2021학년도 개정 대학수학능력시험 모의시험

제 2 교시

수학 영역(가 형)

홀수형

5지선다형

1. $\log 2=a$, $\log 3=b$라 할 때, $\log\frac{4}{15}$를 a, b로 나타낸 것은? [2점]

① $3a-b-1$ ② $3a+b-1$ ③ $2a-b+1$
④ $2a+b-1$ ⑤ $a-3b+1$

2. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 두 수의 곱 ab가 6의 배수일 때, 이 두 수의 합 $a+b$가 7일 확률은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

3. 함수 $f(x)=\frac{e^x}{x}$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [2점]

① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{2}$ ③ e^2 ④ $2e^2$ ⑤ $4e^2$

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=-15,\ |a_3|-a_4=0$$

일 때, a_7의 값은? [3점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

5. A, B를 포함한 6명이 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 앉을 때, A, B가 이웃하여 앉을 확률은? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

6. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n = 7$일 때, $\lim_{n\to\infty}(2a_n + 3S_n)$의 값은? [3점]

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

7. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\sin(\beta - \alpha)$의 값은?

(단, α, β는 예각이다.) [3점]

① $\frac{3\sqrt{5}}{20}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ④ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$

8. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$의 전개식에서 x^2의 계수를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} a_n$의 값은? [3점]

① 76 ② 77 ③ 78 ④ 79 ⑤ 80

9. 좌표평면에서 곡선 $y=e^{x-2}$ 위의 점 $(3, e)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① e ② $\dfrac{3}{2}e$ ③ $2e$ ④ $\dfrac{5}{2}e$ ⑤ $3e$

10. 함수 $f(x)=-2^{4-3x}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

11. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 세 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 세 자리 자연수가 홀수인 경우의 수는? [3점]

① 45 ② 55 ③ 65 ④ 75 ⑤ 85

12. 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 두 직선 $x=1$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자. 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 두 직선 $x=1$, $x=a$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $2S$가 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 합은? [3점]

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{17}{4}$ ③ $\frac{19}{4}$ ④ $\frac{21}{4}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

13. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

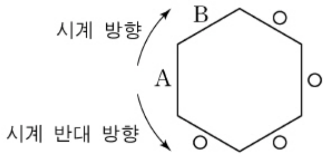
$$a_3 = 4(a_2 - a_1),\ \sum_{k=1}^{6} a_k = 15$$

일 때, $a_1 + a_3 + a_5$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

14. A, B를 포함한 6명이 정육각형 모양의 탁자에 그림과 같이 둘러 앉아 주사위 한 개를 사용하여 다음 규칙을 따르는 시행을 한다.

주사위를 가진 사람이 주사위를 던져 나온 눈의 수가 3의 배수이면 시계 방향으로, 3의 배수가 아니면 시계 반대 방향으로 이웃한 사람에게 주사위를 준다.

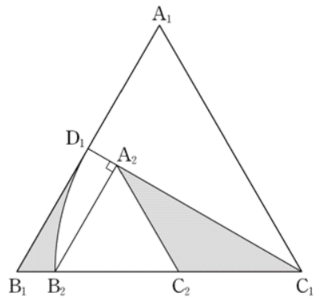


A부터 시작하여 이 시행을 5번 한 후 B가 주사위를 가지고 있을 확률은? [4점]

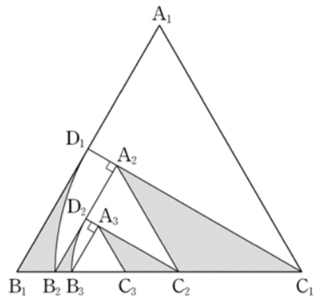
① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{8}{27}$ ④ $\frac{10}{27}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

15. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 A_1B_1의 중점을 D_1이라 하고, 선분 B_1C_1 위의 $\overline{C_1D_1}=\overline{C_1B_2}$인 점 B_2에 대하여 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1D_1B_2$를 그린다. 점 B_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 A_2, 선분 C_1B_2의 중점을 C_2라 하자. 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_1A_2C_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 A_2B_2의 중점을 D_2라 하고, 선분 B_2C_2 위의 $\overline{C_2D_2}=\overline{C_2B_3}$인 점 B_3에 대하여 중심이 C_2인 부채꼴 $C_2D_2B_3$을 그린다. 점 B_3에서 선분 C_2D_2에 내린 수선의 발을 A_3, 선분 C_2B_3의 중점을 C_3이라 하자. 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 D_2B_3으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_2A_3C_3$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{56}$ ② $\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$ ③ $\frac{15\sqrt{3}-6\pi}{56}$
④ $\frac{15\sqrt{3}-6\pi}{52}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{3}-4\pi}{52}$

16. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,
(좌변) $=(-1)^2\times 1^2=1$
(우변) $=(-1)^2\times\frac{1\times 2}{2}=1$
따라서 (*)이 성립한다.
(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+\boxed{(가)}$$
$$=\boxed{(나)}+\boxed{(가)}$$
$$=(-1)^{m+2}\cdot\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

이다.
따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{f(5)}{g(2)}$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

17. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$
(나) $f(4) < f(22)$

m이 자연수일 때, $P(17 \le X \le 18)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062 ④ 0.078 ⑤ 0.097

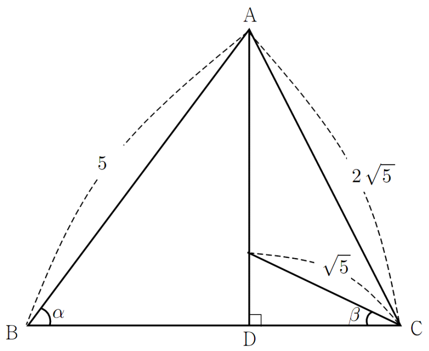
18. 함수 $f(x) = e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)\,dt$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보 기]

