20수능 수학 가형 #30 -868425

[문제]

$t>0$. $y=t^3 \ln(x-t)$가

$y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록

하는 $a=f(t)$. $\{f'(\frac{1}{3})\}^2=?$

[풀이]

두 그래프는 볼록성이 다르므로,

접하면 무조건 한 점에서만 만나요.

방정식.

$t^3 \ln(x-t)=2e^{x-a}$.

$t^3/(x-t)=2e^{x-a}$.

$\therefore (x-t)\ln(x-t)=1$

여기서. $\alpha \ln \alpha=1$ 이 되는 실수 α를 놓읍시다

(α는 유일한 실수입니다)

$\therefore x=t+\alpha$

$t^3 \times \ln\alpha = t^3 \times \frac{1}{\alpha} = 2e^{t+\alpha-a}$

구하는건 a이므로, a만 걸러내면

$e^a = 2\alpha e^{t+\alpha}/t^3$.

$\therefore a=\ln 2\alpha+(t+\alpha)-3\ln t=f(t)$

$f'(t)=1-3/t$. (α는 그냥 실수니까 없어짐)

$\therefore f'(\frac{1}{3})=-8$. 답 $=\boxed{64}$

20수능 수학 가형 #21 - 767255, 846752, 874832, 900075

[문제]

$y=e^x$ 위의 점 (t, e^t), 접선 $f(x)$

$y=|f(x)+k-\ln x|$ 가 양의 실수 전체 미·가

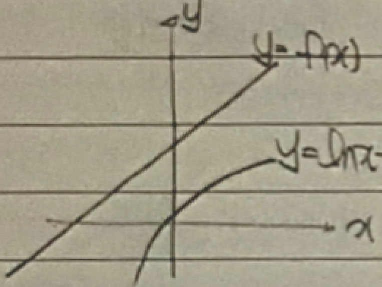
k의 최솟값 $g(t)$.

$a, b(a<b)$ 에 대해

$\int_a^b g(t)dt = m$, <보기>에서 옳은 것은?

[풀이]

$f(x) = e^t(x-t)+e^t$.



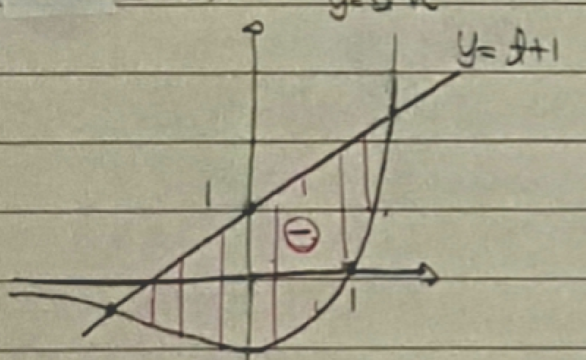
$|f(x)-(\ln x+k)|$ 가 접할 때 k가 최소이다.

접점은 $(e^{-t}, 1-(t-1)e^t)$ 이다.

(접점에서 기울기 e^t).

$g(t) = (t-1)e^t - (t+1)$

그리면,



$y=(t+1)$과 $y=(t-1)e^t$의 차이함수 이다.

ㄱ. 두 교점 사이 아무 두 실수만 a,b로 잡으면 적분값 음수를 만들 수 있다. (참)

ㄴ. $g(c)=0$ 이면

$(c-1)e^c = c+1 \cdots ①$

$g(-c) = (-c-1)e^{-c} - (-c+1)$ 이므로

①에서 $e^{-c} = \frac{c-1}{c+1}$ 을 대입하면,

$g(-c)=0$ 이다. (참)

ㄷ. $g'(t) = te^t - 1$

$\therefore 1+g'(\beta) = \beta e^\beta,\ 1+g'(\alpha) = \alpha e^\alpha$

m(적분값)이 최소 이려면

ㄴ에서 주어진 $c, -c$ 일 때이다.

$\therefore \frac{ce^c}{-ce^{-c}} = -e^{2c}$

$-e^{2c} < -e^2$ 이려면

$c>1$ 이어야 하는데,

앞 그래프에 따라 맞다. (참)

답: ㄱ.ㄴ.ㄷ.

20수능 수학 가형 #27 -900075

[문제]

한변길이4. $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$인 마름모 ABCD.

$\overline{BC}$, $\overline{CD}$의 중점 M.N에 대해

$\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{MN}$ 으로 접어 올린 사면체 PAMN.

AMN의 PAM 위로 정사영 넓이 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$.

