제 2 교시 수학 영역(나 형) 홀수형

5지선다형

1. $\log 2 = a$, $\log 3 = b$라 할 때, $\log \frac{4}{15}$를 a, b로 나타낸 것은? [2점]

① $3a-b-1$ ② $3a+b-1$ ③ $2a-b+1$ ④ $2a+b-1$ ⑤ $a-3b+1$

2. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 두 수의 곱 ab가 6의 배수일 때, 이 두 수의 합 $a+b$가 7일 확률은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

3. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 4x^2-a & (x<1) \\ x^3+a & (x \ge 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = -15, \ |a_3| - a_4 = 0$$

일 때, a_7의 값은? [3점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

5. A, B를 포함한 6명이 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 앉을 때, A, B가 이웃하여 앉을 확률은? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

6. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -2t + 4$$

이다. $t=0$부터 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

7. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\sin(\beta-\alpha)$의 값은?

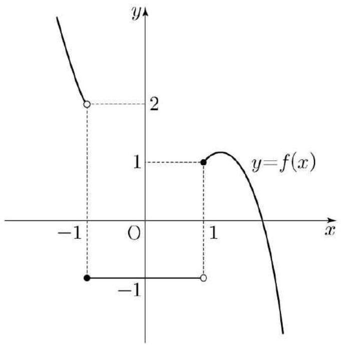
(단, α, β는 예각이다.) [3점]

① $\frac{3\sqrt{5}}{20}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ④ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$

8. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$의 전개식에서 x^2의 계수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{4} a_n$의 값은? [3점]

① 76 ② 77 ③ 78 ④ 79 ⑤ 80

9. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x) - \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

10. 함수 $f(x) = -2^{4-3x}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

11. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 세 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 세 자리 자연수가 홀수인 경우의 수는? [3점]

① 45 ② 55 ③ 65 ④ 75 ⑤ 85

12. 삼차방정식 $x^3+3x^2-9x+4-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 개수는? [3점]

① 28 ② 31 ③ 34 ④ 37 ⑤ 40

13. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

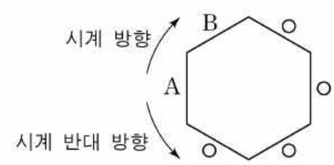
$$a_3 = 4(a_2 - a_1), \quad \sum_{k=1}^{6} a_k = 15$$

일 때, $a_1 + a_3 + a_5$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

14. A, B를 포함한 6명이 정육각형 모양의 탁자에 그림과 같이 둘러 앉아 주사위 한 개를 사용하여 다음 규칙을 따르는 시행을 한다.

> 주사위를 가진 사람이 주사위를 던져 나온 눈의 수가 3의 배수이면 시계 방향으로, 3의 배수가 아니면 시계 반대 방향으로 이웃한 사람에게 주사위를 준다.



A부터 시작하여 이 시행을 5번 한 후 B가 주사위를 가지고 있을 확률은? [4점]

① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{8}{27}$ ④ $\frac{10}{27}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

15. 함수 $f(x) = x^3 - 2x$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < -1) \\ f(x+p)+q & (x \ge -1) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 0이 아닌 상수이다.) [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

16. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 1$일 때,
>
> (좌변) $= (-1)^2 \times 1^2 = 1$
>
> (우변) $= (-1)^2 \times \frac{1 \times 2}{2} = 1$
>
> 따라서 (*)이 성립한다.
>
> (ii) $n = m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
>
> $$\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} k^2 = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} k^2 + \boxed{(가)}$$
> $$= \boxed{(나)} + \boxed{(가)}$$
> $$= (-1)^{m+2} \cdot \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$
>
> 이다.
>
> 따라서 $n = m+1$일 때도 (*)이 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{f(5)}{g(2)}$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

17. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

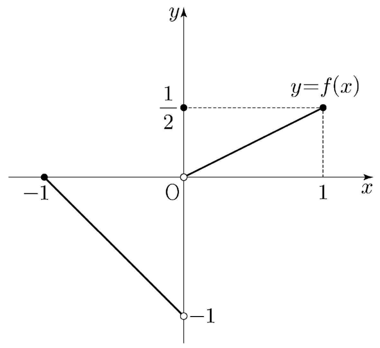
(가) $f(10) > f(20)$
(나) $f(4) < f(22)$

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

m이 자연수일 때, $P(17 \le X \le 18)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062 ④ 0.078 ⑤ 0.097

18. 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가

$$g(x)=f(x)+|f(x)|,\quad h(x)=f(x)+f(-x)$$

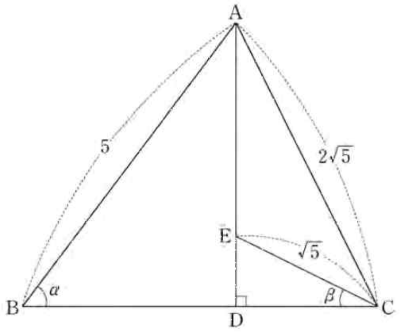
일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0} g(x)=0$
ㄴ. 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자.
선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{EC}=\sqrt{5}$이다. $\angle ABD=\alpha$, $\angle DCE=\beta$라 할 때, $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

20. 상자 A와 상자 B에 각각 6개의 공이 들어 있다. 동전 1개를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 상자 A에서 공 1개를 꺼내어 상자 B에 넣고, 뒷면이 나오면 상자 B에서 공 1개를 꺼내어 상자 A에 넣는다.

