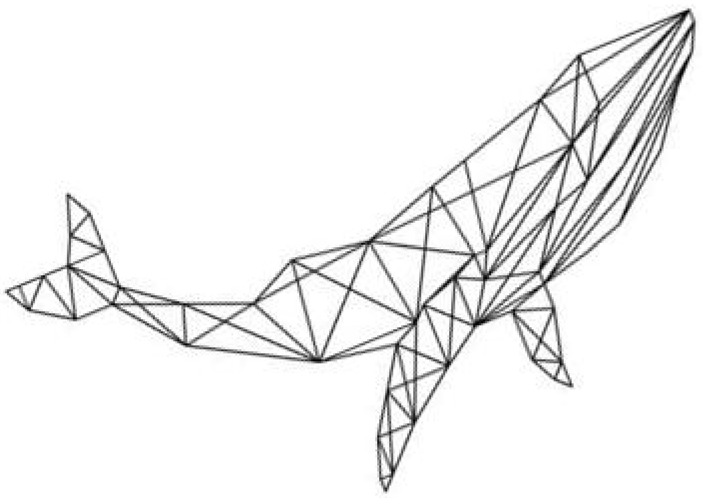
2020학년도

성균관대학교 논술 대비교재

(배포용 일부내용)



2019.11.

우주설 저

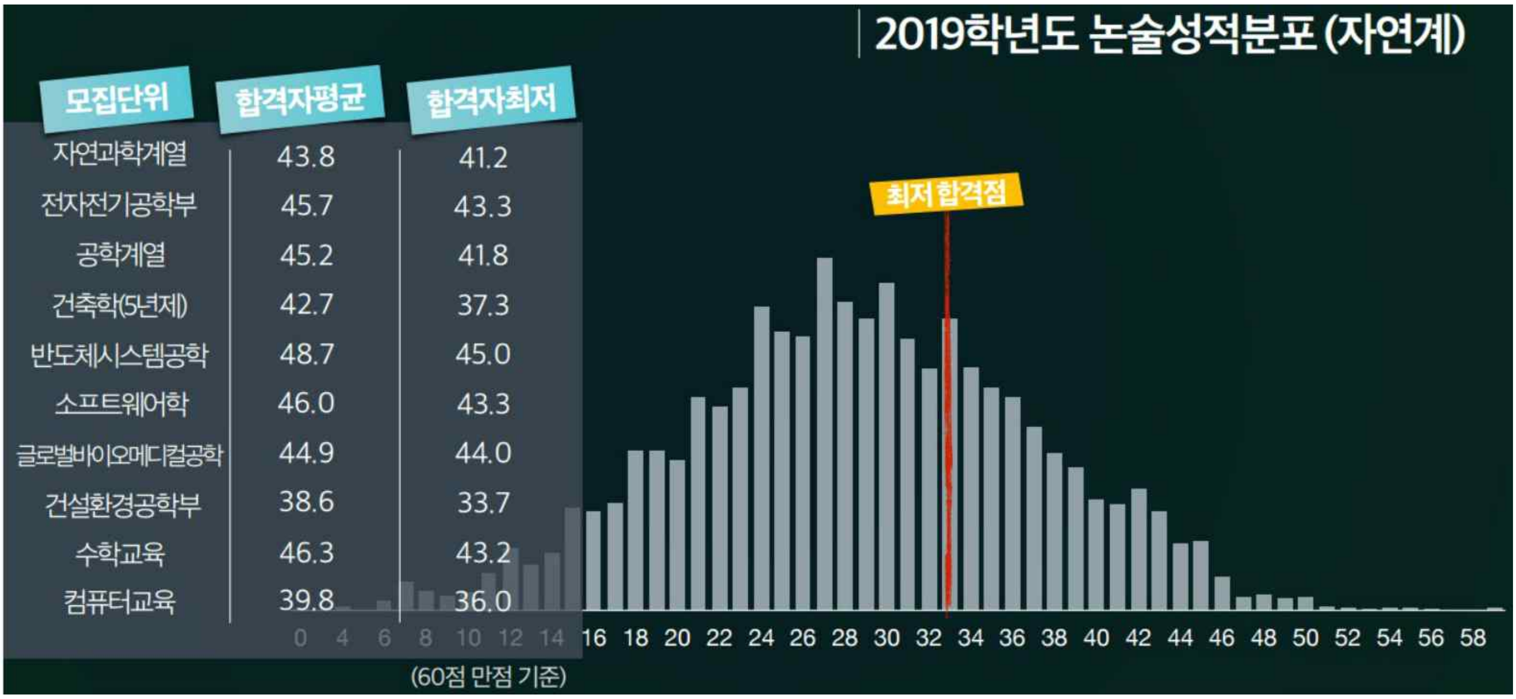
Step 0. 하루만에 논술결과가 달라질 수 있을까?

성균관 대학교 논술전형 분석

난이도 : 중하~중

모의논술 연계정도: 20% (관련이 없다고 보면 될 정도)

응시자 성적분포



합격자 평균들을 단순하게 평균내면 44.1점 합격자 최저점수를 평균을 내면 40.8점입니다.

이는 수학 60점 / 과학 40점 만점의 성균관대학교 논술을 60점 만점으로 환산한 기준입니다.

과학에서 30점을 얻었다고 하였을 때, 환산점수로 42점을 얻으려면 수학에서 단 40점만 얻으면 됩니다. 시험지에서 가장 어려운 소문항을 부분점수 없이 통째로 틀린다 하더라도 15점이 감점인 것을 고려하면 상당히 후한 컷트라인입니다. 난이도가 낮은 시험이지만 왜 이런 일이 일어난 것일까요?

기본 합격전략

학생들의 체감 난이도에 비해 합격 컷트라인이 낮게 형성되었습니다. (잘 친 것 같은데 불합격)

감점요소가 상당히 많이 내포되어 있는 시험입니다. 이에 따라 성균관대학교 입학처에서 제공한 기출문제의 채점기준표를 참고하여 답안을 작성하는 방식을 정교하게 교정할 필요가 있습니다.

지금부터 성균관대학교의 채점방식에 맞추어 서술방식을 교정하여 봅시다.

2019학년도 성균관대학교 모의논술

[수학 1]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학 1 - i] ~ [수학 1- ii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

좌표 평면 위의 점 $\mathrm{A}(0,1)$와 점 $\mathrm{B}(0,a)$ $(-1<a<1)$를 y축 위에 잡고 점 B에서 x축에 평행한 직선이 포물선 $y=x^2-1$ 과 만나는 두 점을 각각 C, D라 한다.

<제시문2>

선분 $\overline{\mathrm{AD}}$, 선분 $\overline{\mathrm{AC}}$, 그리고 포물선 $y=x^2-1$ 둘러싸인 영역의 넓이를 S_0 라 하고, 삼각형 ACD의 넓이를 S_1라 한다. S_0에서 S_1을 뺀 값을 S_2라 정의하고, $S=S_1\times S_2$라 정의한다.

<제시문3>

구간 $[a,b]$에서 연속인 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$이다.

[수학 1 - i]

S를 a의 함수로 나타내고 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - ii]

S의 최댓값과 그때의 a의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

다음은 대학 측 예시답안입니다.

[수학 1 - i]

○ 예시답안

문제의 조건에 의해 점 C 혹은 D의 x 좌표를 b라 하면 $b^2-1=a$ 을 만족해야 한다. 따라서

$b=\pm\sqrt{a+1}$ 이 되고, 일반성을 잃지 않고 점C 와 점D를 각각

$$\mathrm{C}\left(-\sqrt{a+1},a\right),\quad \mathrm{D}\left(\sqrt{a+1},a\right)$$

라 둘 수 있다. 따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$$S_1=\frac{1}{2}\times(1-a)\times 2\sqrt{a+1}=(1-a)\sqrt{a+1}$$

가 된다.

한편 <제시문3>에 의하여

$$\begin{aligned}S_2&=\int_{-\sqrt{a+1}}^{\sqrt{a+1}} a-(x^2-1)\,dx\\&=-\frac{2}{3}\sqrt{(a+1)^3}+2(a+1)\sqrt{a+1}\\&=\frac{4}{3}\sqrt{(a+1)^3}\end{aligned}$$

따라서

$$S=S_1\times S_2=\frac{4}{3}(1-a)(a+1)^2$$

을 얻는다.

○ 채점기준

S_1을 a를 이용하여 나타내고 그 이유를 제시할 수 있다. (4점)

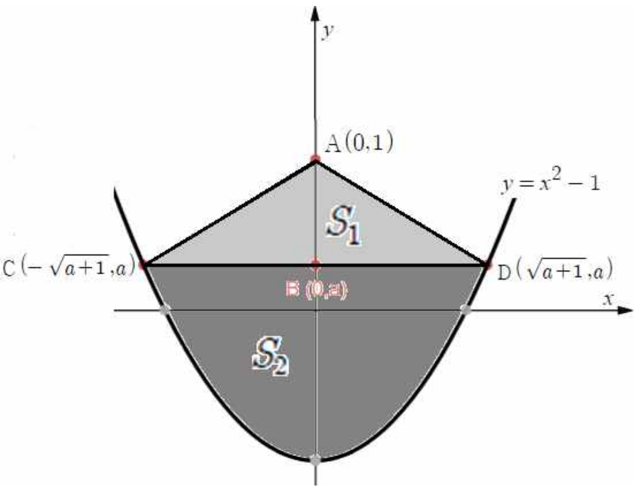
S_2를 a를 이용하여 나타내고 그 이유를 제시할 수 있다. (4점)

S_2를 a를 이용하여 나타내고 그 이유를 제시할 수 있다. (2점)

구하는 것은 S를 a에 대하여 나타낸 식이지만 S_1, S_2를 a에 대한 식으로 나태내지 않으면 각각 4점 감점됩니다.

