

5. 여러 가지 적분

Theme 16 부분적분

[규토 모의 추가문항]

6. $\int_1^e (\ln x)^2 dx$ 의 값은? [3점]

- ① $e-2$ ② $e-1$ ③ e ④ $e+1$ ⑤ $e+2$

$$[(\ln x)^2 x]_1^e - 2 \int_1^e (\ln x) dx$$

$$[x \ln x - x]_1^e$$

$$e - 2$$

[2018 7월]

20. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $g(x) = \int_1^x \frac{f(t^2+1)}{t} dt$

(나) $\int_2^5 f(x) dx = 16$

$g(2) = 3$ 일 때, $\int_1^2 xg(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$$g'(x) = \frac{f(x^2+1)}{x}, g'(1) = 0$$

$$\int_1^2 g(x) \cdot x dx = \left[g(x) \frac{x^2}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{f(x^2+1)}{x} \times \frac{x^2}{2} dx$$

$-\frac{1}{4} \int_1^2 (x^2+1) dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \tan^3 x dx - \int_{-\frac{1}{4}}^0 \tan x dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$$6 = \frac{1}{4} \times \frac{16}{2} = 2$$

$$x^2+1 = t$$

$$2x dx = dt$$

$$2g(2) = \frac{g(1)}{2} - \frac{1}{4} \int_2^5 f(x) dx$$

[2020 9월]

17. 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)g(x) = x^4 - 1$ 이다.

(나) $\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 g'(x) dx = 120$

$\int_{-1}^1 x^3 f(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

Theme 17 치환적분

[2019 수능]

16. $x > 0$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 모든 양수 x 에 대하여

$$2f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{2}$ ② $\frac{2\ln 2}{3} + \frac{1}{2}$ ③ $\frac{\ln 2}{3} + 1$
④ $\frac{2\ln 2}{3} + 1$ ⑤ $\frac{2\ln 2}{3} + \frac{3}{2}$

[수완 실전편 3회 12번]

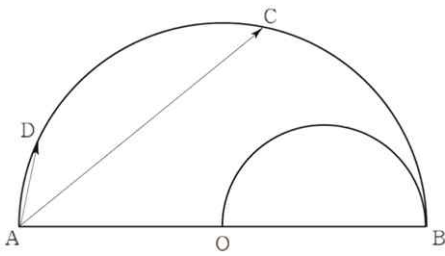
Theme 31 내분점과 외분점의 위치벡터

[규토 모의 2차]

16. 그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{AO} = \overline{OB} = 5$ 인 점 O에 대하여 두 선분 AB, OB를 각각 지름으로 하는 두 반원이 있다. 호 AB 위의 서로 다른 두 점 C, D와 호 OB 위의 점 E가

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{EC}$$

를 만족시킨다. $k|\overrightarrow{EC}|^2$ 의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]



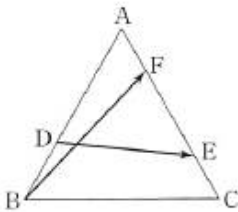
- ① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

Theme 32 벡터 방정식

[2014 9월]

한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 3 : 1과 1 : 3으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2$ 의 값은? [3점]

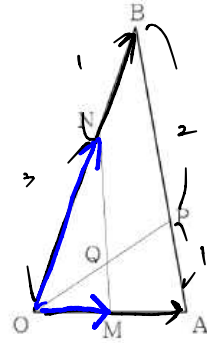
- ① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21



Theme 33 계수의 합 1

[규토 모의 추가문항]

17. 그림과 같이 $\overline{OA} = 3$, $\overline{OB} = 6$ 인 삼각형 OAB에서 변 OA의 중점을 M, 변 OB를 3 : 1로 내분하는 점을 N, 변 AB를 1 : 2로 내분하는 점을 P라 할 때, 선분 MN과 선분 OP의 교점을 Q라 하자. $\overline{OQ} = \frac{3}{4}\sqrt{6}$ 일 때, $\cos(\angle AOB)$ 의 값은? [4점]