위의 시행을 6번 반복할 때, 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 될 확률은? [4점]

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{3}{64}$ ③ $\frac{5}{64}$ ④ $\frac{7}{64}$ ⑤ $\frac{9}{64}$

21. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$ 에 대하여 $x \geq 0$ 에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$ 에서 $g(x)=c_1$ (c_1 은 상수)
(나) $1<x<5$ 에서 $g(x)$ 는 감소한다.
(다) $x>5$ 에서 $g(x)=c_2$ (c_2 는 상수)

$f(\sqrt{2})$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

단답형

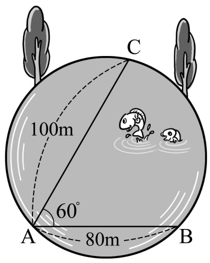
22. 지수부등식 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x} \leq 5^{x+4}$ 을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합은? [3점]

23. 방정식 $x+y+z=-7$ 을 만족시키는 양이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는? [3점]

24. 두 곡선 $y=2x^2-4x$ 와 $y=x^2-2x+3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

25. 원 모양의 호수의 넓이를 구하기 위해 호수의 가장자리의 세 지점 A, B, C 에서 거리와 각을 측정한 결과가 다음과 같았다.

$\overline{\mathrm{AB}}=80\,\mathrm{m}$
$\overline{\mathrm{AC}}=100\,\mathrm{m}$
$\angle\mathrm{CAB}=60^\circ$



이 호수의 넓이를 S라 할 때, $\frac{S}{10}$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 어느 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 초콜릿 중에서 임의추출한, 크기가 49 인 표본을 조사하였더니 초콜릿 무게의 표본평균의 값이 $\overline{x}$ 이었다.
이 결과를 이용하여, 이 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게의 평균 m 에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간을 구하면 $1.73 \le m \le 1.87$ 이다. $\frac{\sigma}{\overline{x}}=k$ 일 때, $180k$ 의 값을 구하시오.
(단, 무게의 단위는 g이고, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.475$ 로 계산한다.) [4점]

27. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \ge 0$)에서의 위치 x가

$$x = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + k \ (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 가속도가 0일 때, 점 P의 위치는 40이다. k의 값을 구하시오. [4점]

28. 무게가 1인 추 6개, 무게가 2인 추 3개와 비어 있는 주머니 1개가 있다. 주사위 한 개를 사용하여 다음의 시행을 한다. (단, 무게의 단위는 g이다.)

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 무게가 1인 추 1개를 주머니에 넣고, 눈의 수가 3 이상이면 무게가 2인 추 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 반복하여 주머니에 들어 있는 추의 총무게가 처음으로 6보다 크거나 같을 때, 주머니에 들어 있는 추의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)$ ($x=3, 4, 5, 6$)을 구하는 과정이다.

(i) $X=3$인 사건은
주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로
$\mathrm{P}(X=3) = \boxed{\text{(가)}}$

(ii) $X=4$인 사건은
세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와
세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로
나눌 수 있다. 그러므로
$\mathrm{P}(X=4) = \boxed{\text{(나)}} + {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$

(iii) $X=5$인 사건은
네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고
다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와
네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로
나눌 수 있다. 그러므로
$\mathrm{P}(X=5) = {}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \frac{2}{3} + \boxed{\text{(다)}}$

(iv) $X=6$인 사건은
다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우이므로
$\mathrm{P}(X=6) = \left(\frac{1}{3}\right)^5$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $9 \times \frac{ab}{c}$의 값은? [4점]

29. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(0, 1)$이다.
(나) 점 P_n의 좌표가 (a_n, b_n)일 때,
$b_n > \sqrt{a_n}$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 (a_n+1, b_n)이고,
$b_n \leq \sqrt{a_n}$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 (a_n, b_n+1)이다.

100개의 선분 $OP_1, P_1P_2, P_2P_3, \cdots, P_{99}P_{100}$으로 이루어진 도형과 직선 $x=k$ $(1 \leq k \leq 90$, k는 자연수$)$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_k라 하자. 부등식 $90 \leq S_k \leq 150$을 만족시키는 자연수 k의 개수는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

30. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f' \circ g)(x)$가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2021학년도 대수능 모의평가 [나형] 해설

1	①	2	③	3	①	4	①	5	③
6	③	7	②	8	①	9	④	10	④
11	④	12	②	13	③	14	③	15	①
16	③	17	③	18	③	19	⑤	20	③
21	④	22	15	23	36	24	35	25	280
26	25	27	22	28	4	29	11	30	65

2021수능 예상/분석을 다음 링크에서 확인하실 수 있습니다.
https://www.youtube.com/watch?v=-4lF7CYx5Rc

[채널 뷰티풀마인드]

1) ①

출처

2017년 3월 나08

해설

$\log 2 = a$, $\log 3 = b$라 하자.