ㄱ. $f(\sqrt{\pi}) > 0$
ㄴ. $f'(a) > 0$을 만족시키는 a가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.
ㄷ. $f'(b) = 0$을 만족시키는 b가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자.
선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{EC}=\sqrt{5}$이다. $\angle ABD=\alpha$, $\angle DCE=\beta$라 할 때, $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$
④ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

20. 상자 A와 상자 B에 각각 6개의 공이 들어 있다. 동전 1개를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 상자 A에서 공 1개를 꺼내어 상자 B에 넣고, 뒷면이 나오면 상자 B에서 공 1개를 꺼내어 상자 A에 넣는다.

위의 시행을 6번 반복할 때, 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 될 확률은? [4점]

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{3}{64}$ ③ $\frac{5}{64}$ ④ $\frac{7}{64}$ ⑤ $\frac{9}{64}$

21. $0 < t < 1$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $y = t$ 와 함수 $f(x) = \sin x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프가 만나는 점을 P 라 할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P 에서 그은 접선의 x 절편을 $g(t)$ 라 하자. $g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ 의 값은? [4점]

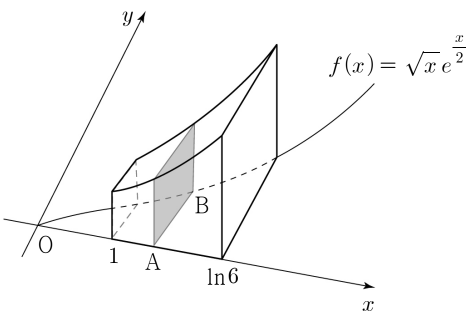
① -28　② -24　③ -20　④ -16　⑤ -12

22. 지수부등식 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x} \le 5^{x+4}$ 을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합을 구하시오. [4점]

23. 방정식 $x + y + z = -7$ 을 만족시키는 양이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하시오. [3점]

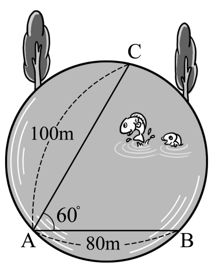
24. 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}$ 에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x,\,0)$, $\mathrm{B}(x,\,f(x))$를 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 A의 x좌표가 $x=1$에서 $x=\ln 6$까지 변할 때, 이 정사각형이 만드는 입체도형의 부피는 $-a+b\ln 6$이다. $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 자연수이다.) [4점]



25. 원 모양의 호수의 넓이를 구하기 위해 호수의 가장자리의 세 지점 A, B, C에서 거리와 각을 측정한 결과가 다음과 같았다.

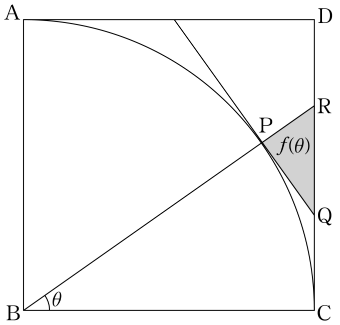
$\overline{\mathrm{AB}}=80\,\mathrm{m}$
$\overline{\mathrm{AC}}=100\,\mathrm{m}$
$\angle\mathrm{CAB}=60^{\circ}$



이 호수의 넓이를 S라 할 때, $\dfrac{S}{10}$의 값을 구하시오. [3점]

26. 어느 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 초콜릿 중에서 임의추출한, 크기가 49인 표본을 조사하였더니 초콜릿 무게의 표본평균의 값이 $\overline{x}$ 이었다.
이 결과를 이용하여, 이 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $1.73\le m\le 1.87$이다. $\dfrac{\sigma}{\overline{x}}=k$일 때, $180k$의 값을 구하시오.
(단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$로 계산한다.) [4점]

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD 안에 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴 BCA가 있다. 호 AC 위의 점 P에서의 접선이 선분 CD와 만나는 점을 Q, 선분 BP의 연장선이 선분 CD와 만나는 점을 R라 하자.
$\angle PBC = \theta$일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{8f(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



28. 무게가 1인 추 6개, 무게가 2인 추 3개와 비어 있는 주머니 1개가 있다. 주사위 한 개를 사용하여 다음의 시행을 한다. (단, 무게의 단위는 g이다.)

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 무게가 1인 추 1개를 주머니에 넣고, 눈의 수가 3 이상이면 무게가 2인 추 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 반복하여 주머니에 들어 있는 추의 총무게가 처음으로 6보다 크거나 같을 때, 주머니에 들어 있는 추의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)$ $(x=3,\ 4,\ 5,\ 6)$을 구하는 과정이다.

> (i) $X=3$인 사건은
> 주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로
> $\mathrm{P}(X=3)=$ $\boxed{(가)}$
>
> (ii) $X=4$인 사건은
> 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와
> 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로
> 나눌 수 있다. 그러므로
> $\mathrm{P}(X=4)=$ $\boxed{(나)}$ $+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$
>
> (iii) $X=5$인 사건은
> 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고
> 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와
> 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로
> 나눌 수 있다. 그러므로
> $\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+$ $\boxed{(다)}$
>
> (iv) $X=6$인 사건은
> 다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우이므로
> $\mathrm{P}(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^5$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $9\times\frac{ab}{c}$의 값은? [4점]

29. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(0, 1)$이다.
> (나) 점 P_n의 좌표가 (a_n, b_n)일 때,
> $b_n > \sqrt{a_n}$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 (a_n+1, b_n)이고,
> $b_n \le \sqrt{a_n}$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 (a_n, b_n+1)이다.

