedge E).$$

$g(x)$ 가 극값을 가질 수 있는

상황들 (case I $\wedge$ case III).

* case I) $f'(x)=0$ 이 중점을 가지면 $-\frac{p}{9\pi} = 0$ 이므로 ($\because f'(0)=0$ 은 이미 찾은 상태)

$p=0$, 2 때 $f(x)$ 의 개형은



$\alpha_1 (=0)$ 이득에 $f'(x)=0$ 이 되려면

$\cos f(x)=0$ 인 경우뿐이다.

$$f(\alpha_2) = \frac{\pi}{2}, f(\alpha_3) = \frac{3\pi}{2}, f(\alpha_4) = \frac{5\pi}{2}, f(\alpha_5) = \frac{7\pi}{2}.$$

$$\therefore \sin f(\alpha_5) - \sin f(\alpha_2) = -1 - 1 = -2 \neq \frac{1}{2} \quad (\textcircled{2} \text{에 위배})$$

$\therefore$ case I) 은 불가. 결과적으로 $p > 0$ 인 경우 ($f(0)$ 이 극소인 경우) 도 불가.

또한 $f(\alpha_2)$ 와 $f(\alpha_5)$ 가 동시에 case II 이거나 case III 인 경우도 불가.

$$(\because \textcircled{2} \text{에 위배} \quad \sin f(\alpha_5) - \sin f(\alpha_2) = \frac{2n-1}{2} \pi \text{ 꼴이거나}$$

$f(0)$ 이 극대거나 아니거나와 같은 결과).

그러므로 $x = \alpha_2$ 일 때 case II, $x = \alpha_5$ 일 때 case III 을 만족시키는 경우 (case IV)

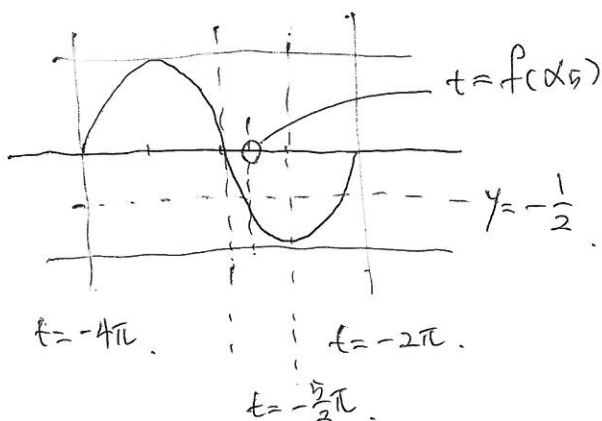
또는 $x = \alpha_2$ 일 때 case III, $x = \alpha_5$ 일 때 case II 를 만족시키는 경우 (case V) 이다.

* case IV) $\cos f(\alpha_2) = 0, f'(\alpha_2) \neq 0, \cos f(\alpha_5) \neq 0, f'(\alpha_5) = 0$.

$$\therefore f(\alpha_2) = -\frac{\pi}{2}, f(\alpha_3) = -\frac{3\pi}{2}, f(\alpha_4) = -\frac{5\pi}{2}.$$

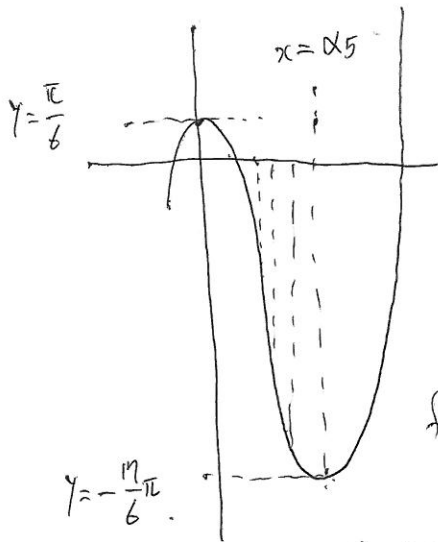
$$\sin f(\alpha_5) - \sin f(\alpha_2) = \sin f(\alpha_5) + 1 = \frac{1}{2} \text{ 에서 } \sin f(\alpha_5) = -\frac{1}{2}.$$

$\therefore f(\alpha_5)$ 는 $t < -\frac{5}{2}\pi$ 에서 $\sin t$ 의 값이 $-\frac{1}{2}$ 이 되는 t 의 최댓값이다.



$$\therefore f(\alpha_5) = -3\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{17}{6}\pi.$$

case IV 이 경우의 $f(x)$ 의 개형을 다음과 같다.