예시답안에는 나와 있지 않지만, 논제의 답안을 좀 더 인상 깊게 작성하는 방법이 있습니다. 바로 그림활용입니다.

오른쪽 그림과 같이 그래프를 활용하면 좀 더 자신이 현재 하려는 풀이를 한눈에 알아보기 쉽게 나나낼 수 있으며 좋은 점수를 받기 용이합니다. 당연히 점의 이름, 넓이, 축 등을 빼먹지 않게 조심해야 합니다.



Step 1. 증감표를 통한 최대 최소의 서술

[수학 1-ii]

○ 예시답안

$$S=\frac{4}{3}(1-a)(a+1)^2$$
$$=\frac{4}{3}(-a^3-a^2+a+1) \text{ 를 미분하면 } S'=-\frac{4}{3}(a+1)(3a-1)$$

를 얻는다. 증감표를 조사하면

a	-1		$\frac{1}{3}$		1
S'		+		−	
S	0	↗	$S\left(\frac{1}{3}\right)$	↘	0

가 되어 $a=\frac{1}{3}$일 때 최댓값을 가짐을 알 수 있고 이때 최댓값은

$S\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{128}{81}$ 이 된다.

○ 채점기준

S의 도함수를 구할 수 있다. (2점)

증감표를 이용하여 함수의 증가 감소를 나타낼 수 있다. (4점)

최댓값을 가지는 a와 그때의 최댓값을 구할 수 있다. (4점)

문제에서는 '**S의 최댓값과 그 때의 a값을 구하고 그 이유를 논하시오.**' 라고 나와 있습니다. 그러나 채점기준에 따르면 증감표를 활용하지 않으면 감점요소입니다. 이는 논술가이드북에도 나와 있는 핵심내용입니다.

3. 성균관대학교 논술 준비

학생들이 가장 많이 하는 실수 및 감점 요인들에 관해 이야기해보면 논술을 어떻게 준비해야 할지 팁을 얻을 수 있으리라 생각합니다. 앞서 언급하였듯이 성균관대학교 논술 문제는 일부러 비틀거나 꼬아낸 문제는 없으므로 평이하다고 생각하는 학생이 있을 수 있지만, 막상 채점을 해보면 그리 높은 점수가 나오는 것만은 아닙니다. 문제를 풀어 정확한 답을 도출할 수 있느냐도 중요하지만 그만큼 중요한 것이 본인의 추론 과정과 계산과정을 논리적으로 설명할 수 있느냐 하는 점이며, 이 부분에서 많은 학생들이 실점을 하고 있는 상황입니다.

따라서 본인의 추론의 흐름을 명확히 보여주어야 하고 모든 중요한 단계에는 적절한 근거를 제시하는 것이 중요합니다. 많은 학생들이 '이것은 기초적인 것이니 생략해도 되겠지', '이런 것은 굳이 적지 않아도 채점하시는 분이 아시겠지'하는 생각에 중요한 단계를 생략하거나 수학적 근거를 대지 않는 모습을 많이 보입니다. 한수의 최댓값을 구할 때 미분을 통하여 극점을 구한 후 그래프나 증감표 등의 명확한 근거 제시 없이 최댓값을 결정 한다던가, 복잡한 방정식의 해를 적절한 풀이 과정 없이 바로 도출하는 등이 그런 예가 될 것입니다. 그럴 경우는 이 학생은 분명이 이 문제를 어떻게 해결해야하는지 잘 알고 있는 것으로 보임에도 감점을 할 수 밖에 없습니다. 채점에는 채점기준이 있는 것이고, 앞서 말했듯이 문제를 풀 수 있느냐 만큼 중요한 것이 그러한 풀이를 논리적으로 서술할 수 있느냐 이기 때문입니다.

적절한 논리적 수학적 근거를 대지 않는 것 만큼이나 자주 발생하는 감점 상황은 중구난방으로 답안을 작성하는 것입니다. 한 문단에서 이어지는 다음 문단이 어디 있는지 찾기 힘들 정도로 어지럽게 작성된 답안지가 생각보다 많으며 이런 경우 학생의 논리적 서술을 따라가기 힘들게 되어 감점요인이 될 수 밖에 없습니다.

이는 수년째 나타나고 있는 성균관 대학교의 채점기준입니다.

그러나 타임어택의 특성이 강한 수능을 준비한 학생들 대부분이 증감표를 통해 서술하는 것을 낯설어 합니다.

그렇기 때문에 시험장에 가기 전 수 십 회의 연습을 하여야 합니다. 하루 만에 충분히 개선할 수 있습니다.

2018학년도 성균관대학교 논술기출

[수학 1]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학 1 - i] ~ [수학 1 - iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

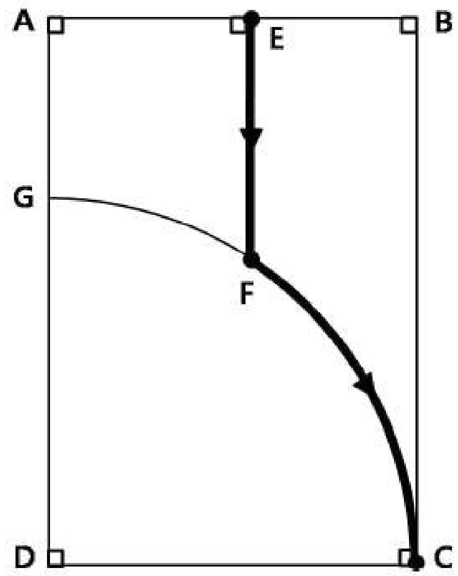
오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{DC}=2$인 직사각형 ABCD 내부에, 점 D를 중심으로 하고 반지름이 2인 사분원 DGC가 놓여있다. 선분 AB 위의 한 점 E에서 선분 AD와 평행하게 그은 선분이 사분원 DGC의 호와 만나는 점을 F라 하자.

<제시문2>

성균이는 점 E에서 출발하여 오른쪽 그림과 같이 화살표 방향으로 선분 EF와 호 FC를 거쳐 점 C로 이동하고자 한다. 성균이는 선분 EF 위를 매초 1의 속력으로 움직이고 호 FC 위를 매초 2의 속력으로 이동한다. 성균이가 점 E를 출발하여 제시된 경로를 따라 점 C에 도달하는데 걸리는 시간을 T(초)라 한다.

<제시문3>

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 가진다.



[수학 1 - i] 선분 AE의 길이가 $\sqrt{3}$일 때 <제시문 2>의 T의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - ii] <제시문 2>의 T의 값이 최소가 되는 선분 AE의 길이를 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - iii] <제시문 2>의 T의 값이 최소가 될 때 도형 AEFG와 도형 EBCF의 넓이를 구하고 그 이유를 논하시오.

다시 말하지만 성균관대학교 수학 문제는 어렵지 않습니다. 새로운 것을 배우려고 하기 보다는 반복적으로 답안지를 작성하며, 해당 대학에서 추구하는 방향으로 답안지를 교정해나가야 합니다.

이 문항들 중 증감표를 사용하여 서술하는 문항이 있습니다.

이를 의식하여 답안지를 작성 해봅시다. 용지가 A4 사이즈 인 것을 고려하여

수학 2번란까지 사용하여 답안지를 작성 해봅시다.

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY

자 연 계

수 험 번 호										
5			9	5	3					

주민등록번호 앞6자리 (예:970612)

모 집 단 위

성 명

연 습 용

※ 유 의 사 항

1. 답안은 반드시 과목별 지정 답안영역에 작성해야 합니다.
2. 과학문제 선택과목을 반드시 마킹해야 합니다.
3. 답안이 작성영역을 벗어난 경우 감점처리 될 수 있습니다.
4. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다.
   인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계 없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

수학 1번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

수학 2번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

2020학년도 모의논술

이 줄 아래에는 답안을 작성하지 마십시오.

〈예시답안 및 채점기준〉

[수학 1 - i]

■ 예시답안

각 FDC를 x라 두면, 문제의 조건에서

$$2\cos x = \sqrt{3},\ 즉\ x = \frac{\pi}{6}$$

따라서

$$T = \frac{2}{1} + \frac{2\cdot\pi/6}{2} = 2 + \frac{\pi}{6}$$

■ 채점기준

(5점) T의 값을 구할 수 있다.

[수학 1 - ii]

■ 예시답안

점 F에서 선분 DC에 내린 수선의 발을 H라 하고,

∠FDC를 x $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$라 하자.

선분 EF의 길이=선분 EH의 길이 - 선분 FH의 길이

$=3-2\sin x$

이고 호 FC의 길이는 $2x$ 이므로

$$T = \frac{3-2\sin x}{1} + \frac{2x}{2} = 3 - 2\sin x + x$$

$T'(x) = 1 - 2\cos x$ 이고, $T'(x)=0$ 에서 $x = \frac{\pi}{3}$

함수 T의 증감을 표로 나타내면

x	0	$\cdots$	$\pi/3$	$\cdots$	$\pi/2$
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$		↘	$T(\pi/3)$	↗	

따라서 T는 $x=\pi/3$ 에서 최솟값을 가지고, 이때 선분 AE의 길이는

$$\overline{AE} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$$

■ 채점기준

(8점) T의 식을 유도 할 수 있다.

(5점) 미분법을 활용하여 T의 최솟값의 위치를 구할 수 있다.

(2점) $\overline{AE}$의 길이를 구할 수 있다.

[수학 1 - iii]

■ 예시답안

[수학 1- ii]의 결과에 의해 T의 값이 최소가 될 때 $\angle FDC = \frac{\pi}{3}$ 이므로

도형 FCH의 넓이 = 부채꼴DFC의 넓이 - 삼각형 DFH의 넓이

$$= 2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}$$
$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이를 이용하면,

도형 EBCF의 넓이 = 직사각형 EBCH의 넓이 - 도형 FCH의 넓이

$$= 3 - \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

도형 AEFG의 넓이 = 도형 ABCG의 넓이 - 도형 EBCF의 넓이

$$= 6 - \pi - \left(3 - \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 3 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

■ 채점기준

(5점) 도형 EBCF의 넓이를 구할 수 있다.