$\log \frac{4}{15} = \log \frac{8}{30}$

$= \log 8 - \log 30$

$= \log 2^3 - \log(3 \times 10)$

$= 3\log 2 - \log 3 - 1$

따라서 $\log \frac{4}{15} = 3a - b - 1$

2) ③

출처

2016년 9월 가12

해설

두 수의 곱 ab가 6의 배수일 때의 순서쌍을 구해보면

$(1,\ 6)$

$(2,\ 3)$, $(2,\ 6)$

$(3,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 6)$

$(4,\ 3)$, $(4,\ 6)$

$(5,\ 6)$

$(6,\ 1)$, $(6,\ 2)$, $(6,\ 3)$, $(6,\ 4)$, $(6,\ 5)$, $(6,\ 6)$

으로 모두 15개이다.

이들 중 두 수의 합 $a+b=7$일 경우는

$(1,\ 6)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(6,\ 1)$로 4가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{15}$이다.

3) ①

출처

2016년 6월 나09

해설

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 $4x^2-a$와 x^3+a가 모두 다항함수이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to 1-} (4x^2-a) = 1+a \Leftrightarrow 4-a = 1+a$

$\therefore\ a = \frac{3}{2}$

4) ①

출처

2018년 9월 나13

해설

$|a_3| = a_4$에서 $a_3 < 0$, $a_4 > 0$이고 $a_3 + a_4 = 0$이다.

$a_n = -15 + (n-1)d$라 하면

$a_3 + a_4 = -15 + 2d - 15 + 3d = 0$에서 $d = 6$이다

따라서 $a_n = 6n - 21$이므로 $a_7 = 21$이다.

5) ③

출처

2018년 7월 가06

해설

A, B를 포함한 6명이 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 앉는 경우의 수는

$(6-1)! = 5! = 120$

A, B가 이웃하여 6명이 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 앉는 경우의 수는

$2! \times (5-1)! = 2! \times 4! = 48$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120} = \frac{2}{5}$

6) ③

출처

2017년 수능 나12

해설

$\int_0^4 |-2t+4|dt$

$= \int_0^2 (-2t+4)dt + \int_2^4 (2t-4)dt$

$= [-t^2+4t]_0^2 + [t^2-4t]_2^4$

$= (-4+8) + \{(16-16)-(4-8)\}$

$= 4+4 = 8$

7) ②

출처

2018년 10월 가07

해설

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$

$= \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

8) ①

출처

2018년 5월 가06

해설

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ 의 전개식에서 일반항은

${}_{2n}C_r\, x^{2n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_{2n}C_r \times x^{2n-2r}$

x^2의 계수는 $2n-2r=2$일 때, 즉 $r=n-1$이므로

$a_n = {}_{2n}C_{n-1}$

따라서

$\sum_{n=1}^{4} a_n = \sum_{n=1}^{4} {}_{2n}C_{n-1} = {}_2C_0 + {}_4C_1 + {}_6C_2 + {}_8C_3 = 76$

9) ④

출처

2019년 수능 나07

해설

$\lim_{x\to -1-} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$

따라서

$\lim_{x\to -1-} f(x) - \lim_{x\to 1+} f(x) = 2-1=1$

10) ④

출처

2018년 9월 가07

해설

$f(x)$는 증가함수 이므로 $f(x)$가 제 2사분면을 지나지 않으려면

$f(0)\le 0$ 이어야 한다.

$f(0) = -2^4+k \le 0$

$k \le 16$

k의 최댓값은 16

11) ④

출처

2017년 7월 가08

해설

세 자리 자연수가 홀수이려면 일의 자리의 숫자는 홀수이어야 한다.

일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1$

백의 자리와 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_2$

따라서 세 자리 자연수가 홀수인 경우의 수는

${}_3C_1 \times {}_5\Pi_2 = 3\times 5^2 = 75$

12) ②

출처

2015년 7월 나12

해설

$f(x)=x^3+3x^2-9x+4-k$라 하면

$f'(x)=3(x+3)(x-1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$31-k$ (극댓값)	↘	$-1-k$ (극솟값)	↗

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-3)f(1)<0$이어야 하므로

$(31-k)(-1-k)<0$

$-1<k<31$

따라서 모든 정수 k의 개수는 31

13) ③

출처

2018년 6월 나15

해설

a_n이 등비수열이므로 $a_3=4(a_2-a_1)$에서

$ar^2=4(ar-a)$

$r^2=4r-4$

$(r-2)^2=0$

$\therefore r=2$

$\sum_{k=1}^{6} a_k = \frac{a(1-r^6)}{1-r} = 15$ 에서 $a=\frac{15}{63}=\frac{5}{21}$

따라서

$a_1+a_3+a_5 = a+ar^2+ar^4 = a(1+r^2+r^4)$

$=\frac{5}{21}(1+2^2+2^4)=5$

14) ③

출처

2010년 6월 가14

해설

5번 시행 후 B가 주사위를 가지고 있기 위해서는 시계 방향으로 3번, 반대 방향으로 2번 이동하거나 시계 반대방향으로 5번 이동해야 한다.