$$\text{즉, } f(\alpha_4) = f(\alpha_6), f(\alpha_3) = f(\alpha_7), f(\alpha_2) = f(\alpha_8) \text{ 이}$$

$$\text{성립하고, } f(\alpha_9) = \frac{\pi}{2}, f(\alpha_{10}) = \frac{3\pi}{2}, \dots \text{ 등의 값을 갖는다.}$$

$$\text{이 때, } \alpha_5 = -\frac{p}{9\pi} \text{ 이고 } f(x) = 6\pi x^3 + px^2 + \frac{\pi}{6} \text{ 에서}$$

$$f(\alpha_5) = f\left(-\frac{p}{9\pi}\right) = \frac{6\pi \cdot (-p^3)}{9^3\pi^3} + p \times \frac{p^2}{9^2\pi^2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{17}{6}\pi.$$

$$\therefore \frac{6\pi \cdot (-p^3)}{9^3\pi^3} + \frac{p^3 \cdot 9\pi}{9^3\pi^3} + \frac{9^3\pi^3 \cdot 3\pi}{9^3\pi^3} = 0 \text{ 에서 } 3\pi p^3 + 3\pi \cdot 9^3\pi^3 = 0.$$

$$\therefore p = -9\pi. (\because \alpha_5 = 1, f(x) \text{ 는 } x=0 \text{ 일 때 극대, } x=1 \text{ 일 때 극소인 3차})$$

$$\text{따라서 } f(x) = 6\pi x^3 - 9\pi x^2 + \frac{\pi}{6}. f'(x) = 18\pi x^2 - 18\pi x. g'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\cos f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(2 + \sin f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{6\pi}{8} - \frac{9\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = -\frac{17}{6}\pi \text{ (3차항식 등식을 이용해도 좋다).}$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{18\pi}{4} + \frac{18\pi}{2} = \frac{54\pi}{4} = \frac{27}{2}\pi.$$

$$\cos\left(-\frac{17}{6}\pi\right) = \cos \frac{17}{6}\pi = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right) = -\sin \frac{17}{6}\pi = -\sin\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore g'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{27}{2}\pi}{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{4}\pi}{\frac{9}{4}} = 3\sqrt{3}\pi. \therefore a^2 = 27.$$

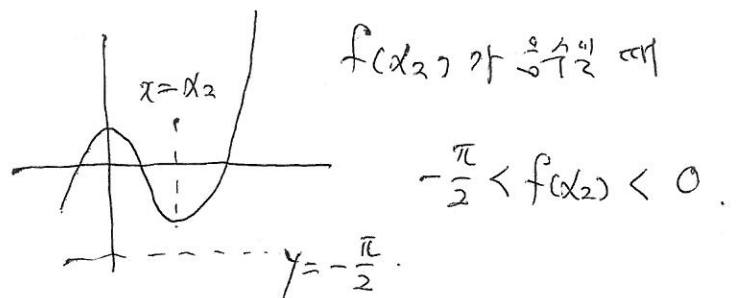
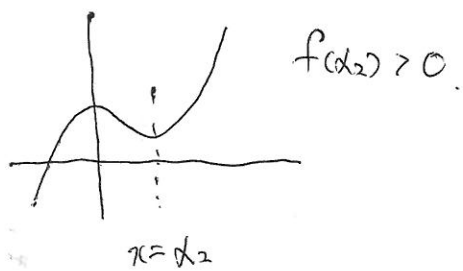
* case V) $\cos f(\alpha_2) \neq 0, f'(\alpha_2) = 0, \cos f(\alpha_5) = 0, f'(\alpha_5) \neq 0,$

$$\therefore \alpha_2 = -\frac{\pi}{9\pi}, f(\alpha_3) = \frac{\pi}{2}, f(\alpha_4) = \frac{3\pi}{2}, f(\alpha_5) = \frac{5\pi}{2} \quad \sin f(\alpha_5) = 1.$$

$-\frac{\pi}{2} < f(\alpha_2) < \frac{\pi}{6}$ 만약 $f(\alpha_2)$ 가 $-\frac{\pi}{2}$ 보다 작거나 같은 경우.

$f(\alpha_1)$ 과 $f(\alpha_2)$ 사이인 $-\frac{\pi}{2}$ 에서 $g(x)$ 가 극값을 갖는다.

case V) 의 개형 ($f(x)$) 을 나타내면 다음과 같다.



$$\therefore \sin f(\alpha_5) - \sin f(\alpha_2) = \frac{1}{2} \text{ 에서}$$

$$\sin f(\alpha_5) = 1 \text{ 이므로 } \sin f(\alpha_2) = \frac{1}{2}. \quad \therefore f(\alpha_2) \text{ 는 열린구간 } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$$

에서 sine 값이 $\frac{1}{2}$ 인 경우이다. $\rightarrow$ 불가.