(5점) 도형 AEFG의 넓이를 구할 수 있다.

문제에서는 '**T의 값이 최소가 되는 선분 AE의 길이를 구하고 그 이유를 논하시오.**' 라고 나와 있습니다.

이 역시 입학처에서 제시한 예시답안에서는 증감표를 사용하여 서술하고 있습니다.

여기서 부터는 증감표를 사용하여 서술하는 기출문항을 연속적으로 풀어보겠습니다.

Step 1. 증감표를 통한 최대 최소의 서술

2018학년도 성균관대학교 논술기출

[수학 1]

다음 <제시문1>, <제시문2>를 읽고 [수학 1 - i], [수학 1 - ii]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

원 $C: x^2+y^2=4$와 두 점 $\mathrm{P}(0,2)$, $\mathrm{Q}(0,-1)$이 주어져 있다. 점 Q를 지나는 직선 L이 원 C와 만나는 두 점을 각각 R, S라 한다.

<제시문2>

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 가진다.

[수학 1 - i] 직선 L의 기울기를 실수 m $(-2 \le m \le 2)$이라고 할 때, <제시문1>의 삼각형 PRS의 세 변의 길이의 제곱의 합 $\overline{\mathrm{PR}}^2+\overline{\mathrm{RS}}^2+\overline{\mathrm{SP}}^2$이 최대가 되는 m의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - ii] 직선 L의 기울기를 실수 m $(-2 \le m \le 2)$이라고 할 때, <제시문1>의 삼각형 PRS의 넓이가 최대가 되는 m의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

2017학년도 단국대학교 논술기출

[논제 3] 함수 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ 과 실수 $t\,(-1 \le t \le 2)$에 대하여

$M(t)$를 $\{x \mid -1 \le x \le t\}$에서 $f(x)$의 최댓값,

$m(t)$를 $\{x \mid t \le x \le 2\}$에서 $f(x)$의 최솟값

이라 할 때, $\displaystyle\int_{a-\frac{1}{3}}^{a+\frac{1}{3}} (M(t) - m(t))\,dt$의 값이 최대가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

성균관대학교
SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

자 연 계

모 집 단 위

성 명

수 험 번 호										
5			9	5	3					

주민등록번호 앞6자리 (예:970612)					

연 습 용

※ 유 의 사 항

1. 답안은 반드시 과목별 지정 답안영역에 작성해야 합니다.
2. 과학문제 선택과목을 반드시 마킹해야 합니다.
3. 답안이 작성영역을 벗어난 경우 감점처리 될 수 있습니다.
4. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다. 인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계 없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

수학 1번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

수학 2번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

2020학년도 모의논술

이 줄 아래에는 답안을 작성하지 마십시오.

〈예시답안 및 채점기준〉

[수학 1 - i]

■ 예시답안

직선 L의 방정식: $y=mx-1$ 를 원 C와 연립하면

$$(m^2+1)x^2-2mx-3=0 \qquad ---- (*)$$

이 방정식의 두 해를 α, β (단, $\alpha<0, \beta>0$)라 하자.
일반성을 잃지 않고 $\mathrm{R}(\alpha, m\alpha-1)\ (\alpha<0)$, $\mathrm{S}(\beta, m\beta-1)\ (\beta>0)$ 라 두면,

$\overline{\mathrm{PR}}^2=\alpha^2+(m\alpha-1-2)^2=(m^2+1)\alpha^2-6m\alpha+18$
$\overline{\mathrm{SD}}^2=\beta^2+(m\beta-1-2)^2=(m^2+1)\beta^2-6m\beta+18$
$\overline{\mathrm{RS}}^2=(\alpha-\beta)^2+\{m\alpha-1-(m\beta-1)\}^2=(m^2+1)(\alpha-\beta)^2$
$I=\overline{\mathrm{PR}}^2+\overline{\mathrm{RS}}^2+\overline{\mathrm{SD}}^2$ 라 두고 이를 대입하면

$$I=(m^2+1)(\alpha^2+\beta^2)-6m(\alpha+\beta)+18+(m^2+1)(\alpha-\beta)^2$$
$$=(m^2+1)\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-6m(\alpha+\beta)+18+(m^2+1)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$$

(*)로 부터

$$\alpha+\beta=\frac{2m}{m^2+1}, \qquad \alpha\beta=\frac{-3}{m^2+1} \qquad ---- (**)$$

가 성립하므로,

$$I=(m^2+1)\left\{\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2+\frac{6}{m^2+1}\right\}-6m\frac{2m}{m^2+1}+18+(m^2+1)\left\{\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2+\frac{12}{m^2+1}\right\}$$
$$=32+\frac{4}{m^2+1}$$

양변을 미분하면

$$I'(m)=\frac{-8m}{(m^2+1)^2}$$

따라서 $I'(x)=0$에서 $m=0$을 얻고, 증감을 조사하면

m	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$I'(m)$		$+$	0	$-$	
$I(m)$		$\nearrow$	36	$\searrow$	

따라서 $m=0$에서 최댓값을 가진다.

■ 채점기준

(10점) 세 변의 제곱의 합을 m을 이용하여 나타낼 수 있다.
(5점) 세 변의 제곱의 합이 최대가 되는 m을 구할 수 있다.

[수학 1 - ii]

■ 예시답안

삼각형 PRS의 넓이를 A라 하면,
삼각형 PRS의 넓이 = 삼각형 PRQ의 넓이 + 삼각형 PQS의 넓이이므로

$$A=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(-\alpha)+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\beta=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)$$

그런데 [수학 1- i]의 (**)로 부터

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2+\frac{12}{m^2+1}}=\frac{2\sqrt{4m^2+3}}{m^2+1}$$

이므로

$$A(m)=\frac{3\sqrt{4m^2+3}}{m^2+1} \qquad (-2\le m\le 2)$$

함수 $A(m)$에 자연 로그를 취하고

$$\ln A=\ln 3+\frac{1}{2}\ln(4m^2+3)-\ln(m^2+1)$$

양변을 미분하면

$$\frac{A'}{A}=\frac{4m}{4m^2+3}-\frac{2m}{m^2+1}=\frac{-2m(2m^2+1)}{(4m^2+3)(m^2+1)}$$

따라서

$$A'=\frac{-6m(2m^2+1)\sqrt{4m^2+3}}{(4m^2+3)(m^2+1)^2}$$

$A'(x)=0$에서 $m=0$을 얻고, 증감을 조사하면

m	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$A'(m)$		$+$	0	$-$	
$A(m)$		$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	

따라서 $m=0$에서 최댓값을 가진다.

■ 채점기준

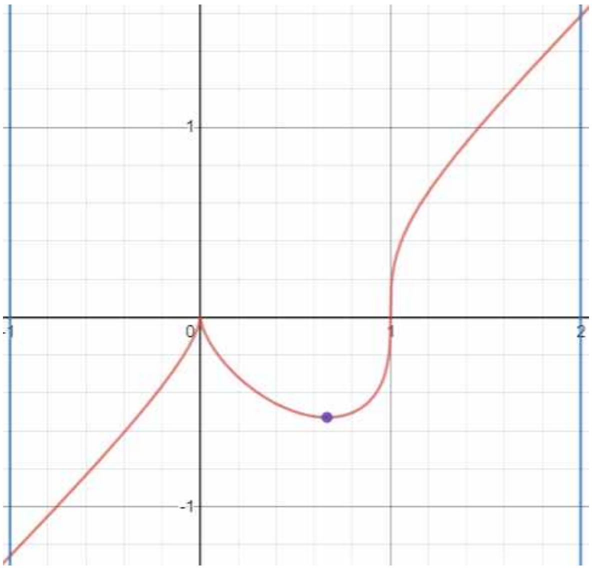
(8점) 삼각형의 넓이를 m을 이용하여 나타낼 수 있다.
(4점) 삼각형의 넓이의 미분을 구할 수 있다.
(3점) 삼각형의 넓이가 최대가 되는 m을 구할 수 있다.

$f(0)=f(1)=0$에서 $f(x)$는 미분 불가능하고, $x \neq 0, x \neq 1$인 x에 대하여 $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ 을 미분하면,

$f'(x)=\frac{1}{3}(x^3-x^2)^{-\frac{2}{3}}\times(3x^2-2x)$에서 $f'\left(\frac{2}{3}\right)=0$이고 지금까지 얻어진 정보를 통해 증감표를 그려보겠습니다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	존재하지 않음	-	0	+	존재하지 않음	+
$f(x)$	↗	0	↘	$\sqrt[3]{\left(-\frac{4}{27}\right)}$	↗	0	↗

증감표를 통해 그래프를 그리면,



왼쪽 그림과 같습니다. $M(t)$, $m(t)$의 값을 각각 t에 따라 구해보면,

$$M(t)=\begin{cases} f(t) & (-1 \le t < 0) \\ 0 & (0 \le t < 1) \\ f(t) & (1 \le t \le 2) \end{cases},$$

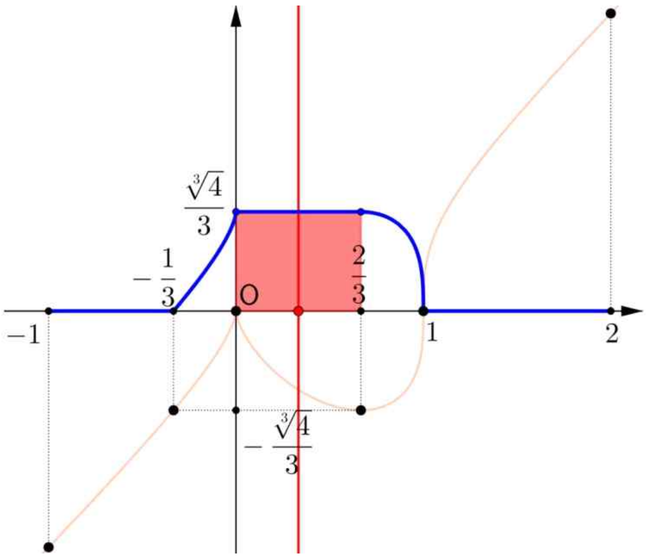
$$m(t)=\begin{cases} f(t) & \left(-1 \le t < -\frac{1}{3}\right)\left(\because f\left(-\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)\right) \\ \sqrt[3]{\left(-\frac{4}{27}\right)} & \left(-\frac{1}{3} \le t < \frac{2}{3}\right) \\ f(t) & \left(\frac{2}{3} \le t \le 2\right) \end{cases}$$ 이고,

$$\mathrm{M}(t)-m(t)=\begin{cases} 0 & -1 \le t < -\frac{1}{3} \\ f(t)+\frac{\sqrt[3]{4}}{3} & -\frac{1}{3} \le t < 0 \\ \frac{\sqrt[3]{4}}{3} & 0 \le t < \frac{2}{3} \\ -f(t) & \frac{2}{3} \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$ 를 얻을 수 있습니다.