100개의 선분 $OP_1, P_1P_2, P_2P_3, \cdots, P_{99}P_{100}$으로 이루어진 도형과 직선 $x=k$ $(1 \le k \le 90$, k는 자연수$)$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_k라 하자. 부등식 $90 \le S_k \le 150$을 만족시키는 자연수 k의 개수는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

30. 함수

$$f(x) = \begin{cases} e^x & (0 \le x < 1) \\ e^{2-x} & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

에 대하여 열린 구간 $(0, 2)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x |f(x) - f(t)|\, dt$$

의 극댓값과 극솟값의 차는 $ae + b\sqrt[3]{e^2}$이다. $(ab)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

※ 확인 사항
답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2021학년도 대수능 모의평가 [가형] 해설

1	①	2	③	3	①	4	①	5	③
6	③	7	②	8	①	9	③	10	④
11	④	12	②	13	③	14	③	15	②
16	③	17	③	18	⑤	19	⑤	20	③
21	②	22	15	23	36	24	4	25	280
26	25	27	12	28	4	29	725	30	36

2021수능 예상/분석을 다음 링크에서 확인하실 수 있습니다.
https://www.youtube.com/watch?v=-4lF7CYx5Rc

[채널 뷰티풀마인드]

1) ①

출처

2017년 3월 나08

해설

$\log 2 = a$, $\log 3 = b$라 하자.

$\log \frac{4}{15} = \log \frac{8}{30}$

$= \log 8 - \log 30$

$= \log 2^3 - \log(3 \times 10)$

$= 3\log 2 - \log 3 - 1$

따라서 $\log \frac{4}{15} = 3a - b - 1$

2) ③

출처

2016년 9월 가12

해설

두 수의 곱 ab가 6의 배수일 때의 순서쌍을 구해보면

$(1,\ 6)$

$(2,\ 3)$, $(2,\ 6)$

$(3,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 6)$

$(4,\ 3)$, $(4,\ 6)$

$(5,\ 6)$

$(6,\ 1)$, $(6,\ 2)$, $(6,\ 3)$, $(6,\ 4)$, $(6,\ 5)$, $(6,\ 6)$

으로 모두 15개이다.

이들 중 두 수의 합 $a+b=7$일 경우는

$(1,\ 6)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(6,\ 1)$로 4가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{15}$이다.

3) ①

출처

2016년 3월 가03

해설

$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$

이므로

$f'(2) = \frac{(2-1)e^2}{2^2} = \frac{e^2}{4}$

4) ①

출처

2018년 9월 나13

해설

$|a_3| = a_4$에서 $a_3 < 0$, $a_4 > 0$이고 $a_3 + a_4 = 0$이다.

$a_n = -15 + (n-1)d$라 하면

$a_3 + a_4 = -15 + 2d - 15 + 3d = 0$에서 $d = 6$이다

따라서 $a_n = 6n - 21$이므로 $a_7 = 21$이다.

5) ③

출처

2018년 7월 가06

해설

A, B를 포함한 6명이 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 앉는 경우의 수는

$(6-1)! = 5! = 120$

A, B가 이웃하여 6명이 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 앉는 경우의 수는

$2! \times (5-1)! = 2! \times 4! = 48$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120} = \frac{2}{5}$

6) ③

출처

2018년 3월 나24

해설

수열 $\{S_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

따라서

$\lim_{n \to \infty}(2a_n + 3S_n) = 2\lim_{n \to \infty} a_n + 3\lim_{n \to \infty} S_n$

$= 2 \times 0 + 3 \times 7$

$= 21$

7) ②

출처

2018년 10월 가07

해설

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$

$= \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

8) ①

출처

2018년 5월 가06

해설

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$의 전개식에서 일반항은

${}_{2n}C_r\, x^{2n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_{2n}C_r \times x^{2n-2r}$

x^2의 계수는 $2n-2r=2$일 때, 즉 $r=n-1$이므로

$a_n = {}_{2n}C_{n-1}$

따라서

$\sum_{n=1}^{4} a_n = \sum_{n=1}^{4} {}_{2n}C_{n-1} = {}_2C_0 + {}_4C_1 + {}_6C_2 + {}_8C_3 = 76$

9) ③

출처

2017년 4월 가11

해설

함수 $f(x)=e^{x-2}$이라 하면 $f'(x)=e^{x-2}$

$f'(3)=e$

곡선 위의 점 $(3,\ e)$에서의 접선의 방정식은

$y=ex-2e$

두 점 A, B의 좌표는 각각 $(2,\ 0)$, $(0,\ -2e)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times 2e = 2e$

10) ④

출처

2018년 9월 가07

해설

$f(x)$는 증가함수 이므로 $f(x)$가 제 2사분면을 지나지 않으려면 $f(0)\le 0$ 이어야 한다.

$f(0)=-2^4+k\le 0$

$k\le 16$

k의 최댓값은 16

11) ④

출처

2017년 7월 가08

해설

세 자리 자연수가 홀수이려면 일의 자리의 숫자는 홀수이어야 한다.

