

* 2020 학년도 대수능 수학 나형 30번.

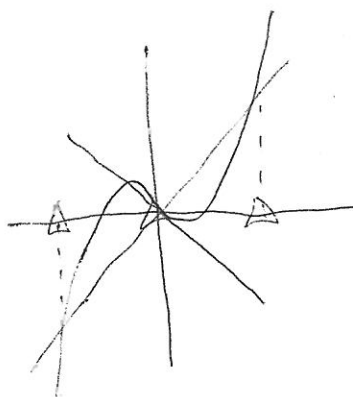
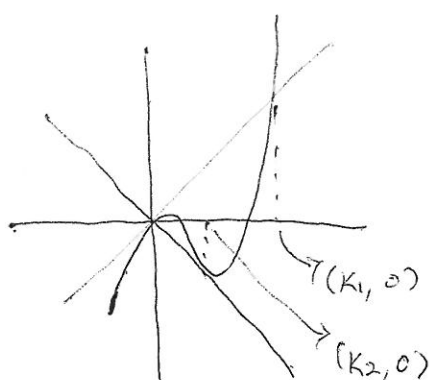
$$f(x) = ax^3 + \dots, \quad (a > 0), \quad f(0) = 0, \quad f'(1) = 1.$$

(가) 방정식 $f(x) - x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

(나) 방정식 $f(x) + x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

} 각각 실근의 개수는 3이다.
why?

조건을 만족시키는 $f(x)$ 의 개형을 다음과 같다.



이와 같은 개형은 조건 (가)를

만족시키지 못한다.

($\Delta \rightarrow 3$ 개).

$$\therefore f(x) - x = g(x) = ax^2(x - k_1), \quad f'(x) - 1 = g'(x) \text{ 에서}$$

$$g'(1) = 0 \text{ 이므로 } g'(x)|_{x=1} = 2ax(x - k_1) + ax^2|_{x=1} = 2a - 2ak_1 + a = 0.$$

$$\therefore k_1 = \frac{3}{2} \quad (\because a > 0) \quad \therefore f(x) - x = g(x) = ax^2(x - \frac{3}{2}) = ax^3 - \frac{3}{2}ax^2$$

$$f(x) + x = h(x) = ax(x - k_2)^2 = ax(x^2 - 2k_2x + k_2^2)$$

$$= ax^3 - 2k_2 \cdot ax^2 + ak_2^2x \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$h(x) = g(x) + 2x = ax^3 - \frac{3}{2}ax^2 + 2x, \quad \dots \dots (2)$$

$$(1) = (2) \text{ 이므로 } k_2 = \frac{3}{4}, \quad ak_2^2 = 2 \text{ 이므로 } a = 2 \times \frac{16}{9} = \frac{32}{9}.$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{32}{9}x^2(x - \frac{3}{2}) + x \text{ 에서 } f(3) = 32 \times \frac{3}{2} + 3 = 51.$$

* $k_1 = \frac{3}{2}$ 를 찾은 뒤 3차함수의 근의 특성을 이용하고 대칭기준(변곡)을 이용하는 것도 가능.