$\int_{a-\frac{1}{3}}^{a+\frac{1}{3}} (M(t)-m(t))\,dt$에 대하여

$M(t)-m(t)$의 그래프를 그려보면, 오른쪽 그림과 같이

$a=\frac{1}{3}$에서 최댓값 $\frac{2}{3}\times\sqrt[3]{\left(-\frac{4}{27}\right)}$를 갖습니다.



그래프출처: 진산수학서당 네이버 블로그

2018학년도 인하대학교 논술기출

〔제시문 생략〕

※ $0 < a < \dfrac{1}{2}$을 만족하는 실수인 상수 a에 대하여, 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x) = \frac{\cos x}{\dfrac{1}{2} - a\sin x}$$

를 생각하자.

(1) 함수 $f(x)$의 최솟값을 a로 표현하시오.

2018학년도 중앙대학교 논술기출

〔제시문 생략〕

(2) 두 실수 x, y가 $x + y = 8$, $-84 \le xy \le -65$를 만족한다. 다음 식의 최댓값 M과 최솟값 m을 구하시오.

$$\left(x^2 + y^2 + 3xy\right)e^y$$

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY

자 연 계

모 집 단 위

성 명

수 험 번 호										
5			9	5	3					

주민등록번호 앞6자리 (예:970612)					

연 습 용

※ 유 의 사 항

1. 답안은 반드시 과목별 지정 답안영역에 작성해야 합니다.
2. 과학문제 선택과목을 반드시 마킹해야 합니다.
3. 답안이 작성영역을 벗어난 경우 감점처리 될 수 있습니다.
4. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다.
   인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계 없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

수학 1번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

수학 2번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

2020학년도 모의논술

이 줄 아래에는 답안을 작성하지 마십시오.

Step 1. 증감표를 통한 최대 최소의 서술

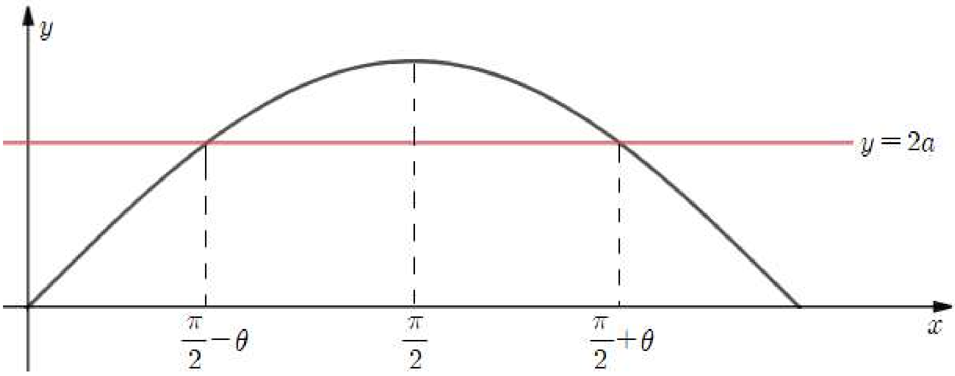
$f(x)=\dfrac{\cos x}{\frac{1}{2}-a\sin x}$를 미분하면,

$$f'(x)=\frac{-\sin x\times\left(\frac{1}{2}-a\sin x\right)-(-a\cos x)\times\cos x}{\left(\frac{1}{2}-a\sin x\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}\sin x+a\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\left(\frac{1}{2}-a\sin x\right)^2}$$

$$=\frac{a-\frac{1}{2}\sin x}{\left(\frac{1}{2}-a\sin x\right)^2}$$

그림과 같이 $\sin x=2a$를 만족시키는 $x=\frac{\pi}{2}-\theta,\ \frac{\pi}{2}+\theta$에 대하여 증감표를 구해봅시다. ($\cos\theta=2a$)



x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	2	↗	$f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	↘	$f\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$	↗	2

$f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}-\theta$에서 2보다 큰 극댓값을 가지므로 최대 최소의 정리에 의해 최댓값을 갖는다.

$f(x)=\dfrac{\cos x}{\frac{1}{2}-a\sin x}$에 대하여 $f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{\sin\theta}{\frac{1}{2}-a\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\frac{1}{2}-a\cos\theta}$, $\cos\theta=2a$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{\sqrt{1-4a^2}}{\frac{1}{2}-2a^2}=\dfrac{\sqrt{1-4a^2}}{1-4a^2}$ 로 나태낼 수 있습니다.

$x+y=8$에 대하여 $y=-x+8$를 $-84 \le xy \le -65$에 대입하면 $-84 \le -x^2+8x \le -65$

이차함수 $y=-x^2+8x$의 그래프를 그려 관찰하면

$-84 \le -x^2+8x \le -65$을 만족시키는 x의 범위

$-6 \le x \le -5$ 또는 $13 \le x \le 14$를 얻는다.

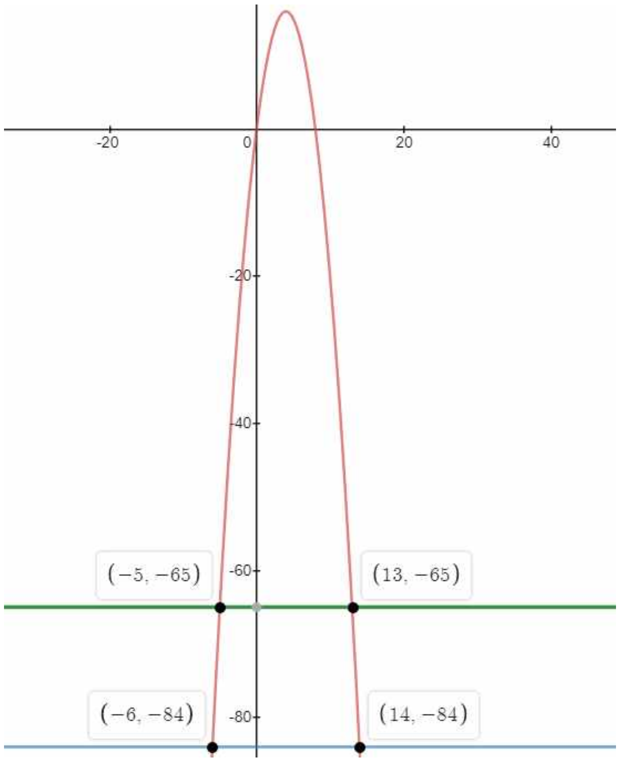
구하고자 하는 $(x^2+y^2+3xy)e^y$에 $y=-x+8$를 대입하면

$(-x^2+8x+64)e^{-x+8}$를 얻는다. 이를 $f(x)$라 하자.

$f'(x)=(x^2-10x-56)e^{-x+8}=(x-14)(x+4)e^{-x+8}$를 이용하여

$f(x)$의 증감표를 작성하면 다음과 같고,

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	14	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$16e^{12}$	$\searrow$	$-20e^{-6}$	$\nearrow$



$-6 \le x \le -5$ 또는 $13 \le x \le 14$ 에 대하여 최대최소의 정리를 사용하면

$x=-5$ 또는 $x=13$에서 최댓값을 가질 수 있는데 $f(-5)=-e^{13}$이고 $f(13)=-e^{-5}$를 얻는다.

$-e^{13} < -e^{-5}$이므로 최댓값 $M=-e^{-5}$이다.

한편, $x=-6$ 또는 $x=14$에서 최솟값을 가질 수 있는데 $f(-6)=-20e^{14}$이고 $f(14)=-20e^{-6}$를 얻는다.

$-20e^{14} < -20e^{-6}$이므로 최솟값 $m=-20e^{14}$이다.

2019학년도 성균관대학교 논술기출

[수학 1]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학 1 - i] ~ [수학 1 - iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$의 값은 1이다. (단, x의 단위는 라디안)

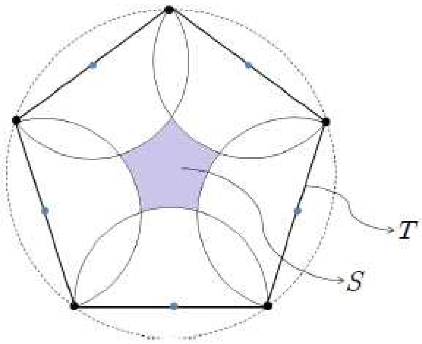
<제시문2>

다음과 같이 삼각함수의 덧셈정리가 성립한다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\ ,\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

<제시문3>

5 이상인 자연수 n에 대하여 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정n각형을 T라고 하자. T의 각 변을 지름으로 가지는 n개의 원 내부에 포함되지 않는 T 내부의 영역을 S라고 하자. 예를 들어, $n=5$일 때 영역 S는 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다. 정n각형 T 내부의 넓이를 $f(n)$, 영역 S의 넓이를 $g(n)$이라고 하자.