$p+q=?$

[풀이]

우리에게 필요한건

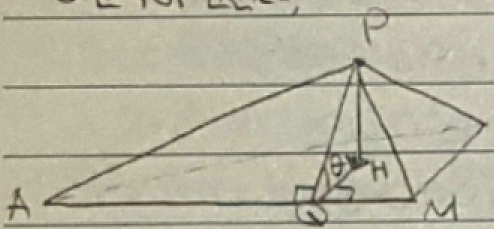
① △ AMN의 넓이

② AMN, PAM의 이면각의 cos 값.

①은 쉽죠. 밑변 2, 높이 $3\sqrt{3}$이니까

(△AMN 넓이) = $3\sqrt{3}$ 입니다.

이면각이 문제데,



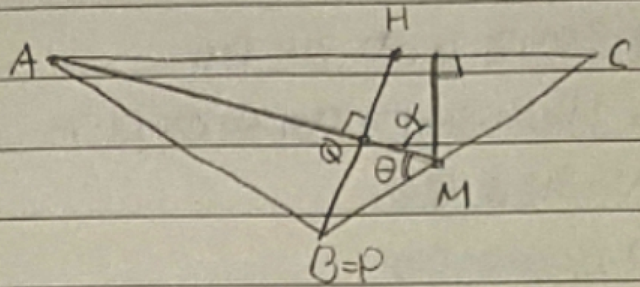
각 θ를 구해야 합니다.

P에서 $\overline{AM}$까지 수선의 발을 Q,

밑면으로 내린 수선의 발을 H라 하면

∠PQH를 구해야죠.

전개도에서 보면,



이렇게 되요.

구하는 cos값은 $\overline{QH}/\overline{BQ}$입니다.

여기서 막막하죠.

일단 갖고 있는 값으로 최대한 때려봅시다

$\tan\alpha = 3\sqrt{3}$. $\therefore \cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}}$이고,

$\theta = \frac{2\pi}{3} - \alpha$ 입니다.

$\overline{BM} = 2$, $\overline{AM} = 2\sqrt{7}$임을 알고 있으므로

$\cos\theta$만 구하면 모든 길이가 나오겠죠?

$\cos\theta = \cos(\frac{2\pi}{3} - \alpha) = -\frac{1}{4\sqrt{7}} + \frac{9}{4\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\therefore \overline{QM} = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $\overline{AQ} = \frac{10}{\sqrt{7}}$, $\overline{BQ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\overline{QH} = \overline{AQ}\cos\alpha$이므로

$\overline{QH} = \frac{10}{2\sqrt{7}\sqrt{7}}$

$\overline{QH}/\overline{BQ} = 9/5$

$\therefore$ (구하는 값) $= 5/9 \times 3\sqrt{3} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$

$\therefore p+q = \boxed{8}$

20수능 수학 가형 #17 -900075

[문제]

좌표 평면에 한변 길이 10 정△ABC

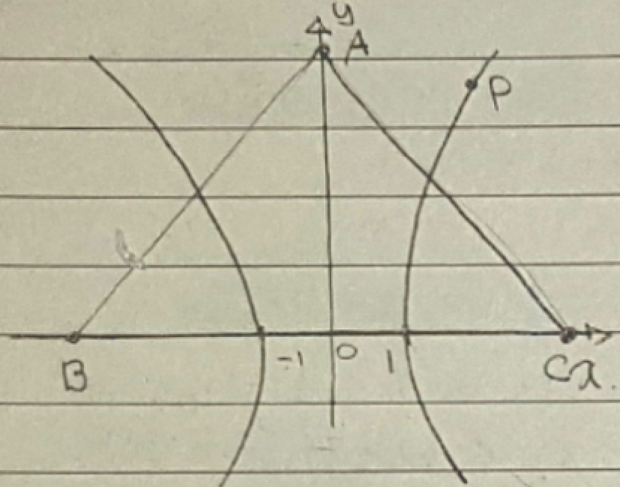
$\overline{PB}-\overline{PC}=2$ 인 점 P, PA 길이 최소.

△PBC 넓이?

[풀이]

길이 차 일정. 뭐죠?

그죠. 쌍곡선이죠. 좌표축 설정하고 그립시다.



A의 좌표는 $(0, 5\sqrt{3})$ 입니다.

주축 길이가 2이고, 초점이 B,C 이므로

식은

$$x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$$ 입니다.