일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1$

백의 자리와 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_2$

따라서 세 자리 자연수가 홀수인 경우의 수는

${}_3C_1 \times {}_5\Pi_2 = 3\times 5^2 = 75$

12) ②

출처

2018년 4월 가15

해설

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 두 직선 $x=1$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $S=\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\ln 2$

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 두 직선 $x=1$, $x=a$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $2S=2\ln 2$이므로

(i) $a>1$일 때, $\int_1^a \frac{1}{x}dx=\ln a=2\ln 2$

$\therefore\ a=4$

(ii) $0<a<1$일 때, $\int_a^1 \frac{1}{x}dx=-\ln a=2\ln 2$

$\therefore\ a=\frac{1}{4}$

따라서 모든 a의 값의 합은 $4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

13) ③

출처

2018년 6월 나15

해설

a_n이 등비수열이므로 $a_3=4(a_2-a_1)$에서

$ar^2=4(ar-a)$

$r^2=4r-4$

$(r-2)^2=0$

$\therefore r=2$

$\sum_{k=1}^{6} a_k = \frac{a(1-r^6)}{1-r}=15$ 에서 $a=\frac{15}{63}=\frac{5}{21}$

따라서

$a_1+a_3+a_5=a+ar^2+ar^4=a(1+r^2+r^4)$

$=\frac{5}{21}(1+2^2+2^4)=5$

14) ③

출처

2010년 6월 가14

해설

5번 시행 후 B가 주사위를 가지고 있기 위해서는 시계 방향으로 3번, 반대 방향으로 2번 이동하거나 시계 반대방향으로 5번 이동해야 한다.

시계 방향으로 3번, 반대 방향으로 2번 이동하는 확률은

주사위를 던지는 시행은 독립이므로 ${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$이고

시계반대방향으로 5번 이동하는 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^5$이다.

두 확률의 합은 $\frac{8}{27}$

15) ②

출처

2018학년도 수능 나19

해설

$\angle B_1C_1D_1 = 30^\circ$, $\angle C_1D_1B_1 = 90^\circ$ 이고 직각삼각형 $B_1C_1D_1$에서

$\overline{C_1D_1} = \overline{B_1C_1}\cos 30^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

한편, 두 선분 B_1B_2와 B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역의 넓이는

$\triangle B_1C_1D_1 -$ 부채꼴$B_2C_1D_1$

$= \frac{1}{2} \times \overline{C_1D_1} \times \overline{D_1B_1} - \overline{C_1D_1}^2 \times \pi \times \frac{30^\circ}{360^\circ}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \pi \times \frac{1}{12} = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{16}$ ...... ㉠

또, 삼각형 $C_1A_2C_2$의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{C_2C_1} \times \overline{C_1A_2} \times \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\overline{B_2C_1}\right) \times \left(\overline{B_2C_1}\cos 30^\circ\right) \times \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{64}$ ...... ㉡

따라서 R_1의 넓이 S_1은 ㉠과 ㉡에 의해

$S_1 = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{64} = \frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}$

한편, 직각삼각형 $A_2B_2C_1$에서

$\angle B_2C_1A_2 = 30^\circ$ 이므로 $\angle A_2B_2C_1 = 60^\circ$

또, $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_1}\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\overline{B_2C_1} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

그러므로 삼각형 $A_2B_2C_2$에서 $\angle A_2B_2C_2 = 60^\circ$ 이고 $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2}$

즉, 삼각형 $A_2B_2C_2$는 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$인 정삼각형이다.

그러므로 길이의 비가 $1 : \frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{3}{16}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}}{1-\frac{3}{16}} = \frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$

심층분석

수학 나형에서 고정적으로 출제되던 유형이었으나, 출제범위였던 [미적분1] 수열의 극한 단원이 가형 출제범위인 [미적분]으로 옮겨가면서 이제는 가형에만 출제할 수 있게 되었다.

등비수열의 첫 항과 공비를 구하면 이후의 계산은 간단한 문제로, 명목상으로는 급수 단원에 포함되어 있지만 실제로는 도형의 길이/넓이/닮음비 등을 파악하는 기하 문제에 가깝다.

직접출제과목에서 기하가 제외된 만큼 타 과목과의 연계를 통한 간접 출제 가능성이 매우 높고, 지난 교육과정에서도 4점 주요 유형으로 나온 만큼 충분한 대비가 필요하다.

삼각형, 사각형, 원, 길이, 넓이, 닮음, 피타고라스의 정리 등 중등기하의 개념이 부족한 학생은 필히 해당 내용을 복습할 필요가 있다.

뷰티풀마인드 송동일

16) ③

2016년 3월 나16

수학적 귀납법에 의한 증명이므로 $n=1$일 때 성립함을 증명하고

$n=m$일 때 성립함을 가정하여

$n=m+1$일 때도 성립함을 증명한다.

문제에서 $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하였으므로

$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{m+1} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$ ... ㉠

$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2 = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{m+2}(m+1)^2$

그러므로 $\boxed{(가)}$는 $(-1)^{m+2}(m+1)^2$이다.

또, 등식 $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2 + \boxed{(가)} = \boxed{(나)} + \boxed{(가)}$와

㉠에서 $\boxed{(나)}$는 $(-1)^{m+1} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$

그러므로 $f(m) = (-1)^{m+2}(m+1)^2$,

$g(m) = (-1)^{m+1} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$ 이므로

$f(5) = (-1)^{5+2}(5+1)^2 = -36$

$g(2) = (-1)^{2+1} \cdot \frac{2(2+1)}{2} = -3$ 이다.

따라서 $\frac{f(5)}{g(2)} = \frac{-36}{-3} = 12$

17) ③

출처

2017학년도 수능

해설

조건 (가)에서 $f(10) > f(20)$이므로 $x=m$을 기준으로 $x=20$까지의 거리가 $x=10$까지의 거리보다 크다.

$\therefore$ $|m-20| > |m-10|$이고, 양변을 제곱하여 정리하면 $m < 15$

조건 (나)에서 $f(4) < f(22)$이므로 $x=m$을 기준으로 $x=4$까지의 거리가 $x=22$까지의 거리보다 크다.