[수학 1 - i] <제시문3>의 $f(n)$을 n에 대한 식으로 나타내고 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - ii] <제시문3>에서 $n=6$일 때 $g(6)$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - iii] 극한 $\lim_{n\to\infty} n(f(n)-g(2n))$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

성균관대학교 SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

자 연 계

수 험 번 호										
5			9	5	3					

주민등록번호 앞6자리 (예:970612)					

연 습 용

모 집 단 위

성 명

※ 유 의 사 항

1. 답안은 반드시 과목별 지정 답안영역에 작성해야 합니다.
2. 과학문제 선택과목을 반드시 마킹해야 합니다.
3. 답안이 작성영역을 벗어난 경우 감점처리 될 수 있습니다.
4. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다.
   인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계 없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

수학 1번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

수학 2번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

2020학년도 모의논술

이 줄 아래에는 답안을 작성하지 마십시오.

[수학 1－i]

■ 예시답안

정n각형 T의 각 꼭짓점을 원의 중심과 연결하여, 같은 크기를 가지는 n개의 삼각형으로 T를 나눌 수 있다. 이 삼각형은 꼭지각이 $\frac{2\pi}{n}$이고 빗변의 길이가 1인 이등변삼각형이므로, 삼각형의 넓이는 $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ 이다. T 내부의 넓이는 이 삼각형 넓이의 n배이므로, $f(n)=\frac{n}{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ 임을 알 수 있다.

■ 채점기준

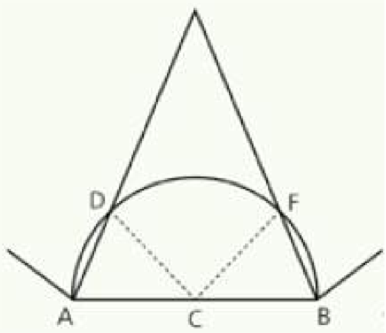
(5점) $f(n)$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

[수학 1－ii]

■ 예시답안

$n=6$일 때, [수학1－i] 답안의 삼각형 하나를 선택하자. 오른쪽 그림과 같이, 이 이등변삼각형의 밑변을 지름으로 하는 원과 이웃하는 다른 원과의 교점을 원의 중심과 연결하자. 이 삼각형의 내부에서 영역 S에 포함되지 않는 영역의 넓이는, 호 CDF의 넓이와 이등변삼각형 ACD, BCF의 넓이의 합과 같다.

여기서, 호 CDF의 넓이는 $\frac{\pi}{6}sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$이고, 이등변삼각형 ACD와 BCF 각각의 넓이는 $\frac{1}{2}sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$이다. 이로부터 정6각형 T의 내부에서 영역 S에 포함되지 않는 영역의 넓이는



$$6\left(\frac{\pi}{6}sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

이다. 정6각형 T 내부의 넓이는 $f(6)=3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로, 영역 S의 넓이는 $g(6)=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{4}$이다

■ 채점기준

(5점) $g(6)$의 값을 삼각함수를 사용하여 구할 수 있다.

(5점) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$등을 이용하여 $g(6)$의 값을 구할 수 있다.

[수학 1－iii]

■ 예시답안

[수학1－ii] 답안에서와 같은 방법으로, 호 CDF의 넓이는 $\frac{\pi(n-4)}{2n}sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$이고, 이등변삼각형 ACD와 BCF 각각의 넓이는 $\frac{1}{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$임을 알 수 있다. 이로부터 정$n$각형 T의 내부에서 영역 S에 포함되지 않는 영역의 넓이는

$$n\left(\frac{\pi(n-4)}{2n}sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

이다. 다시 정n각형 T 내부의 넓이는 $f(n)=\frac{n}{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$이므로, 영역 S의 넓이는

$$\begin{aligned}g(n)&=\frac{n}{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)-n\left(\frac{\pi(n-4)}{2n}sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\\&=\frac{n}{4}sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)-\frac{\pi(n-4)}{2}sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

이다. 위 문항으로부터 $n(f(n)-g(2n))=\pi n(n-2)\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$을 얻을 수 있다. 이를 다시 정리하면,

$n(f(n)-g(2n))=\frac{\pi^3(n-2)}{4n}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2}$이고, 〈제시문 1〉에 의해 이의 극한값은 $\frac{\pi^3}{4}$이다.

■ 채점기준

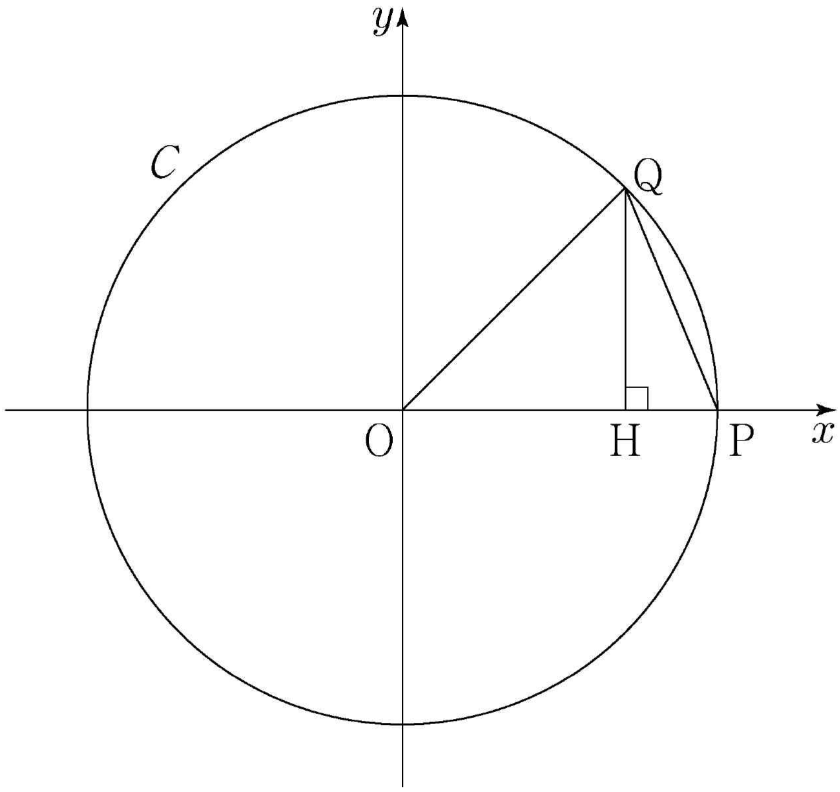
(8점) 함수 $g(n)$, $f(n)-g(2n)$등을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

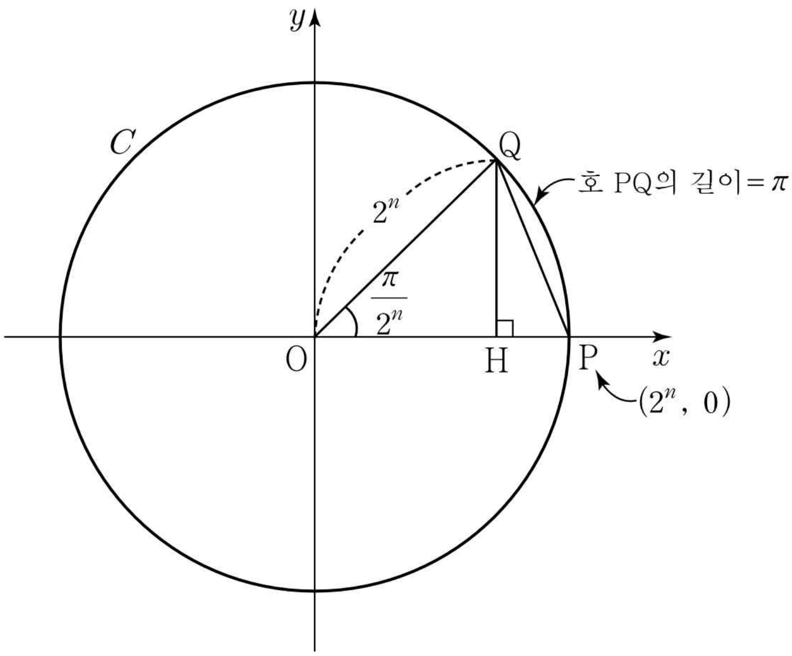
(7점) 극한 $\lim_{n\to\infty}n(f(n)-g(2n))$의 값을 구할 수 있다.

2019학년도 9월 모의평가 기출

1. 자연수 n에 대하여 중심이 원점 O이고 점 $\mathrm{P}(2^n,\ 0)$을 지나는 원 C가 있다. 원 C 위에 점 Q를 호 PQ의 길이가 π가 되도록 잡는다. 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{HP}})$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi^2}{2}$ ② $\frac{\pi^2}{3}$ ③ π^2 ④ $\frac{5}{4}\pi^2$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi^2$





호 PQ 의 길이가 π 일 때, $\overline{\mathrm{PO}} \times \angle \mathrm{POQ} = \pi$ 이고, $\overline{\mathrm{PO}} = 2^n$ 이므로 $\angle \mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{2^n}$ 이다.

$\overline{\mathrm{OQ}} = 2^n$ 이고 $\overline{\mathrm{HP}} = 2^n - 2^n \cos\dfrac{\pi}{2^n}$ 이므로 구하고자 하는

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{\mathrm{OQ}} \times \overline{\mathrm{HP}}\right) = \lim_{n\to\infty} 2^n\left(2^n - 2^n\cos\frac{\pi}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left(1 - \cos\frac{\pi}{2^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{2^n}\right)}{\left(1+\cos\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \cdot \sin^2\frac{\pi}{2^n}}{\left(1+\cos\frac{\pi}{2^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2\frac{\pi}{2^n} \cdot \pi^2}{\left(1+\cos\frac{\pi}{2^n}\right)\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2\frac{\pi}{2^n}}{\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^2} \times \frac{\pi^2}{\left(1+\cos\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$

2018학년도 성균관대학교 논술기출

[수학 2]

다음 <제시문1> ~ <제시문4>를 읽고 [수학 2 - i] ~ [수학 2 -iv]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

사건 A, B에 대하여 사건 B가 일어났을 때, 사건 A가 일어날 확률을 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률이라 하고, 기호로 $P(A|B)$와 같이 나타낸다.