그러므로 P의 좌표는

$P\left(\sqrt{1+\frac{t^2}{24}},\ t\right)$ 으로 놓을수 있습니다

(P의 y좌표가 중요하니까 그게를 미지수로)

이제 $\overline{AP}^2$을 구해 봅시다.

$$\left(1+\frac{t^2}{24}\right)+(t-5\sqrt{3})^2$$

$$= \frac{25}{24}t^2 - 10\sqrt{3}t + (\text{상수항})$$

상수항은 중요하지 않아요. 위 2차식을 최소로 만드는 t는 축, 즉, $t=\frac{24}{5}\sqrt{3}$ 에서 입니다.

$\therefore \triangle PBC = \frac{24}{5}\sqrt{3} \times 10 \times \frac{1}{2} = \boxed{24\sqrt{3}}$

20수능 수학 가형 #19. -900075

[문제]

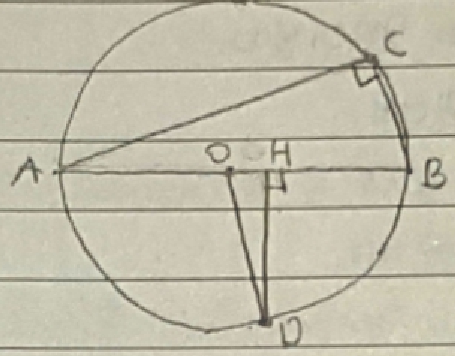
한 원 위의 A,B,C,D

(가) $|\overrightarrow{AB}|=8$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

(나) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$

$|\overrightarrow{AD}|^2=?$

[풀이]



$\overline{AC}\perp\overline{BC}$ 이므로 $\overline{AB}$는 지름입니다.

중심을 O라 하면,

(나)에서 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{CB}$ 입니다.

$2\overrightarrow{CB}$가 반지름이므로, $|\overrightarrow{CB}|=2$이고,

$\overrightarrow{CB}$와 $\overrightarrow{OD}$가 평행하겠죠?

D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발 H에 대해,

$\angle BAC=\angle ODH$ 이므로,

△BAC와 △ODH는 닮음 입니다.

$\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=2$ 이므로

$\overline{OH}=1$, $\overline{HD}=\sqrt{15}$ 입니다

$\therefore |\overrightarrow{AD}|^2=(4+1)^2+(\sqrt{15})^2=\boxed{40}$

20수능 수학 나형 #21 -.817784

[문제]

(가) $a_{2n}=a_n-1$

(나) $a_{2n+1}=2a_n+1$

$a_{20}=1$. $\sum_{n=1}^{63} a_n=?$

[풀이]

잠깐 앉아서 명상해 봅시다.

항이 너무 많아요.

"항 개수를 줄이자"를 일차 목표로 합시다.

(가), (나) 조건을 보니,

a_{2n}, a_{2n+1} 항이 동시에 a_n으로 표현됩니다.

그렇다면,

a_{2n}과 a_{2n+1}을 한데 묶으면

항 개수가 절반으로 줄겠네요?

그럼 그렇게 해 봅시다.

$(준\ 식)=a_1+(a_{2\times1}+a_{2\times1+1})+$

$(a_{2\times2}+a_{2\times2+1})+\cdots+(a_{2\times31}+a_{2\times31+1})$

$=a_1+(a_1-1+2a_1+1)+(a_2-1+2a_2+1)$

$+\cdots+(a_{31}-1+2a_{31}+1)$

$=a_1+3\times(a_1+a_2+\cdots+a_{31})$

a_1이 따로 남네요. a_1을 계산해줍시다.

$a_{20}=1$ $\therefore a_{10}=3$ $\therefore a_5=1$, $a_2=1$, $a_1=2$

이제 우리가 구하는 값은

$2+3\times\sum_{n=1}^{31} a_n$ 이 됩니다.

같은 방법으로 계속 해 봅시다.

$2+3\times(a_1+(a_2+a_{2+1})+(a_4+a_{4+1})+\cdots+(a_{30}+a_{30+1}))$

$=2+3\times(2+3\times\sum_{n=1}^{15} a_n)=8+9\times\sum_{n=1}^{15} a_n$

또 다시 같은 방법으로,

$8+9\times\sum_{n=1}^{15} a_n=8+9(2+3\times\sum_{n=1}^{7} a_n)$

$=26+27\times\sum_{n=1}^{7} a_n$

$26+27\times\sum_{n=1}^{7} a_n=80+81\times\sum_{n=1}^{3} a_n$

조건으로부터 $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=5$ 이므로,

(답) $=80+81\times8=\boxed{728}$