시계 방향으로 3번, 반대 방향으로 2번 이동하는 확률은

주사위를 던지는 시행은 독립이므로 ${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$이고

시계반대방향으로 5번 이동하는 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^5$이다.

두 확률의 합은 $\frac{8}{27}$

15) ①

출처

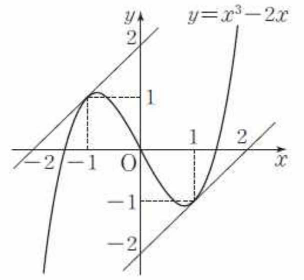
2018학년 전북5월 나26

해설

$f'(x)=3x^2-2$에서 $f'(-1)=1$

$f'(x)=1$에서 $x=-1$또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곡선 $y=f(x)$위에 있는 점 $(1,-1)$이 점 $(-1,1)$의 위치에 오도록 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 $y=f(x)\,(x\geq 1)$의 그래프가 평행이동하면 된다.
즉, $x\geq -1$일 때 $g(x)=f(x+2)+2$이다.
따라서 $p=2,\,q=2$이므로 $p+q=4$

심층분석

최근 15~19번의 난이도가 높아지고, 기존 킬러문항의 난이도가 다소 하향되는 추세를 보여주고 있으며, 따라서 15번 문항에서부터 높아지는 난이도에 대한 대비가 필요하겠다.
해당 문제는 미분가능성에 대한 기하학적 해석과 선행단원인 도형의 이동(평행이동)에 대한 이해를 통해 빠르게 해결 가능한 문제이다.
단, 함수의 미분계수와 도함수를 이용한 미분가능성 및 미분가능성과 연속성의 관계를 이용한 연립방정식으로 풀이 할 수도 있으므로, 간단한 문제이지만 다양하게 해석해 볼 수 있겠다.

뷰티풀마인드 송태주

16) ③
2016년 3월 나16
수학적 귀납법에 의한 증명이므로 $n=1$일 때 성립함을 증명하고 $n=m$일 때 성립함을 가정하여
$n=m+1$일 때도 성립함을 증명한다.
문제에서 $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하였으므로

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{m+1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}\quad\cdots ㉠$$

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+(-1)^{m+2}(m+1)^2$$

그러므로 $\boxed{(가)}$는 $(-1)^{m+2}(m+1)^2$이다.

또, 등식 $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}+\boxed{(가)}$와

㉠에서 $\boxed{(나)}$는 $(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{m(m+1)}{2}$

그러므로 $f(m)=(-1)^{m+2}(m+1)^2$,

$g(m)=(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{m(m+1)}{2}$이므로

$f(5)=(-1)^{5+2}(5+1)^2=-36$

$g(2)=(-1)^{2+1}\cdot\dfrac{2(2+1)}{2}=-3$이다.

따라서 $\dfrac{f(5)}{g(2)}=\dfrac{-36}{-3}=12$

17) ③
출처
2017학년도 수능
해설
조건 (가)에서 $f(10)>f(20)$이므로 $x=m$을 기준으로 $x=20$까지의 거리가 $x=10$까지의 거리보다 크다.
$\therefore\ |m-20|>|m-10|$이고, 양변을 제곱하여 정리하면 $m<15$
조건 (나)에서 $f(4)<f(22)$이므로 $x=m$을 기준으로 $x=4$까지의 거리가 $x=22$까지의 거리보다 크다.
$\therefore\ |m-4|>|m-22|$이고, 양변을 제곱하여 정리하면 $13<m$
$\therefore\ 13<m<15$이고 m은 자연수이므로 $m=14$
이를 이용하여 구하는 확률을 표준화하면

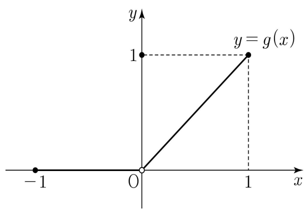
$$\mathrm{P}\left(\frac{17-14}{5}\leq Z\leq\frac{18-14}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(0.6\leq Z\leq 0.8)$$
$$=0.288-0.226=0.062$$

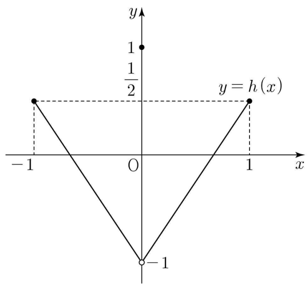
심층분석

수능에서 매번 빠지지 않고 나오는 확률밀도함수에 관한 문제로 정규분포의 대칭성을 정확히 이해한 후 접근할 필요가 있다.
해당 문제의 경우 “평균에 가까울수록 함숫값이 크다“라는 정규분포를 따르는 확률밀도함수의 성질을 이용하고, 이후에는 확률변수를 표준화시켜 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z로 바꾸기만 하면 되는 문제이므로, 처음 조건식을 유도해낼 수 있다면 어렵지 않은 문제이다.

뷰티풀마인드 허민

18) ③
출처
2018년도 9월 나18
해설
주어진 조건에 따라 $g(x)=f(x)+|f(x)|$, $h(x)=f(x)+f(-x)$의 그래프를 그리면 아래와 같다.





ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0-}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$이다. (참)
ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0-}|h(x)|=|-1|=1$, $\lim\limits_{x\to 0+}|h(x)|=|-1|=1$, $|h(x)|=1$
이므로 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to 0} g(x)=0$, $\lim_{x\to 0}|h(x)|=1$에서 $\lim_{x\to 0} g(x)|h(x)|=0\times 1=0$

$g(0)|h(0)|=1\times 1=1$

$\lim_{x\to 0} g(x)|h(x)|\neq g(0)|h(0)|$이므로 함수 $g(x)|h(x)|$는

$x=0$에서 불연속이다. (거짓)

심층분석

함수의 연속문제는 거의 빠짐없이 다양한 난이도로 출제되는 단원이다. ('19년 21번, '17년 14번, '16년 27번, '15년 23번) 특히 '15개정에서 '수열의 극한' 단원이 '미적분'으로 편입되면서 수학2 과목 내에서의 비중도 높아졌고, 함수의 극한에 대한 이해도를 평가할 수 있는 만큼 2021학년도 수능에서 역시 출제될 가능성이 매우 높다 하겠다.

함수의 연속 단원은 그래프를 통한 해석뿐만 아니라 함수가 $x=a$에서 연속일 조건인 $f(a)=\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$을 사용할 수 있어야 한다.

해당 문제는 그래프를 통해서만 풀고자 하면 실수할 가능성이 있는 문제로, 정의에 입각한 풀이가 필요하겠다.

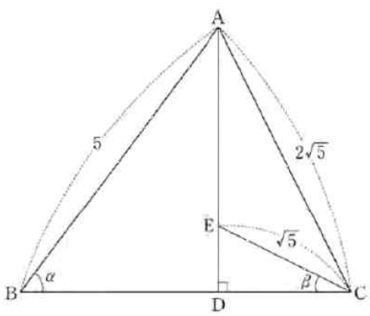
뷰티풀마인드 송태주

19) ⑤

출처

[2018학년도 수능 가14]

해설



$\overline{CD}=a$ (단, $a>0$)이라 하면 직각삼각형 CED에서

$\overline{DE}=\sqrt{\overline{CE}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-a^2}=\sqrt{5-a^2}$

이때, $\overline{AD}=4\overline{DE}$이므로

$\overline{AD}=4\sqrt{5-a^2}$

직각삼각형 CAD에서

$\overline{CA}^2=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2$ 이므로

$(2\sqrt{5})^2=a^2+(4\sqrt{5-a^2})^2$

$20=a^2+80-16a^2$

$15a^2=60$, $a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$

따라서 $\overline{DE}=1$, $\overline{AD}=4$이다.

직각삼각형 ABD에서

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

이므로 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

직각삼각형 CAD에서

$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

따라서

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{10}{5\sqrt{5}}$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

20) ③

출처

2018년 9월 나20

해설

동전을 던져서 앞면과 뒷면이 나오는 확률은 $\frac{1}{2}$로 같다.

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 되어야 하므로 5번째 시행 후에는 7, 4번째 시행 후에는 6이어야 한다.

4번째 시행 후에 6이 되기 위해서는 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나와야 하고, 첫 번째와 두 번째 모두 앞면이 나오는 경우를 제외해야 하므로 구하는 확률은

$\left\{({}_4C_2-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{64}$이다.

[다른풀이]

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 되는 경우를 직접 세어보면

1	2	3	4	5	6
앞	뒤	앞	뒤	앞	앞
앞	뒤	뒤	앞	앞	앞
뒤	앞	뒤	앞	앞	앞
뒤	뒤	앞	앞	앞	앞
뒤	앞	앞	뒤	앞	앞

의 5가지이고, 전체 경우의 수는 $2^6=64$이므로 구하는 확률은

$\frac{5}{64}$이다.

21) ④

출처

2018년 9월 나21

해설

사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$의 그래프는 y축에 대칭이다.

$f(t)-|f(t)|=\begin{cases}0 & (f(t)\geq 0)\\ 2f(t) & (f(t)<0)\end{cases}$에서 $f(t)-|f(t)|\leq 0$이므로

함수 $g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(x)-|f(x)|\}dx$는 증가하지 않는 함수이다.

즉, $g(x)$의 그래프는 상수함수인 구간과 감소하는 구간으로 이루어진다.

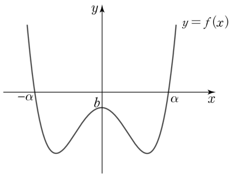
조건 (가)에서 $g(x)$는 상수함수이므로 $0\leq x\leq 2$에서 $f(x)\geq 0$

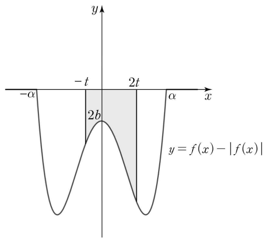
조건 (나)에서 $g(x)$는 감소함수이므로 $2<x<5$에서 $f(x)<0$

조건 (다)에서 $g(x)$는 상수함수이므로 $x>5$에서 $f(x)>0$

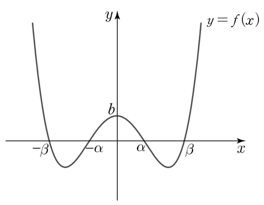
함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 연속함수이므로 $f(x)=0$은 반드시 $x=-2,\ 2,\ -5,\ 5$를 해로 가져야 한다.
따라서 $f(x)=(x^2-4)(x^2-25)$이므로 $f(\sqrt{2})=(-2)(-23)=46$이다.

