No Spoiler

Safety Page

ZETA 모의평가 정답 및 해설

|| 정답 ||

01	④	**02**	③	**03**	④	**04**	②	**05**	③
06	④	**07**	①	**08**	⑤	**09**	③	**10**	①
11	②	**12**	③	**13**	⑤	**14**	①	**15**	②
16	⑤	**17**	④	**18**	③	**19**	②	**20**	①
21	①	**22**	56	**23**	89	**24**	17	**25**	35
26	617	**27**	91	**28**	82	**29**	60	**30**	123

|| 해설 ||

01. 정답) ④

$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times1+2\times(-3)=-2.$

02. 정답) ③

$$\lim_{x\to0}\frac{x(8^x-1)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot x\ln8}{\frac{1}{2}x^2}=6\ln2.$$

03. 정답) ④

$f'(x)=6e^{2x-3}$이므로 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=6.$

04. 정답) ②

$\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}^2$

$=\{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)\}^2+4\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{49}{144}$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{12}$이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}.$

05. 정답) ③

$(x-2)^6(x+2)^6=(x^2-4)^6$이고, 이항정리를 이용하면 x^8의 항은 $(x^2)^4\times(-4)^2\times{}_6\mathrm{C}_2=240x^8.$

06. 정답) ④

주어진 극한이 수렴하려면 $g(1)=3$이어야 한다.

$f(3)=1$이므로 $g(1)=3$임을 알 수 있다.

$f'(x)=(x^2-3x+2)e^{x-3}$이므로 $f'(3)=2$이고,

따라서 $g'(1)=\frac{1}{2}$이다.

$g(x)$는 미분가능하므로 $h(x)=xg(x)$ 또한 미분가능하고, $h'(x)=xg'(x)+g(x)$이다.

$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{h(x)-3}{x-1}=h'(1)=g'(1)+g(1)=\frac{7}{2}.$

07. 정답) ①

정사각형의 한 변의 길이를 $2x$라 하자. 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(2x,\ x)$가 되므로 $x^2=4x+12$, $(x-6)(x+2)=0$, $x=6$.

따라서 정사각형의 한 변의 길이는 12.

08. 정답) ⑤

양변을 x에 대하여 미분하면

$(xy'+y)\cos xy=\frac{xy'-y}{x^2}\sec^2\frac{y}{x}$

여기에 $\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$를 대입하면

$\left(2y'+\frac{\pi}{2}\right)\cos\pi=\frac{2y'-\frac{\pi}{2}}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}$

$-4y'-\pi=2y'-\frac{\pi}{2}$, $6y'=-\frac{\pi}{2}$, $y'=-\frac{\pi}{12}$.

09. 정답) ③

이항분포를 정규분포로 근사하면

$X\sim\mathrm{N}\left(10,\ \frac{10(n-1)}{n}\right)$이다.

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\mathrm{E}(X)^2=\frac{10(n-1)}{n}+100$,

$\frac{1}{10}\mathrm{E}(X^2)=\frac{n-1}{n}+10=\frac{11n-1}{n}$이다.

자연수 n에 대하여 n과 $11n-1$은 서로소이므로

$p+q=n+(11n-1)=12n-1=275$, $n=23$.

ZETA 모의평가 정답 및 해설

10. 정답) ① [실수 주의]

[출제 포인트] 범위가 주어진 그래프의 교점

〔Comment〕 호환이 되지 않는 두 그래프(예: $y=\sin x$와 $y=2x$)의 교점의 개수를 구할 때는 교점이 있을 수 있는 범위를 찾는 것이 가장 중요하다.

$\log_2 16 = 4$이고 $4\sin 16\pi = 0$이다.

자연수 $n < 8$에 대하여 구간 $(2n,\ 2n+1]$에서 두 곡선은 두 점에서만 만난다. 이때 $x \geq 16$이면 두 곡선은 만나지 않고, 두 곡선은 $x=1$에서 만나므로 구하는 교점의 개수는 15.

11. 정답) ②

[출제 포인트] 입체도형의 부피

〔Comment〕 적당한 직선 축을 정하여 입체도형을 그 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 식으로 나타내고, 그 축에 해당하는 변수로 적분한다.

평면 $x=t$로 입체도형 V를 자른 단면의 밑변의 길이는 $\frac{1}{2}te^{2t}$이고 높이는 $(t+2)e^{-t}$이므로 그 넓이는 $\frac{1}{2}t(t+2)e^{t}$이다.

구하는 부피는 $\int_0^1 \frac{1}{2}t(t+2)e^t dt = \frac{1}{2}\left[t^2e^t\right]_0^1 = \frac{1}{2}e$.

