

* 2020 학년도 대수능 수학 4형 28번.

다항함수 $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \text{(가)} \int_1^x f(t) dt = \frac{x-1}{2} \{f(x) + f(1)\} \\ \text{(나)} \int_0^2 f(x) dx = 5 \cdot \int_{-1}^1 xf(x) dx. \end{cases}$
 $f(0)=1$, $f(4)=?$

* 정적분으로 정해진 함수 (적분구간에 변수가 포함된 함수)

→ primary: 밑줄과 위줄을 캐서 하는 값을 찾아서 정리.

secondary: 정해진 구간에 한해서 양변을 이분한 뒤에 정리.

(가) 에서 $x=1$ 을 대는 항등식 이므로 양변을 이분하면

$$f(x) = \frac{f(x)+f(1)}{2} + \frac{(x-1) \cdot f'(x)}{2}, \quad \therefore f(x) = xf'(x) - f'(x) + f(1) \quad \dots \textcircled{1}$$

$f(x) = ax^n + \dots$, ($a \neq 0$, n 은 음이 아닌 정수) ← 상수함수는 다항함수의 특이형임.

$$f'(x) = nax^{n-1} + \dots, \quad (n \text{ 은 자연수}).$$

$$\therefore \textcircled{1} \text{ 에서 양변의 최고차항만 비교하면 } ax^n = nax^{n-1}, \quad \therefore n=1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\therefore \text{따라서 } f(x) = ax+1 \quad (\because f(0)=1).$$

$$\int_0^2 (ax+1) dx = 5 \cdot \int_{-1}^1 (ax^2+x) dx = 10 \cdot \int_0^1 ax^2 dx$$

$$\therefore \left[\frac{ax^2}{2} + x \right]_0^2 = 2a+2 = 10 \cdot \left[\frac{ax^3}{3} \right]_0^1 = \frac{10a}{3}.$$

$$\therefore \frac{4a}{3} = 2 \text{ 에서 } a = \frac{3}{2}, \quad f(x) = \frac{3}{2}x+1, \quad \therefore f(4) = 6+1 = 7 //$$