$\therefore$ $|m-4| > |m-22|$이고, 양변을 제곱하여 정리하면 $13 < m$

$\therefore$ $13 < m < 15$이고 m은 자연수이므로 $m=14$

이를 이용하여 구하는 확률을 표준화하면

$\mathrm{P}\left(\frac{17-14}{5} \le Z \le \frac{18-14}{5}\right)$

$= \mathrm{P}(0.6 \le Z \le 0.8)$

$= 0.288 - 0.226 = 0.062$

심층분석

수능에서 매번 빠지지 않고 나오는 확률밀도함수에 관한 문제로 정규분포의 대칭성을 정확히 이해한 후 접근할 필요가 있다.

해당 문제의 경우 “평균에 가까울수록 함숫값이 크다“라는 정규분포를 따르는 확률밀도함수의 성질을 이용하고, 이후에는 확률변수를 표준화시켜 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z로 바꾸기만 하면 되는 문제이므로, 처음 조건식을 유도해낼 수 있다면 어렵지 않은 문제이다.

뷰티풀마인드 허민

18) ⑤

출처

2017학년도 수능 가20

해설

ㄱ. $0 < x < \sqrt{\pi}$에서

$e^{-x} > 0$, $\sin(x^2) \geq 0$이고

$\sin 0 = \sin \pi = 0$이므로

$f(\sqrt{\pi}) = e^{-\pi}\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)dt > 0$ (참)

ㄴ. $f'(x) = -e^{-x}\int_0^{x}\sin(t^2)dt + e^{-x}\sin(x^2)$

$f'(0) = -e^{-0}\int_0^{0}\sin(t^2)dt + e^{-0}\sin 0^2 = 0$

$f'(\sqrt{\pi}) = -e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt + e^{-\sqrt{\pi}}\sin(\sqrt{\pi}^2)$

$= -f(\sqrt{\pi}) < 0$

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$f'(a) = \dfrac{f(\sqrt{\pi}) - f(0)}{\sqrt{\pi} - 0} > 0$

를 만족시키는 a가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. ㄴ을 만족시키는 $a(0 < a < \sqrt{\pi})$에 대하여

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, \sqrt{\pi}]$ 에서 연속이고

$f'(a) > 0, f'(\sqrt{\pi}) < 0$이므로

사잇값 정리에 의해 $f'(b) = 0$이 되는 b가

열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

심층분석

미분법, 적분법, 사잇값 정리, 평균값 정리에 관한 내용을 모두 물어보면서 ㄱ, ㄴ, ㄷ으로 이어지는 논리전개도 훌륭한 좋은 문제이다.

정적분은 그 값을 구체적으로 계산해내어야 한다는 고정관념과, 평균값 정리 및 사잇값 정리는 구간의 양 끝값을 활용한다는 고정관념 역시 깨 주는 문제이므로 자세히 분석하여 함축된 의미들을 음미할 수 있어야 한다.

개념이해를 묻는 문제는 출제하기가 상당히 까다롭기 때문에 평가원 모의고사 또는 수능시험에서 볼 수 있을 법한 문제이고, 그래서 그 중요도가 더더욱 높다고 하겠다.

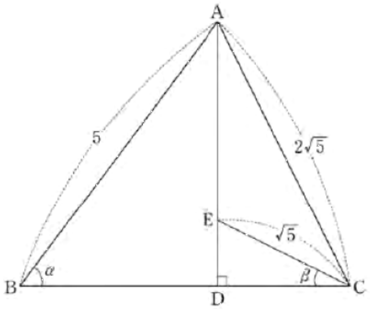
뷰티풀마인드 송동일

19) ⑤

출처

[2018학년도 수능 가14]

해설



$\overline{\mathrm{CD}} = a$ (단, $a > 0$)이라 하면 직각삼각형 CED에서

$\overline{\mathrm{DE}} = \sqrt{\overline{\mathrm{CE}}^2 - \overline{\mathrm{CD}}^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - a^2} = \sqrt{5 - a^2}$

이때, $\overline{\mathrm{AD}} = 4\overline{\mathrm{DE}}$이므로

$\overline{\mathrm{AD}} = 4\sqrt{5 - \mathrm{a}^2}$

직각삼각형 CAD에서

$\overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{AD}}^2$ 이므로

$(2\sqrt{5})^2 = a^2 + (4\sqrt{5 - a^2})^2$

$20 = a^2 + 80 - 16a^2$

$15a^2 = 60$, $a^2 = 4$

$a > 0$이므로 $a = 2$

따라서 $\overline{\mathrm{DE}} = 1$, $\overline{\mathrm{AD}} = 4$이다.

직각삼각형 ABD에서

$\overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

이므로 $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

직각삼각형 CAD에서

$\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

따라서

$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{10}{5\sqrt{5}}$

$= \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

20) ③

출처

2018년 9월 나20

해설

동전을 던져서 앞면과 뒷면이 나오는 확률은 $\dfrac{1}{2}$로 같다.

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 되어야 하므로 5번째 시행 후에는 7, 4번째 시행 후에는 6이어야 한다.

4번째 시행 후에 6이 되기 위해서는 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나와야 하고, 첫 번째와 두 번째 모두 앞면이 나오는 경우를 제외해야 하므로 구하는 확률은

$\left\{({}_4C_2-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{64}$이다.