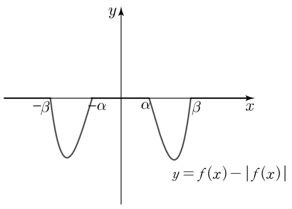
[다른풀이]
사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$의 그래프는 y축에 대칭이다.
b의 값에 따라 나누어보면
ⅰ) $b\le 0$일 때





$0<x<1$에서 $g(x)$는 감소함수이므로 조건 (가)를 만족하지 못한다.
ⅱ) $b>0$일 때





① $0<x<1$에서 $g(x)$가 상수함수이므로
　$f(x)-|f(x)|=0$에서 $\alpha\ge 2$
② $1<x<5$에서 $g(x)$가 감소하므로
　$f(x)-|f(x)|<0$에서 $\alpha\le 2$이고 $-\beta\le -5$ 즉, $\beta\ge 5$
③ $x>5$에서 $g(x)$가 상수함수이므로 $-\beta\ge -5$ 즉, $\beta\le 5$
①, ②, ③에 의해 $\alpha=2,\ \beta=5$이고 $f(x)=(x^2-4)(x^2-25)$이다.
따라서 $f(\sqrt{2})=(-2)\times(-23)=46$이다.

심층분석

최근 평가원의 20, 21번의 난이도가 조금씩 낮아지는 경향을 보여주고 있다. 그럼에도 불구하고 여전히 21번과 30번 문항에서는 교과서적 개념을 바탕으로 하되 다소 낯선 접근을 요구한다.
수능 고난도 문항에서 삼차함수와 사차함수의 그래프 개형을 이용한 문제가 반드시 출제되는데, 해당 문제는 정적분과 넓이의 관계, 즉 정적분의 기하적 의미 개념을 확실히 하고 이를 통해 위 끝 또는 아래 끝에 변수가 있을 때도 이를 넓이 개념으로 치환하고, 또한 사차함수가 y축 대칭임을 활용하면 어렵지 않게 풀 수 있다.
단, 정적분으로 정의된 함수를 습관적으로 양변 미분하여 $g'(x)$를 구하는 형태로 접근하면 문제가 매우 복잡해질 뿐 아니라 교육과정에서 벗어나 합성함수 미분하게 되는 상황이 될 수 있는데 이 경우 오히려 풀이가 불가능해질 정도로 해석이 어려워진다.

뷰티풀마인드 송태주

22) 15

출처

2015학년도 수능 나15

해설

$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}=5^{2x-1}$ 이므로 주어진 지수부등식은
$5^{2x-1}\le 5^{x+4}$　　$\therefore 2x-1\le x+4$
즉, $x\le 5$이므로 모든 자연수 x의 값의 합은
$1+2+3+4+5=15$

23) 36

출처

2018년 대구11월 나12

해설

음이 아닌 정수 $x',\ y',\ z'$에 대하여
$x=-x',\ y=-y',\ z=-z'$라 하면
$x+y+z=-7$에서 $-x'-y'-z'=-7$
$x'+y'+z'=7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x',\ y',\ z'$의 모든 순서쌍 $(x',\ y',\ z')$의 개수는
$\therefore {}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

24) 35

출처

2018년 대구11월 나26

해설

$2x^2-4x=x^2-2x+3$ 에서
$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$ 이므로 $x=-1$ 또는 $x=3$
$$\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=\frac{32}{3}$$
$\therefore p+q=35$

25) 280

출처

2008년 3월 21번

해설

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos 60^\circ$
$=80^2+100^2-2\times 80\times 100\times\frac{1}{2}=8400$
$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{8400}$
이때, 호수의 반지름의 길이를 R라 하면
사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}=2R$이므로
$$R=\frac{\sqrt{8400}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{8400}{3}}=\sqrt{2800}$$
따라서 호수의 넓이는 $2800\pi(\mathrm{m}^2)$이다.
$\therefore\ \frac{S}{10}=280$

심층분석

수1의 삼각함수 단원에서 사인법칙, 코사인법칙은 2007 교육과정에서 배우다가 2009교육과정에서 빠졌던 내용인데 다시 추가되었다. 따라서 이러한 유형은 가형 나형에 모두 출제될 수 있는 내용이다.
위 문제는 코사인법칙과 사인법칙을 순서에 맞게 이용하여 필요한 길이들을 구하는 문제로, 어느 상황에 어떤 공식을 써야 하는지 대비를 해놓으면 쉽게 풀 수 있는 유형의 문제이다.
특히 사인법칙의 경우에는 외접원과도 관련이 있기 때문에 중등 기하에서 배우는 외심, 피타고라스의 정리, 원주각 등의 개념과도 혼합되어 출제될 수 있으므로 해당 개념이 익숙하지 않은 학생들은 해당 내용을 복습할 필요가 있다.