사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률은 $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ (단, $P(B) \neq 0$)을 만족한다.

<제시문2>

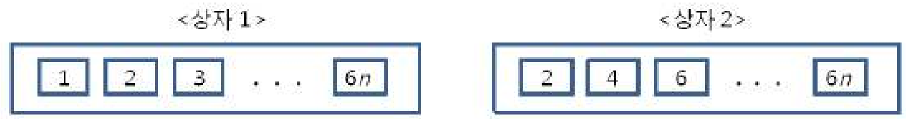
어떤 사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로 A^C와 같이 나타낸다.
두 사건 A와 B에 대하여 $P(B) = P(A\cap B) + P(A^C\cap B)$가 항상 성립한다.

<제시문3>

$g(n)$과 $h(n)$이 n에 대한 다항식일 때, $\dfrac{g(n)}{h(n)}$을 n에 대한 유리식이라 한다. (단, $h(n) \neq 0$.)

<제시문4>

자연수 n에 대하여 그림과 같이 <상자1>에는 1부터 $6n$까지의 자연수가 적힌 $6n$장의 카드가 있고 <상자2>에는 2부터 $6n$까지의 짝수가 적힌 $3n$장의 카드가 있다.



[수학 2 - i] <제시문4>의 <상자1>에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수의 합이 짝수일 확률을 n에 대한 유리식으로 나타내고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

[수학 2 - ii] <제시문4>의 <상자1>에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수일 확률을 n에 대한 유리식으로 나타내고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

[수학 2 - iii] <제시문4>의 <상자1>에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수일 때, 이 두 수의 합이 짝수일 확률을 n에 대한 유리식으로 나타내고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

[수학 2 - iv] <제시문4>의 <상자1>과 <상자2> 중 임의로 한 상자를 골라 그 안에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수를 곱했더니 6의 배수가 되었다. 이 때 카드를 뽑은 상자가 <상자1>일 확률을 $f(n)$이라 했을 때 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY

자 연 계

모 집 단 위

성 명

수 험 번 호: 5 _ _ 9 5 3

주민등록번호 앞6자리 (예:970612)

연 습 용

※ 유 의 사 항

1. 답안은 반드시 과목별 지정 답안영역에 작성해야 합니다.
2. 과학문제 선택과목을 반드시 마킹해야 합니다.
3. 답안이 작성영역을 벗어난 경우 감점처리 될 수 있습니다.
4. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다.
인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계 없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

수학 1번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

수학 2번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

2020학년도 모의논술

이 줄 아래에는 답안을 작성하지 마십시오.

〈예시답안 및 채점기준〉

[수학 2－i]

■ 예시답안

두 수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다. 짝수와 홀수는 각각 $3n$개가 있으므로 두 수가 모두 짝수 또는 모두 홀수인 경우의 수는 ${}_{3n}C_2+{}_{3n}C_2$이다. 따라서 확률은 $\frac{{}_{3n}C_2+{}_{3n}C_2}{{}_{6n}C_2}=\frac{3n-1}{6n-1}$이다.

■ 채점기준

(5점) 경우의 수를 이용해 확률을 구한다.

[수학 2－ii]

■ 예시답안

두 수의 곱이 6의 배수이려면 적어도 하나가 6의 배수이거나, 둘 다 6의 배수가 아니고 하나는 2의 배수이며 다른 하나는 3의 배수가 되어야 한다. 첫 번째 사건의 경우의 수는 ${}_{6n}C_2-{}_{5n}C_2$이고 두 번째 사건의 경우의 수는 $(3n-n)(2n-n)=2n^2$이다 따라서 확률은 $\frac{{}_{6n}C_2-{}_{5n}C_2+2n^2}{{}_{6n}C_2}=\frac{15n-1}{36n-6}$ 이다.

■ 채점기준

(5점) 경우의 수를 이용해 확률을 구한다.

[수학 2－iii]

■ 예시답안

두 수의 곱이 6의 배수인 사건을 A라 하고 두 수의 합이 짝수인 사건을 B라 하자. 그러면 $A\cap B$는 두 수가 모두 짝수이며 적어도 하나가 3의 배수인 사건과 같다. 이러한 사건의 경우의 수는 ${}_{3n}C_2-{}_{2n}C_2$이므로

$P(A\cap B)=\frac{{}_{3n}C_2-{}_{2n}C_2}{{}_{6n}C_2}=\frac{5n-1}{36n-6}$이다. [2－ii]에서 $P(A)=\frac{15n-1}{36n-6}$이므로 답은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{5n-1}{15n-1}$이 된다.

■ 채점기준

(5점) 두 수의 곱이 6의 배수이고 합이 짝수일 확률을 구한다.

(5점) 조건부확률을 구한다.

[수학 2－iv]

■ 예시답안

〈상자1〉을 고르는 사건을 X라 하고 임의로 고른 상자에서 뽑은 두 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수인 사건을 Y라 하자. 그러면 $P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}=\frac{P(X\cap Y)}{P(X\cap Y)+P(X^C\cap Y)}$을 만족한다.

[2－ii]로부터 $P(X\cap Y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15n-1}{36n-6}=\frac{15n-1}{72n-12}$을 얻는다. 〈상자2〉에서 뽑은 카드에 적힌 두 수의 곱이 6의 배수이려면 적어도 하나가 3의 배수이면 된다. 따라서

$P(X^C\cap Y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_{3n}C_2-{}_{2n}C_2}{{}_{3n}C_2}=\frac{5n-1}{18n-6}$이고 $f(n)=\dfrac{\frac{15n-1}{72n-12}}{\frac{15n-1}{72n-12}+\frac{5n-1}{18n-6}}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\dfrac{\frac{15}{72}}{\frac{15}{72}+\frac{5}{18}}=\frac{3}{7}$을 얻는다.

■ 채점기준

(5점) 〈상자2〉를 고르고 두 수의 곱이 6의 배수일 확률을 구한다.

(5점) 조건부확률의 극한값을 구한다.

Step 2. 평가원 기출과 성균관대 논술문항의 관계?

2018학년도 9월 모의평가 기출 변형

1. n 명의 사람이 각자 세 상자 A, B, C 중 2 개의 상자를 선택하여 선택한 각 상자에 공을 하나씩 넣으려 한다. (단, n 은 6 의 배수인 자연수이고 공은 구별하지 않는다.)

(1) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수를 n에 관한 식으로 나타내시오..

(2) 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수를 n에 관한 식으로 나타내시오..

성균관대학교
SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

자 연 계

모 집 단 위

성 명

수 험 번 호										
5			9	5	3					

주민등록번호 앞6자리 (예:970612)					

연 습 용

※ 유 의 사 항

1. 답안은 반드시 과목별 지정 답안영역에 작성해야 합니다.
2. 과학문제 선택과목을 반드시 마킹해야 합니다.
3. 답안이 작성영역을 벗어난 경우 감점처리 될 수 있습니다.
4. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다. 인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계 없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

수학 1번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

수학 2번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

2020학년도 모의논술

이 줄 아래에는 답안을 작성하지 마십시오.

Step 2. 평가원 기출과 성균관대 논술문항의 관계?

(1)

두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어간다고 하면 상자 C 에는 최대 n개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 최소 $\dfrac{n}{2}$개의 공이 들어가야 하고, 최대 n개의 공이 들어갈 수 있다. 또한 세 상자에 들어갈 공의 개수의 합은 $2n$으로 일정하므로 두 상자 A, B에 들어갈 공의 개수가 정해지면 C에 들어갈 공의 개수도 정해진다.

그러므로 A, B에 같은 개수의 공이 들어가도록 하는 상자 A, B, C에 들어가는 공의 개수의 순서쌍은 $\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{n}{2}, n\right)$, $\left(\dfrac{n}{2}+1, \dfrac{n}{2}+1, n-2\right)$, $\cdots, (n, n, 0)$으로 $\dfrac{n}{2}+1$개에서 $\left(\dfrac{2}{3}n, \dfrac{2}{3}n, \dfrac{2}{3}n\right)$으로 A, B, C에 들어가는 공의 개수가 모두 같은 경우의 수 1개를 뺀 $\dfrac{n}{2}$개가 존재한다.

상자 B, C에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수와, 상자 A, C에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수 또한 동일하므로 구하고자 하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2 \times \dfrac{n}{2} = \dfrac{3}{2}n$이다.

(2)

세 상자에 공을 넣는 전체경우의 수 ${}_3\mathrm{H}_n$에서 (1)에서 구한 2개의 상자에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수 $\dfrac{3}{2}n$과 세 상자에 공이 $\dfrac{2}{3}n$개씩 들어가는 경우의 수 1을 빼주면,

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_n - \frac{3}{2}n - 1 &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{3}{2}n - 1 \\ &= \frac{n^2}{2} \end{aligned}$$

를 얻을 수 있다.

2019학년도 성균관대학교 논술기출

[수학 2]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학 2 - i] ~ [수학 2 - iv]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$이다.

<제시문2>

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$이다.

<제시문3>

자연수 n에 대하여 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$이 성립한다.

<u>답은 ${}_nC_r$, ${}_nH_r$, $n!$, 2^n 등을 사용하지 않는 자연수 표기법으로 적으시오.</u> 예: 답이 ${}_5C_2+3$이면 13으로 적는다.