$\vec{OA} = \vec{a}, |\vec{a}| = 3$
 $\vec{OB} = \vec{b}, |\vec{b}| = 6$

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

$$\vec{OP} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$k\vec{OP} = \vec{OQ}$$

$$\vec{OQ} = \frac{2k}{3}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{b}$$

$$\vec{OQ} = \square\vec{OM} + \triangle\vec{ON} \quad (\square + \triangle = 1)$$

$$= \frac{4k}{3}\left(\frac{\vec{a}}{2}\right) + \frac{4k}{9}\left(\frac{3}{4}\vec{b}\right)$$

$$\frac{4k}{3} + \frac{4k}{9} = 1 \quad \therefore k = \frac{9}{16}$$

$$\frac{10k}{9} = 1$$

$$\vec{OQ} = \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{16}\vec{b}$$

$$|\vec{OQ}| = \left| \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{16}\vec{b} \right| = \frac{3}{4}\sqrt{6}$$

$$\frac{16}{3} \times$$

$$|2\vec{a} + \vec{b}| = 4\sqrt{6}$$

제곱
 $4k^2|\vec{a}|^2 + 4k\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 96$

$$36 + 36 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 96$$

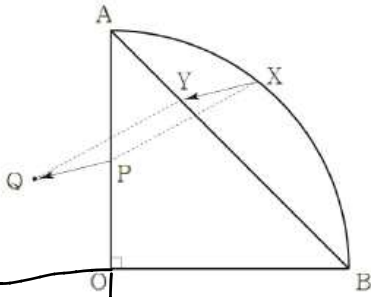
$$\therefore \cos\theta = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

[규토 모의 추가문항]

19. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 X, 선분 AB 위를 움직이는 점 Y, 선분 OA 위를 움직이는 점 P에 대하여

$$\overline{PQ} = \overline{XY} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OP}$$

를 만족시키는 점 Q가 나타내는 영역의 넓이는? [4점]



- ① $\pi+2+\sqrt{2}$
- ② $\pi+2+2\sqrt{2}$
- ③ $\pi+2+4\sqrt{2}$
- ④ $\pi+4+3\sqrt{2}$
- ⑤ $\pi+4+4\sqrt{2}$

Handwritten solution for problem 19:

③ $\pi+2+4\sqrt{2}$ (checked)

2

$\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}$ 의 값

이 평면 위의 점

$2 - \sqrt{2}$

Area breakdown:

- Green rectangle: $2\sqrt{2}(2-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}-4$
- Yellow sector: $\pi - 2$
- Red rectangle: 8

∴ $\pi + 2 + 4\sqrt{2}$

10. 공간도형

Theme 40 이면각

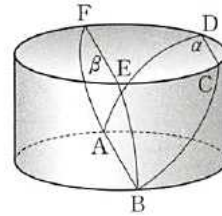
[수완 유형편 공간도형]

08

▶ 9050-0302

그림과 같이 밑면의 지름의 길이가 6이고 높이가 3인 원기둥이 있다. 아래쪽 밑면의 지름 AB를 포함하는 두 평면 α, β 와 위쪽 밑면이 만나는 점 중 원의 둘레에 있는 네 점을 각각 C, D, E, F라 하자. 이때 두 점 C, D는 평면 α 위에 있고, 두 점 E, F는 평면 β 위에 있다. $\overline{CD} = 2\sqrt{2}$, $\overline{EF} = 2\sqrt{6}$ 이고, 두 평면 α, β 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은?

(단, 위쪽 밑면의 중심은 사각형 CDFE의 내부에 있다.)



- ① $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{8}$
- ② $\frac{5\sqrt{3}-2\sqrt{7}}{8}$
- ③ $\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{7}}{16}$
- ④ $\frac{9\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{16}$
- ⑤ $\frac{7\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{8}$

Handwritten solution for problem 10:

- Green rectangle: $2\sqrt{2}(2-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}-4$
- Yellow sector: $\pi - 2$
- Red rectangle: 8

∴ $\pi + 2 + 4\sqrt{2}$

28. [경우의 수 자작문제 31] 확률과 통계

26. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 X 로의 함수 f 중에서 $\sqrt{10 - f(1)f(2)f(3)}$ 가 자연수가 되도록 하는 함수 f 의 개수를 구하시오. [4점]

출제의도

$f(1)f(2)f(3)$ 에 대한 case분류

해설

$\sqrt{10 - f(1)f(2)f(3)}$ 가 자연수가 나오려면 $f(1)f(2)f(3) = 9, 6, 1$ 이 되어겠죠?