뷰티풀마인드 정철호

26) 25

출처

2017년 9월 가26

해설

초콜릿 한 개의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$ 을 따르고, 표본의 크기가 49 이므로 표본평균 $\overline{x}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{49}\right)$ 을 따른다.

따라서 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}} \le m \le \overline{x}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}$ 이다.

그러므로 $\overline{x}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}=1.73$, $\overline{x}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}=1.87$ 이고

이를 계산하면 $\overline{x}=1.8$, $\sigma=0.25$

$\therefore\ 180k=180\times\dfrac{\sigma}{\overline{x}}=180\times\dfrac{0.25}{1.8}=25$

심층분석

확률과 통계의 통계적 추정 단원에서 자주 출제되는 문제로, 모집단의 무엇인지 구별하는 능력 및 모평균의 신뢰구간 공식만 정확히 알고 있다면 크게 어렵지는 않은 문제다. 표본의 개수, 95%에서의 신뢰계수만 알고 있다면 단순 대입과, 대입 후 연립방정식 해결 수준의 문제로 배점 대비 간단한 문제라고 할 수 있겠다. 다만, 통계적 추정 파트 특성상 문장의 길이가 다른 문제에 비해 길다보니, 읽어나가며 모든 조건을 꼼꼼하게 체크하는 능력이 요구된다.

뷰티풀마인드 허민

27) 22

출처

2019년 9월 나27

해설

점 P의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 위치 x가

$x=-\dfrac{1}{3}t^3+3t^2+k$

이므로 점 P의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 속도 v는

$v=-t^2+6t$

이고, 점 P의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 가속도 a는

$a=-2t+6$

점 P의 가속도가 0이므로

$-2t+6=0$에서 $t=3$

$t=3$일 때, 점 P의 위치가 40이므로

$-\dfrac{1}{3}\times3^3+3\times3^2+k=40$

따라서 $k=22$

28) 4

출처

2018학년도 수능 가19

해설

(ⅰ) $X=3$인 사건은

주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\boxed{\dfrac{8}{27}}$

(ⅱ) $X=4$인 사건은

세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 추를 넣는 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$\mathrm{P}(X=4)={}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{2}{3}+{}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

$\mathrm{P}(X=4)=\boxed{\dfrac{4}{27}}+{}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

(ⅲ) $X=5$인 사건은

네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^0\times\dfrac{2}{3}+{}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^1$

$\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^0\times\dfrac{2}{3}+\boxed{\dfrac{8}{81}}$

(ⅳ) $X=6$인 사건은

다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^5$

이상에서

$a=\dfrac{8}{27}$, $b=\dfrac{4}{27}$, $c=\dfrac{8}{81}$

이다. 따라서

$$9\times\frac{ab}{c}=9\times\frac{\dfrac{8}{27}\times\dfrac{4}{27}}{\dfrac{8}{81}}=4$$

심층분석

'내가 처음부터 계획을 세워 푸는 것이 아닌' 유일한 유형이다. 출제자가 의도한 풀이에 맞추어 빈 칸을 채워나가야 하기 때문에, 빈 칸 근처의 정보만 가지고 답을 구하려 하지 않도록 주의할 필요가 있다.
시간이 다소 걸리더라도 문제가 무엇을 묻는 문제이며 출제자는 어떤 방향을 제시하고 있는가를 꼭 확인을 하고 문제풀이에 임해야 한다.
사설 모의고사의 경우 빈 칸 추론을 위한 단서들을 미흡하게 주는 경우도 있어 문제를 풀면서 당황할 수 있으나, 평가원 출제 문제에서는 의도만 파악한다면 수학적으로 어려운 내용을 묻지는 않기에 충분히 해결할 수 있는 유형이다.
문제를 처음 받아들일 때 심호흡을 한 번 하고, 국어 영역의 지문을 읽어나간다는 생각으로 접근하는 것도 한 가지 방법.

뷰티풀마인드 송동일

29) 11

출처

[2018년 전북5월 나21]

해설

문제의 조건에 의하여 점 P_n의 좌표가 (a, b)이면 $n = a + b$이다.

$b_1 > \sqrt{a_1}$ 이므로 P_2의 좌표는 (1 , 1)이다.

$b_2 \le \sqrt{a_2}$ 이므로 P_3의 좌표는 (1 , 2)이다.

$b_3 > \sqrt{a_3}$ 이므로 P_4의 좌표는 (2 , 2)이다.

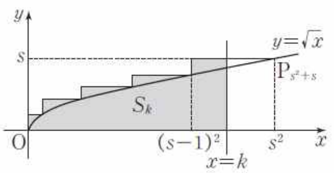
$b_4 > \sqrt{a_4}$ 이므로 P_5의 좌표는 (3 , 2)이다.

$b_5 > \sqrt{a_5}$ 이므로 P_6의 좌표는 (4 , 2)이다.

$b_6 > \sqrt{a_6}$ 이므로 P_7의 좌표는 (4 , 3)이다.

⋮

즉 자연수 s에 대하여 점 P_{s^2+s}의 좌표는 (s^2, s)이므로
$P_{12}(9, 3)$, $P_{20}(16, 4)$, $P_{30}(25, 5)$, $P_{42}(36, 6)$, $\cdots$ 이다.