[수학 2 - i] 두 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$, $Y=\{y \mid y$는 8 이하의 자연수$\}$에 대해 다음 조건을 만족하는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

조건: 정수 $1 \le i \le 9$에 대해 $f(i) \le f(i+1) \le f(i)+1$이 성립하고 $f(1)=1$이다.

[수학 2 - ii] 두 집합 $X=\{x \mid x$는 6 이하의 자연수$\}$, $Y=\{y \mid y$는 21 이하의 자연수$\}$에 대해 다음 조건을 만족하는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

조건: $\{f(i+1)-f(i) \mid i$는 $1 \le i \le 5$인 정수$\} \subset \{1,2,3,5,7\}$이 성립하고 $f(1)=1$, $f(6)=21$이다.

[수학 2 - iii] 두 집합 $X=\{x \mid x$는 9 이하의 자연수$\}$, $Y=\{y \mid y$는 27 이하의 자연수$\}$에 대해 다음 조건을 만족하는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

조건: 정수 $1 \le i \le 8$에 대해 $0 \le f(i+1)-f(i) \le 4$이 성립하고 정수 $2 \le j \le 8$에 대해 $f(j) \ge \dfrac{f(j-1)+f(j+1)}{2}$이 성립하며 $f(1)=1$이다.

[수학 2 - iv] 두 집합 $X=\{x \mid x$는 5 이하의 자연수$\}$, $Y=\{y \mid y$는 13 이하의 자연수$\}$에 대해 다음 조건을 만족하는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

조건: 정수 $1 \le i \le 4$에 대해 $f(i) \le f(i+1) \le f(i)+7$이 성립한다.

Step 2. 평가원 기출과 성균관대 논술문항의 관계?

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY

자 연 계

모 집 단 위

성 명

수 험 번 호										
5			9	5	3					

주민등록번호 앞6자리 (예:970612)					

연 습 용

※ 유 의 사 항

1. 답안은 반드시 과목별 지정 답안영역에 작성해야 합니다.
2. 과학문제 선택과목을 반드시 마킹해야 합니다.
3. 답안이 작성영역을 벗어난 경우 감점처리 될 수 있습니다.
4. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다.
   인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계 없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

수학 1번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

수학 2번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

2020학년도 모의논술

이 줄 아래에는 답안을 작성하지 마십시오.

〈예시답안 및 채점기준〉

[수학 2 − i]

■ 예시답안

집합 $A=\{x|x$는 9 이하의 자연수$\}$, $B=\{x|x$는 자연수$\}$에 대해 함수 $g:A\to B$를 $g(i)=f(i+1)-f(i)$라 정의하면 g는 $0\le\sum_{i=1}^{9}g(i)=f(10)-f(1)\le 7$을 만족한다. 정수 $0\le k\le 7$에 대하여 $\sum_{i=1}^{9}g(i)=k$라 하면 $g(i)$ 중 1인 값이 k개 0인 값이 $9-k$가 되어야 하므로 이러한 함수 g의 개수는 ${}_9C_k$가 된다. 함수 f는 g에 의해 결정되므로 조건을 만족하는 f의 개수는 $\sum_{k=0}^{7}{}_9C_k=\sum_{k=0}^{9}{}_9C_k-{}_9C_8-{}_9C_9=2^9-9-1=502$이다.

■ 채점기준

(3점) $f(10)=r$ (r 고정)일 때의 경우의 수를 구한다.

(4점) 전체의 경우의 수를 구한다.

[수학 2 − ii]

■ 예시답안

집합 $A=\{x|x$는 5 이하의 자연수$\}$, $B=\{x|x$는 자연수$\}$에 대해 함수 $g:A\to B$를 $g(i)=f(i+1)-f(i)$라 정의하면 g는 $g(i)\in\{1,2,3,5,7\}$이고 $\sum_{i=1}^{5}g(i)=20$을 만족한다. 따라서 $g(1),g(2),\dots,g(5)$를 크기순으로 나열하면 1,2,3,5,7을 사용하여 나타낸 20의 자연수분할이 된다. 이러한 것들은 (7,7,3,2,1), (7,7,2,2,2), (7,5,5,2,1), (7,5,3,3,2), (5,5,5,3,2)가 있다. $g(1),g(2),\dots,g(5)$는 이러한 자연수분할 중 하나를 골라 그 안에 있는 숫자들을 배열해서 얻어진 순열이 된다. 이러한 순열들의 개수를 구하면

$\frac{5!}{2!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{2!}+\frac{5!}{2!}+\frac{5!}{3!}=60+10+60+60+20=210$이 된다.

■ 채점기준

(3점) 가능한 자연수 분할을 모두 구한다.

(4점) 중복순열의 개수를 모두 구한다.

[수학 2-iii]

■ 예시답안

집합 $A=\{x|x$는 8 이하의 자연수$\}$, $B=\{x|x$는 자연수$\}$에 대해 함수 $g:A\to B$를 $g(i)=f(i+1)-f(i)$라 정의하면 함수 g는 다음 세 가지 조건을 만족한다.

(1) $0\le g(i)\le 4$

(2) $g(1)\ge g(2)\ge\cdots\ge g(8)$

(3) $g(1)+g(2)+\cdots+g(8)\le 26$

조건 (1), (2)에서 $g(1),\cdots,g(8)$은 0,1,2,3,4 중에서 중복을 허락하여 8개를 고르는 것에 대응된다. 이렇게 고르는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{H}_8={}_{12}\mathrm{C}_8=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=495$이다. 조건 (3)은 이렇게 선택된 숫자들의 합이 26이하가 되어야 함을 의미한다. 따라서 선택된 숫자의 합이 27,28,29,30,31,32가 되는 경우의 수를 빼야한다. 선택된 숫자의 합이 $32-k$ $(0\le k\le 5)$라 하고 $h(i)=4-g(i)$ $(1\le i\le 8)$라 하면 $0\le h(i)\le 4$, $h(1)\le\cdots\le h(8)$, $h(1)+\cdots+h(8)=k$이므로 이러한 h에서 $h(i)>0$인 것들을 모은 것은 1,2,3,4로 이루어진 k의 자연수분할과 대응된다. 이러한 것들의 개수를 구하면 $k=0$일 때 1가지, $k=1$일 때 1가지(1), $k=2$일 때 2가지(2,11), $k=3$일 때 3가지(3,21,111), $k=4$일 때 5가지(4,31,22,211,1111), $k=5$일 때 6가지 (41,32,311,221,2111,11111)이다. 따라서 답은 $495-1-1-2-3-5-6=477$이다.

■ 채점기준

(4점) 전체 중복조합의 개수를 구한다.

(4점) 해당되지 않는 중복조합의 개수를 뺀다.

[수학 2-iv]

■ 예시답안

$f(i+1)-f(i)$에서 유추하여 $x_1=f(1)-1$, $x_2=f(2)-f(1)$, $x_3=f(3)-f(2)$, $x_4=f(4)-f(3)$, $x_5=f(5)-f(4)$, $x_6=13-f(5)$라 하면 $x_1+\cdots+x_6=12$, $x_i\ge 0$, $x_2,x_3,x_4,x_5\le 7$을 만족한다. $x_1+\cdots+x_6=12$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_6\mathrm{H}_{12}={}_{17}\mathrm{C}_{12}=\dfrac{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=6188$이다. 여기서 조건 $x_2,x_3,x_4,x_5\le 7$을 만족하지 않는 것은 정확히 하나의 $k\in\{2,3,4,5\}$에 대해 $x_k\ge 8$이 된다. (왜냐하면 두 개 이상이 8 이상이면 합이 16 이상이 된다.) $k=2$인 경우, $x_1+\cdots+x_6=12$의 음이 아닌 정수해 중에서 $x_2\ge 8$인 것들의 개수는 $y_2=x_2-8$로 치환하면 $x_1+y_2+x_3+\cdots+x_6=4$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_6\mathrm{H}_4={}_9\mathrm{C}_4=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=126$이다. $k=3,4,5$인 경우도 같은 방법으로 하면 126개가 나온다. 따라서 답은 $6188-4\cdot 126=5684$이다.

■ 채점기준

(4점) 음이 아닌 정수해의 개수를 구한다.

(4점) 해당되지 않는 정수해의 개수를 뺀다.

2019학년도 9월 모의평가 기출

2. 집합 $X = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$에 대하여 치역의 모든 원소의 합이 홀수인 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하는 과정이다.

(1)

모든 원소의 합이 홀수인 함수 $f : X \to X$중 치역 A가 $n(A) = 4$인 함수 f의 개수를 구하시오.

(2)

모든 원소의 합이 홀수인 함수 $f : X \to X$중 치역 A가 $n(A) \le 4$인 함수 f의 개수를 구하시오.

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY

자 연 계

모 집 단 위

성 명

수	험	번	호							
5			9	5	3					

주민등록번호 앞6자리 (예:970612)					

연 습 용

※ 유 의 사 항

1. 답안은 반드시 과목별 지정 답안영역에 작성해야 합니다.
2. 과학문제 선택과목을 반드시 마킹해야 합니다.
3. 답안이 작성영역을 벗어난 경우 감점처리 될 수 있습니다.
4. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다. 인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계 없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

수학 1번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

수학 2번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

2020학년도 모의논술

이 줄 아래에는 답안을 작성하지 마십시오.

(1)
$n(A)=4$에서, 공역 X의 원소 중 짝수인 원소가 2개이므로 집합 A의 네 원소 중 세 원소는 홀수이고 한 원소는 짝수이다.
따라서 집합 X의 원소 중에서 치역의 집합 A의 네 원소를 택하는 경우의 수는 2이다.

한편 정의역 X는 개수가 각각 2, 1, 1, 1 가 되도록 분할되고 이것이 집합 A의 네 원소에 하나씩 대응되면 된다.
정의역 X를 분할하는 경우의 수는 ${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \dfrac{1}{3!}=10$이고, 이를 집합 A의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $4!$이다.

따라서, 구하는 함수 f의 개수는 $2\times10\times4!=480$이다.