① $f(1)f(2)f(3) = 9$

$9 = 3 \times 3 \times 1$ 이니까 $f(1), f(2), f(3)$ 에 배열방법 3가지

나머지 $f(4), f(5)$ 은 각각 5가지이므로 25가지

② $f(1)f(2)f(3) = 6$

$6 = 3 \times 2 \times 1$ 이니까 $f(1), f(2), f(3)$ 에 배열방법 $3! = 6$ 가지

나머지 $f(4), f(5)$ 은 각각 5가지이므로 25가지

③ $f(1)f(2)f(3) = 1$

$1 = 1 \times 1 \times 1$ 이니까 $f(1), f(2), f(3)$ 에 배열방법 1가지

나머지 $f(4), f(5)$ 은 각각 5가지이므로 25가지

따라서 답을 구해보면 $75 + 150 + 25 = 250$

답은 250

출제자의 한마디

전형적인 대상선택 × 배열 문제였죠? ㅎㅎ

32. [경우의 수 자작문제 36] 확률과 통계

26. $35 \times 33 \times 128$ 를 3 개의 4의 배수의 곱으로 나타내는 경우의 수를 구하시오. (단, 곱한 순서는 고려하지 않는다.) [4점]

출제의도

소인수분해를 활용한 분할문제

해설

$35 \times 33 \times 128$ 를 소인수분해 해봅시다~ $3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 2^7$

$a \times b \times c$ 로 표현했을 때 a, b, c 가 각각 4의 배수가 되려면 2^2 을 적어도 하나 가지고 있어야 하겠죠?

2^2 을 각각 주면 $3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 2$ 가 남겠군요.

남은 2, 3, 5, 7, 11 은 서로소이니까 a, b, c 에 배당하는 개수가 다르면 결코 같아질 수 없겠죠?

a 에 해당하는 개수를 A , b 에 해당하는 개수를 B , c 에 해당하는 개수를 C 라 하면 $A+B+C=5$ 가 되어야겠죠? (여기서 2^2 은 공통이니 논외로 합시다~)

5, 0, 0 \Rightarrow 1가지 (곱한 순서는 상관없다고 했으니까 분할만 하면 되겠죠?)

4, 1, 0 $\Rightarrow {}_5C_4 = 5$

3, 2, 0 $\Rightarrow {}_5C_3 = 10$

3, 1, 1 $\Rightarrow {}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 10$

2, 2, 1 $\Rightarrow {}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$

다 더하면 $1+5+10+10+15=41$

답은 41

37. [경우의 수 자작문제 43] 확률과 통계

26. 주머니 A에는 1과 -1이 적힌 구슬이 각각 3개씩 모두 6개 들어있고, 주머니 B에는 1과 -1이 적힌 구슬이 각각 2개씩 모두 4개가 들어있다. 두 주머니에서 각각 임의로 2개의 구슬을 동시에 꺼내서 버릴 때, 각 주머니에 남아있는 구슬들에 적힌 숫자들의 곱이 서로 같을 확률은 p 이다. $30p$ 의 값을 구하시오. [4점]

출제의도

버려진 공들로 case분류~

해설

A주머니에 1, 1, 1, -1, -1, -1 B주머니에 1, 1, -1, -1
 확률계산에 있어서는 같은 것도 다른 것이라고 간주한다고 했었죠? ㅎㅎ

〈A주머니〉

- ① 1, 1을 뽑았을 때 곱은 -1 $\Rightarrow \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{5}$
- ② -1, -1을 뽑았을 때 곱은 -1 $\Rightarrow \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{5}$
- ③ 1, -1을 뽑았을 때 곱은 1 $\Rightarrow \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{3}{5}$

〈B주머니〉

- ① 1, 1을 뽑았을 때 곱은 1 $\Rightarrow \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$
- ② -1, -1을 뽑았을 때 곱은 1 $\Rightarrow \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$
- ③ 1, -1을 뽑았을 때 곱은 -1 $\Rightarrow \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{4}{6}$

곱이 1로 같을 때 $\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} +$ 곱이 -1로 같을 때 $\frac{2}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{7}{15} = p$

$\therefore 30p = 14$

답은 14

출제자의 한마디

무난한 문제이지만 충분히 나올법한 문제죠? ㅎㅎ 이런 유형은 맞느냐보다는 실수하지 않고 빨리 푸느냐가 더 중요한 문제겠죠? ㅎㅎ