자연수 $s\,(1 \le s \le 9)$에 대하여 직선 $x = s^2$과 x축 및 100개의 선분 OP_1, P_1P_2, P_2P_3, $\cdots$, $P_{99}P_{100}$으로 이루어진 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_{s^2}은

$$S_{s^2} = s^2 \times s - \{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (s-1)^2\}$$
$$= s^3 - \frac{(s-1)s(2s-1)}{6} = \frac{s(4s-1)(s+1)}{6}$$

$S_{25} = \dfrac{5 \times 6 \times 19}{6} = 95$ 이므로

$S_{24} = 95 - 5 = 90$, $S_{23} = 95 - 5 \times 2 = 85$

이고, 11 이하의 자연수 m에 대하여

$S_{25+m} = S_{25} + 6m = 6m + 95$

가 성립한다.

$6m + 95 \le 150$에서 $6m \le 55$, $m \le \dfrac{55}{6} = 9.\times\times\times$

이므로 부등식 $90 \le S_k \le 150$을 만족시키는 자연수 k의 개수는 24, 25, 26, ⋯ , 34 의 11이다.

심층분석

29번의 경우 수학1에서의 출제가 유력하다.
그 후보가 될 단원으로는 지수함수와 로그함수, 삼각함수 등이 있으며 그래프를 주고 특정 조건을 만족하는 점의 개수를 묻는 문제가 출제된 적이 많으므로 이에 대한 대비를 해야 한다.
좋은 발상을 통해 소요시간을 단축하기가 쉽지 않은 유형이므로 처음부터 어느 정도의 시간을 배정하여 차분하게 접근할 것을 권한다.
특히 문제의 핵심이 되는 관계식을 바로 찾아낼 수 없을 때가 있으므로, 이럴 때는 당황하지 않고 $n=1$, $n=2$를 대입해 가며 관계식을 유추해 내는 능력이 필요하다.

뷰티풀마인드 송동일

30) 65

출처

2017학년도 수능 나30

해설

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$이므로

$4(3x^2 - 6x + 6) + 12x - 18 = f'(g(x))$

$12x^2 - 12x + 6 = 3\{g(x)\}^2 - 6g(x) + 6$

$\{g(x)\}^2 - 2g(x) = 4x^2 - 4x$

$\{g(x)\}^2 - 4x^2 - 2g(x) + 4x = 0$

$(g(x) - 2x)(g(x) + 2x) - 2(g(x) - 2x) = 0$

$(g(x) - 2x)(g(x) + 2x - 2) = 0$

따라서 $g(x) - 2x = 0$ 또는 $g(x) + 2x - 2 = 0$

(ⅰ) $g(x) - 2x = 0$일 때, 즉 $g(x) = 2x$이면

$f(2x) = x$이므로

$8x^3 - 12x^2 + 12x + k = x$

$k = -8x^3 + 12x^2 - 11x$ ⋯ ㉠

따라서, $h_1(x) = -8x^3 + 12x^2 - 11x$라 하면

$h_1'(x) = -24x^2 + 24x - 11 < 0$

이므로 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서

$-7 \le h_1(x) \le 0$

즉, 방정식 ㉠이 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근이 존재하기 위해서는

$-7 \le k \le 0$

(ⅱ) $g(x) + 2x - 2 = 0$일 때, 즉 $g(x) = -2x + 2$이면

$f(-2x + 2) = x$이므로

$(-2x+2)^3 - 3(-2x+2)^2 + 6(-2x+2) + k = x$

$-8x^3 + 12x^2 - 13x + 8 + k = 0$

$k = 8x^3 - 12x^2 - 13x - 8$ ⋯ ㉡

따라서, $h_2(x) = 8x^3 - 12x^2 + 13x - 8$라 하면

$h_2'(x) = 24x^2 - 24x + 13 > 0$

이므로 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서

$-8 \le h_2(x) \le 1$

즉, 방정식 ㉡이 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근이 존재하기 위해서는

$-8 \le k \le 1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-8 \le k \le 1$이므로

$m = -8$, $M = 1$

따라서 $m^2+M^2=(-8)^2+1^2=65$

심층분석

해당 문제는 오답률 96.9%로, 높은 오답률을 보였던 ‘18년학년도 수능 나형 30번 96.7%보다 높은 오답률을 보였던 문제이다.

그러나 고득점을 위해서는 이러한 오답률에 주목하지 않고, 평가원에서 무엇을 원하는지에 집중해야 한다.

일단 주어진 식이 방정식이라는 점을 이용하여 $g(x)$를 해석할 수 있는 형태로 만들겠다는 목적의식을 수반한 발상이 필요하다.

이러한 발상 이후에는 익숙한 방정식에서의 도함수활용을 이용하거나 사이값 정리를 이용하여 접근하여 풀리는 문제.

방정식과 역함수의 정의 및 방정식을 푸는데 도함수를 활용하는 세트문제로 다양한 개념을 아우를 수 있는 변별력 있는 문제인 동시에 향후 평가원의 출제 경향성을 알 수 있는 좋은 문제이다.

뷰티풀마인드 송태주