[다른풀이]

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 되는 경우를 직접 세어보면

1	2	3	4	5	6
앞	뒤	앞	뒤	앞	앞
앞	뒤	뒤	앞	앞	앞
뒤	앞	뒤	앞	앞	앞
뒤	뒤	앞	앞	앞	앞
뒤	앞	앞	뒤	앞	앞

의 5가지이고, 전체 경우의 수는 $2^6=64$이므로 구하는 확률은 $\frac{5}{64}$이다.

21) [정답] ②

출처

2018년 6월 가07

해설

점 P를 $\mathrm{P}(\alpha,\ t)$라 하면 $\sin\alpha=t$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-t^2}$ 이다.

접선의 방정식은 $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ 이고

$y-\sin\alpha=\cos\alpha(x-\alpha)$에서

$-\sin\alpha=\cos\alpha(g(t)-\alpha)$

$g(t)=\alpha-\tan\alpha$ 이다.

$\sin\alpha=t$의 양변을 t에 대하여 미분하면 $\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}=1$ 이므로

$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{\cos\alpha}$

$g'(t)=\frac{d\alpha}{dt}-\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos^3\alpha}$

$=\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^3\alpha}=\frac{-t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$

따라서 $g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-24$

심층분석

최근 21번은 '발상은 까다롭지만, 접근 전략만 잘 세우면 이후의 진행과정은 간단한' 문제가 출제되고 있는데, 특히 2019년에는 '음함수 유형'이 자주 출제가 되고 있다.

이는 주어진 함수가 $f(x)=\ldots$의 형태로 깔끔하게 정리되지 않는 문제를 뜻하는데, 이런 특징을 재빠르게 인식하여 합성함수의 미분법 또는 음함수의 미분법을 활용하여 답을 구해내는 능력이 요구된다.

해당 문제의 경우 $\sin x=t$라는 관계식이 쉽게 도출되나 고등과정에서 사인함수의 역함수를 배우지 않았으므로, x를 t에 관한 식으로 표현하는 것이 어렵다는 것을 인식하고 α라는 함수를 도입할 수 있느냐 하는 부분이 핵심이다.

특히 음함수의 미분, 매개변수의 미분 단원이 기하와 벡터에서 미적분으로 넘어온 상황에서 간접출제의 가능성이 상당히 높은 상황이므로, 반드시 최근 3~5개년 기출문제 중 유사 문제들을 분석해 두어야 한다.

뷰티풀마인드 송동일

22) 15

출처

2015학년도 수능 나15

해설

$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}=5^{2x-1}$ 이므로 주어진 지수부등식은

$5^{2x-1}\le 5^{x+4}\qquad \therefore 2x-1\le x+4$

즉, $x\le 5$ 이므로 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+2+3+4+5=15$

23) 36

출처

2018년 대구11월 나12

해설

음이 아닌 정수 x',y',z'에 대하여

$x=-x'$, $y=-y'$, $z=-z'$라 하면

$x+y+z=-7$에서 $-x'-y'-z'=-7$

$x'+y'+z'=7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x',y',z'의 모든 순서쌍 (x',y',z')의 개수는

$\therefore {}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

24) 12

출처

2016년 7월 가27

해설

선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=xe^x$

구하는 입체도형의 부피는

$\int_1^{\ln6}xe^x dx=\left[xe^x\right]_1^{\ln6}-\int_1^{\ln6}e^x dx$

$=\left[xe^x-e^x\right]_1^{\ln6}=-6+6\ln6$

$a=6,\ b=6$

25) 280

출처

2008년 3월 21번

해설

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos 60^\circ$

$= 80^2 + 100^2 - 2\times 80\times 100\times\frac{1}{2} = 8400$

$\therefore\ \overline{BC} = \sqrt{8400}$

이때, 호수의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = 2R$이므로

$R = \frac{\sqrt{8400}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{8400}{3}} = \sqrt{2800}$

따라서 호수의 넓이는 $2800\pi(\mathrm{m}^2)$이다.

$\therefore\ \frac{S}{10} = 280$

심층분석

수1의 삼각함수 단원에서 사인법칙, 코사인법칙은 2007 교육과정에서 배우다가 2009교육과정에서 빠졌던 내용인데 다시 추가되었다. 따라서 이러한 유형은 가형 나형에 모두 출제될 수 있는 내용이다.

위 문제는 코사인법칙과 사인법칙을 순서에 맞게 이용하여 필요한 길이들을 구하는 문제로, 어느 상황에 어떤 공식을 써야하는지 대비를 해놓으면 쉽게 풀 수 있는 유형의 문제이다.

특히 사인법칙의 경우에는 외접원과도 관련이 있기 때문에 중등 기하에서 배우는 외심, 피타고라스의 정리, 원주각 등의 개념과도 혼합되어 출제될 수 있으므로 해당 개념이 익숙하지 않은 학생들은 해당 내용을 복습할 필요가 있다.

뷰티풀마인드 정철호

26) 25

출처

2017년 9월 가26

해설

초콜릿 한 개의 무게는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르고, 표본의 크기가 49 이므로 표본평균 $\overline{x}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{49}\right)$ 을 따른다.

따라서 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{49}} \le m \le \overline{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{49}}$ 이다.

그러므로 $\overline{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{49}} = 1.73$, $\overline{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{49}} = 1.87$ 이고

이를 계산하면 $\overline{x} = 1.8,\ \sigma = 0.25$

$\therefore\ 180k = 180\times\frac{\sigma}{\overline{x}} = 180\times\frac{0.25}{1.8} = 25$

심층분석

확률과 통계의 통계적 추정 단원에서 자주 출제되는 문제로, 모집단의 무엇인지 구별하는 능력 및 모평균의 신뢰구간 공식만 정확히 알고 있다면 크게 어렵지는 않은 문제다. 표본의 개수, 95%에서의 신뢰계수만 알고 있다면 단순 대입과, 대입 후 연립방정식 해결 수준의 문제로 배점 대비 간단한 문제라고 할 수 있겠다. 다만, 통계적 추정 파트 특성상 문장의 길이가 다른 문제에 비해 길다보니, 읽어나가며 모든 조건을 꼼꼼하게 체크하는 능력이 요구된다.