(2)
$n(A)=3$이려면, 집합 A의 세 원소가 모두 홀수이거나 세 원소 중 한 원소는 홀수이고 두 원소는 짝수여야 한다.

ⅰ) 세 원소가 모두 홀수인 경우
치역의 집합 A를 선택하는 경우는 오직 하나이고, 정의역 X는 개수가 각각 3, 1, 1 이 되도록 분할되거나
개수가 각각 2, 2, 1 이 되도록 분할되고 이것이 집합 A의 세 원소에 하나씩 대응되면 된다.

정의역 X를 분할하는 경우의 수는 각각 ${}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \dfrac{1}{2!}=10$, ${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \dfrac{1}{2!}=15$이므로 25개이고,
이를 집합 A의 세 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $3!$이다.

그러므로, $n(A)=3$에서 세 원소가 모두 홀수인 경우는 $1\times(10+15)\times3!=150$

ⅱ) 세 원소 중 한 원소는 홀수이고 두 원소는 짝수인 경우
치역의 집합 A를 선택하는 경우는 ${}_3C_1 \times {}_2C_2=3$ 이다.
이후과정은 ‘ⅰ) 세 원소가 모두 홀수인 경우‘ 와 동일하므로
$3\times(10+15)\times3!=450$

따라서, 구하는 함수 f의 개수는 $150+450=600$이다.

2020학년도 9월 모의평가 기출

21. 좌표평면에서 두 점 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 직사각형의 넓이의 최댓값은? [4점]

직사각형 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$의 값은 점 P의 좌표가 $(0, 6)$일 때 최대이고 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$일 때 최소이다.

① $\frac{200}{19}$ ② $\frac{210}{19}$ ③ $\frac{220}{19}$ ④ $\frac{230}{19}$ ⑤ $\frac{240}{19}$

2020학년도 모의논술

논술시험 (자연계)

[수학 1]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학 1 - i] ~ [수학 1 - ii]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

<제시문2>

두 초점 $\mathrm{F}(0,c)$, $\mathrm{F}'(0,-c)$로부터 거리의 합이 $2b$인 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b>a>0,\ a^2=b^2-c^2)$$

<제시문3>

i) 좌표평면 위에서 $|x|+|y|=1$을 만족하는 점 (x, y)의 집합을 P라고 하자.

ii) 부등식 $0<u^2+v^2\le 1$을 만족하는 u, v에 대하여 매개변수 $\theta(0\le\theta<2\pi)$로 표현되는 점 $(x, y)=(u\cos\theta, v\sin\theta)$의 집합을 C라고 하자.

iii) 집합 P와 집합 C가 공집합이 아닌 교집합을 가지게 되는 점 (u, v)로 이루어진 집합을 S라고 하자.

[수학 1 - i] <제시문3>의 집합 S가 좌표평면 위에서 이루는 곡선의 길이를 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - ii] <제시문3>의 곡선 C위의 어떠한 점 Q에 대해서도 $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}$의 값이 일정한 좌표평면 위의 두 점 F, F′이 존재한다. 집합 S에 속한 점 (u,v)에 대하여 $\overline{\mathrm{FF'}}$의 값이 $\sqrt{2}$이하가 되는 점 (u,v)의 집합이 이루는 곡선의 길이의 합을 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어, $u=v$일 때 점 F와 점 F′은 원점으로 일치하고 $\overline{\mathrm{FF'}}=0$이다.

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY

자 연 계

모 집 단 위

성 명

수 험 번 호										
5			9	5	3					

주민등록번호 앞6자리 (예:970612)					

연 습 용

※ 유 의 사 항

1. 답안은 반드시 과목별 지정 답안영역에 작성해야 합니다.
2. 과학문제 선택과목을 반드시 마킹해야 합니다.
3. 답안이 작성영역을 벗어난 경우 감점처리 될 수 있습니다.
4. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다. 인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계 없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

수학 1번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

수학 2번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

2020학년도 모의논술

이 줄 아래에는 답안을 작성하지 마십시오.

〈예시답안 및 채점기준〉

[수학 1－i]

■ 예시답안

$uv=0$일 때 곡선 C는 선분이 되며, 이 선분이 P와 만나게 될 필요충분조건은 $u^2=1$ 또는 $v^2=1$이다. 즉, $(u,v)\in\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$ 이다.

$uv\neq 0$을 가정하고, 이 때 곡선 C가 P에 접하기 위한 조건을 살펴보자. 곡선 C 위의 점 (x_0,y_0)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_0x}{u^2}+\frac{y_0y}{v^2}=1$이므로, 곡선 C가 P에 제 1사분면에서 접하기 위한 조건은 이 접선이 P를 이루는 네 개의 선분 중 하나여야 한다는 것이다.

이로부터 $\left|\frac{x_0}{u^2}\right|=\left|\frac{y_0}{v^2}\right|=1$ 을 얻게 되고, 이를 식 $\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{v^2}=1$에 대입하면 $u^2+v^2=1$을 얻게 된다. 다시 말해, $u^2+v^2<1$인 경우 곡선 C는 P와 만나지 않게 된다.

따라서 집합 S는 좌표평면 위에서 반지름이 1이고 중심이 원점인 원이 되어, 곡선의 길이는 2π이다.

■ 채점기준

(5점) $uv=0$인 S에 속한 점을 올바르게 유도할 수 있다.

(5점) $uv\neq 0$인 S에 속한 점을 올바르게 유도할 수 있다.

(5점) 곡선의 길이를 올바르게 유도할 수 있다.

[수학 1－ii]

■ 예시답안

$uv=0$일 때 곡선 C는 선분이 되며, 이 때 두 점 F,F′은 선분의 양 끝점이 된다. 이 두 점 사이의 거리는 $2>\sqrt{2}$이다.

$uv\neq 0$을 가정하고, $u\geq v>0$을 가정하자. 이 때, $\overline{\mathrm{FF'}}$의 값은 〈제시문 2〉에 의해 $2\sqrt{u^2-v^2}$가 된다. 조건 $\overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{2}$ 로부터 $2\sqrt{u^2-v^2}=\sqrt{2}$을 얻게 되고, [수학 1－i]의 결과에 의해 $u^2+v^2=1$을 만족하므로 $(u,v)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$를 의미한다. 그리고 $\overline{\mathrm{FF'}}=0$인 경우는 $u=v$인 경우이므로 $(u,v)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$가 된다.

따라서, 점 (u,v) 자취의 길이는 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$이고, $v\geq u>0$인 경우 $u\geq v>0$에서와 같은 방법으로 $(u,v)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$에서부터 $(u,v)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$까지 해서 자취의 길이는 $\frac{\pi}{12}$가 되고 위와 같은 형태로 각 사분면 마다 한 번씩 나타나게 되므로 전체 곡선의 길이의 합은 $8\times\frac{\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}$이다.

■ 채점기준

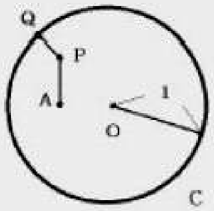
(10점) $\overline{\mathrm{FF'}}$의 값이 $\sqrt{2}$ 이하인 점 (u,v)의 조건을 올바르게 유도할 수 있다.

(5점) 곡선의 길이의 합을 올바르게 유도할 수 있다.

2015학년도 이화여자대학교 논술기출

※ 다음을 읽고 논제에 답하시오.

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C의 내부에 주어진 한 점 A와 중심 O사이의 거리는 $\overline{AO}=a(0<a<1)$이다. 임의의 점 P에 대하여 원 C 위의 점들 중 P와 가장 가까운 점을 Q라 할 때 아래 물음에 답하시오. [30점]



논제 1-1

점 P가 원 C의 내부에 있고 양수 b에 대하여 $\overline{AP}-\overline{PQ}=b$를 만족할 때 점 P의 자취를 구하시오.

2019학년도 서강대학교 논술기출

[문제]

좌표평면 위의 점 P(8,1)을 지나고 기울기가 음수인 직선 중에서 x축, y축과 만나는 두 점 사이의 거리를 최소로 하는 직선을 l이라 하자. 이때 직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 한다. 제시문 [가]~[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【3-2】 두 점 A, B와 원점 O로 이루어진 삼각형 OAB의 내접원의 중심 Q의 좌표를 구하시오. 또한 원점 O를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 삼각형 OAB의 외접원과 만나는 두 점 중 원점이 아닌 점 C의 좌표를 구하시오.

【3-3】 문제 【3-2】에서 구한 점 Q와 삼각형 OAB 또는 그 내부에 있는 점 R에 대하여 벡터 $\overrightarrow{QR}$과 벡터 $\vec{w}=(-1,-2)$의 내적의 최댓값을 구하시오.

【3-4】 문제 【3-2】에서 구한 점 C의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하자. 삼각형 OAB 또는 그 내부에 있는 점 (x, y)에 대하여 $(x-x_1)^2+4(y-y_1)^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오.

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY

자 연 계

수 험 번 호										
5			9	5	3					

주민등록번호 앞6자리 (예:970612)

연 습 용

모 집 단 위

성 명

※ 유 의 사 항

1. 답안은 반드시 과목별 지정 답안영역에 작성해야 합니다.
2. 과학문제 선택과목을 반드시 마킹해야 합니다.
3. 답안이 작성영역을 벗어난 경우 감점처리 될 수 있습니다.
4. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다. 인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계 없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

수학 1번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

수학 2번 (반드시 해당문제와 일치해야 함)

2020학년도 모의논술

이 줄 아래에는 답안을 작성하지 마십시오.

이화여자대학교

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OP}}$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=1-\overline{\mathrm{OP}}$이고, 주어진 $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{PQ}}=b$와 연립하면,
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{OP}}=b+1$이므로 점 P는 점 A, O를 초점으로 하고 장축의 길이가 $b+1$인 타원이 됩니다.

서강대학교 논술기출