뷰티풀마인드 허민

27) 9

출처

2017년 10월 가27

해설

삼각형 BPQ와 삼각형 BCQ는 서로 합동이므로

$\angle QBC = \frac{\theta}{2}$ 이고 $\overline{PQ} = \overline{QC} = 3\tan\frac{\theta}{2}$

직각삼각형 RPQ에서 $\angle RQP = \theta$ 이므로

$\overline{PR} = \overline{PQ}\tan\theta = 3\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta$

$f(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PR}$

$= \frac{1}{2}\times 3\tan\frac{\theta}{2}\times 3\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta = \frac{9}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta$

따라서 $\lim_{\theta\to 0+}\frac{8f(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{36\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^3} = 9$

심층분석

수능 가형에서 고정적으로 출제되는 유형으로, 삼각함수 성질, 삼각함수의 극한 계산능력이 모두 요구된다. 고정적으로 출제되는 문제인 만큼 빠르게 풀 수 있도록 반복연습이 필요하다.

이러한 유형의 문제를 풀기 위해서는 중등기하에 대한 모든 개념이 숙지되어야 하며, 문제에서 요구하는 $f(\theta)$의 값을 구한 뒤 삼각함수의 극한계산도 효율적으로 할 수 있어야 한다.

또한 사인법칙과 코사인법칙이 추가되었기 때문에 이를 이용하여 주어진 선분의 길이를 두 법칙을 이용하여 구하는 연습도 할 필요가 있다.

뷰티풀마인드 정철호

28) 4

출처

2018학년도 수능 가19

해설

(ⅰ) $X=3$인 사건은

주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\boxed{\frac{8}{27}}$$

(ⅱ) $X=4$인 사건은

세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 추를 넣는 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$$\mathrm{P}(X=4)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\boxed{\frac{4}{27}}+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

(ⅲ) $X=5$인 사건은

네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$$\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+\boxed{\frac{8}{81}}$$

(ⅳ) $X=6$인 사건은

다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

이상에서

$$a=\frac{8}{27},\ b=\frac{4}{27},\ c=\frac{8}{81}$$

이다. 따라서

$$9\times\frac{ab}{c}=9\times\frac{\frac{8}{27}\times\frac{4}{27}}{\frac{8}{81}}=4$$

심층분석

'내가 처음부터 계획을 세워 푸는 것이 아닌' 유일한 유형이다. 출제자가 의도한 풀이에 맞추어 빈 칸을 채워나가야 하기 때문에, 빈 칸 근처의 정보만 가지고 답을 구하려 하지 않도록 주의할 필요가 있다.

시간이 다소 걸리더라도 문제가 무엇을 묻는 문제이며 출제자는 어떤 방향을 제시하고 있는가를 꼭 확인을 하고 문제풀이에 임해야 한다.

사설 모의고사의 경우 빈 칸 추론을 위한 단서들을 미흡하게 주는 경우도 있어 문제를 풀면서 당황할 수 있으나, 평가원 출제 문제에서는 의도만 파악한다면 수학적으로 어려운 내용을 묻지는 않기에 충분히 해결할 수 있는 유형이다.

문제를 처음 받아들일 때 심호흡을 한 번 하고, 국어 영역의 지문을 읽어나간다는 생각으로 접근하는 것도 한 가지 방법.

뷰티풀마인드 송동일

29) ②

출처

[2018년 전북5월 나21]

해설

문제의 조건에 의하여 점 P_n의 좌표가 (a, b)이면 $n=a+b$이다.

$b_1>\sqrt{a_1}$ 이므로 P_2의 좌표는 (1 , 1)이다.

$b_2\le\sqrt{a_2}$ 이므로 P_3의 좌표는 (1 , 2)이다.

$b_3>\sqrt{a_3}$ 이므로 P_4의 좌표는 (2 , 2)이다.

$b_4>\sqrt{a_4}$ 이므로 P_5의 좌표는 (3 , 2)이다.

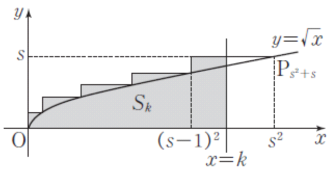
$b_5>\sqrt{a_5}$ 이므로 P_6의 좌표는 (4 , 2)이다.

$b_6>\sqrt{a_6}$ 이므로 P_7의 좌표는 (4 , 3)이다.

⋮

즉 자연수 s에 대하여 점 P_{s^2+s}의 좌표는 (s^2, s)이므로

$P_{12}(9,3),\ P_{20}(16,4),\ P_{30}(25,5),\ P_{42}(36,6),\ \cdots$ 이다.



자연수 $s\,(1\le s\le 9)$에 대하여 직선 $x=s^2$과 x축 및 100개의 선분 $OP_1,\ P_1P_2,\ P_2P_3,\ \cdots,\ P_{99}P_{100}$으로 이루어진 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_{s^2}은

$$S_{s^2}=s^2\times s-\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(s-1)^2\}$$
$$=s^3-\frac{(s-1)s(2s-1)}{6}=\frac{s(4s-1)(s+1)}{6}$$

$S_{25}=\dfrac{5\times6\times19}{6}=95$ 이므로

$S_{24}=95-5=90,\ S_{23}=95-5\times2=85$

이고, 11 이하의 자연수 m에 대하여

$S_{25+m}=S_{25}+6m=6m+95$

가 성립한다.

$6m+95\le150$에서 $6m\le55,\ m\le\dfrac{55}{6}=9.\times\times\times$

이므로 부등식 $90\le S_k\le150$을 만족시키는 자연수 k의 개수는

24, 25, 26, ⋯ , 34 의 11이다.

심층분석

29번의 경우 수학1에서의 출제가 유력하다.

그 후보가 될 단원으로는 지수함수와 로그함수, 삼각함수 등이 있으며 그래프를 주고 특정 조건을 만족하는 점의 개수를 묻는 문제가 출제된 적이 많으므로 이에 대한 대비를 해야 한다.

좋은 발상을 통해 소요시간을 단축하기가 쉽지 않은 유형이므로 처음부터 어느 정도의 시간을 배정하여 차분하게 접근할 것을 권한다.

특히 문제의 핵심이 되는 관계식을 바로 찾아낼 수 없을 때가 있으므로, 이럴 때는 당황하지 않고 $n=1,\ n=2$를 대입해 가며 관계식을 유추해 내는 능력이 필요하다.

뷰티풀마인드 송동일

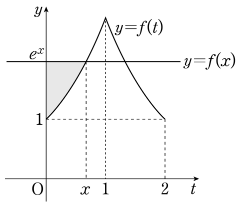
30) 36

출처

2018년 3월 가30

해설

(ⅰ) $0 < x \le 1$일 때,



그림에서 $0 < t \le x$일 때, $f(x) \ge f(t)$이므로

$g(x) = \int_0^x |f(x)-f(t)|\,dt$

$= \int_0^x \{f(x)-f(t)\}\,dt$

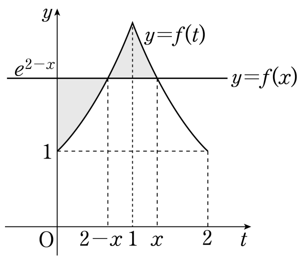
$= \int_0^x (e^x - e^t)\,dt$

$= \left[\, te^x - e^t \,\right]_0^x$

$= xe^x - e^x + 1$

$= (x-1)e^x + 1$

(ⅱ) $1 < x < 2$일 때,



그림에서

$0 < t < 2-x$일 때, $f(x) \ge f(t)$

$2-x \le t < x$일 때, $f(x) \le f(t)$이므로

$g(x) = \int_0^x |f(x)-f(t)|\,dt$

$= \int_0^{2-x} \{f(x)-f(t)\}\,dt + \int_{2-x}^{x} \{f(t)-f(x)\}\,dt$

위의 (ⅰ)에 의하여

$\int_0^{2-x} \{f(x)-f(t)\}\,dt = (2-x-1)e^{2-x}+1$

$= (1-x)e^{2-x}+1$

한편, 함수 $y=e^{2-x}$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프와 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$\int_{2-x}^{x} \{f(t)-f(x)\}\,dt$

$= 2\int_1^x \{f(t)-f(x)\}\,dt$

$= 2\int_1^x (e^{2-t}-e^{2-x})\,dt$

$= 2\left[\, -e^{2-t} - te^{2-x} \,\right]_1^x$

$= 2\{(-e^{2-x}-xe^{2-x}) - (-e-e^{2-x})\}$

$= 2e - 2x\,e^{2-x}$

따라서

$g(x) = (1-x)e^{2-x} + 1 + 2e - 2x\,e^{2-x}$

$= (1-3x)e^{2-x} + 2e + 1$

위의 (ⅰ), (ⅱ)에서

$g(x) = \begin{cases} (x-1)e^x+1 & (0 < x \le 1) \\ (1-3x)e^{2-x}+2e+1 & (1 < x < 2) \end{cases}$ 이므로

$g'(x) = \begin{cases} xe^x & (0 < x < 1) \\ (3x-4)e^{2-x} & (1 < x < 2) \end{cases}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	(2)
$g'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

(극댓값)$= g(1) = (1-1)e+1 = 1$

(극솟값)$= g\left(\frac{4}{3}\right) = (1-4)e^{\frac{2}{3}} + 2e + 1 = 2e - 3e^{\frac{2}{3}} + 1$

함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$1 - \left(2e - 3e^{\frac{2}{3}} + 1\right) = -2e + 3e^{\frac{2}{3}} = -2e + 3\sqrt[3]{e^2}$

$a=-2,\ b=3$이므로

$(ab)^2 = 36$

심층분석

30번 문제는 그 난이도가 낮아져 가는 경향이지만, 개정 수능에서도 가장 어려운 문제가 될 가능성이 높으므로 이에 대한 철저한 대비가 필요하다.

다른 유형들이 특정 수학적 능력 - 개념 이해도, 발상, 계산능력 등 - 일부를 묻는 문제라면 30번 문제는 이런 능력들을 종합적으로 활용해야 해결할 수 있는 문제이기 때문에 어느정도 본인의 수학적 능력이 완성된 시점부터 풀기를 권한다.

해당 문제의 경우도 ‘범위를 나누어 함수를 해석하는 부분’과 ‘실수없이 긴 계산을 통해 극값을 찾아내는 부분’으로 나뉘어지며, 어느 한 쪽 능력이 부족할 경우 정답을 유추해낼 수 없다. 따라서 일반 4점 문제들 또는 고난이도 4점 문제들에 대한 경험이 어느 정도 쌓이고 수학적 능력의 밸런스가 잡힌 이후에 집중적으로 다룰 필요가 있다.

뷰티풀마인드 송동일