12. 정답) ③ [신유형]

[출제 포인트] 함수의 그래프의 점대칭

〔Comment〕 점대칭을 이용하지 않아도 풀 수는 있지만, 점대칭을 안다면 훨씬 더 빠르게 해결할 수 있다. 그래프의 점대칭은 출제자가 쉽게 생각해낼 수 있는 성질이므로 꼭 알아두길 바란다.

$f(\pi-x)+f(\pi+x)=2$는 함수 $y=f(x)$가 점 $(\pi,\ 1)$에 대칭임을 의미한다.

$y=\sin x$는 오직 $(n\pi,\ 0)$에 대해서만 대칭이다. (단, n은 정수) 따라서 k는 정수이다. $f(\pi)=1$이므로 $2k^2-k-20=1$, $(2k-7)(k+3)=0$, $k=-3$.

따라서 $f(x)=-3\sin(-3x)+1$의 최댓값은 4.

다른 풀이)

$f(\pi)=1$에서 $k\sin k\pi + 2k^2 - k - 20 = 1$. … (ㄱ)

$k \neq 0$임을 알 수 있다.

$f'(x)=k^2\cos kx$, $-f'(\pi-x)+f'(\pi+x)=0$이므로 $x=\pi$를 대입하면 $f'(0)=f'(2\pi)$.

$k^2 = k^2\cos 2k\pi$인데 $k\neq 0$이므로 $\cos 2k\pi = 1$.

$\cos 2k\pi = 1-2\sin^2 k\pi$에서 $\sin k\pi = 0$.

(ㄱ)에 대입하면 $2k^2-k-21=0$, $(2k-7)(k+3)=0$, $k=-3$ $(\because \sin k\pi = 0)$.

따라서 $f(x)=-3\sin(-3x)+1$의 최댓값은 4.

13. 정답) ⑤

[출제 포인트 ①] 매개변수함수의 제대로 된 이해

〔Comment〕 매개변수로 나타낸 함수에서 실제로 좌표평면에 드러나는 것은 매개변수가 아닌 x와 y값이다.

[출제 포인트 ②] 적분 해결의 방법

〔Comment〕 되도록이면 최대한으로 식을 정리하는 것이 적분 해결에 더 유리하다. 치환적분을 할 때는 적분구간 변경에 유의할 것!

$kt^3+3t^2=1$, $kt^3-3t^2=-\dfrac{1}{2}$에서

$6t^2=\dfrac{3}{2}$, $t=\dfrac{1}{2}$ $(\because 0<t<1)$이고,

$\dfrac{1}{8}k+\dfrac{3}{4}=1$, $k=2$이다.

$\dfrac{dx}{dt}=6t^2+6t$, $\dfrac{dy}{dt}=6t^2-6t$이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(6t^2+6t)^2+(6t^2-6t)^2}=6\sqrt{2}\,t\sqrt{t^2+1}$$ 이다.

$t^2+1=s$라 하면 $2tdt=ds$이므로

$$6\sqrt{2}\int_0^1 t\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$=3\sqrt{2}\int_1^2\sqrt{s}\,ds=3\sqrt{2}\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=8-2\sqrt{2}.$$

14. 정답) ① [실수 주의]

[출제 포인트 ①] 정규분포의 제대로 된 이해

〔Comment〕 가끔 정규분포 문제가 표준적인 형태를 벗어나는 경우가 있는데, 이때 정규분포의 개념을 잘 알지 못하면 당황할 수 있다.

[출제 포인트 ②] 조건 제대로 살피기

〔Comment〕 1시간과 1초를 구분할 수 없는 사람은 없을 것이다. 다만 제대로 읽지 못할 수 있을 뿐.

Wi-Fi 라우터의 1초간 평균 연결 속도를 확률변수 X라 하면 $X\sim\mathrm{N}(900,\ 120^2)$이다.

켜 놓은 지 3시간에서 4시간 사이의 평균 연결 속도를 $\overline{X}$라 할 때, $\overline{X}$는 1시간, 즉 3600초 동안을 표본으로 하는 표본평균이므로 $\overline{X}\sim\mathrm{N}(900,\ 2^2)$.

조건을 만족하려면 $\dfrac{3m+\overline{X}}{4}\le m-1$이므로

$\overline{X}\le m-4$이다. 따라서 $f(m)=\mathrm{P}(\overline{X}\le m-4)$.

$f(900)=\mathrm{P}(\overline{X}\le 896)=\mathrm{P}(Z\le -2)=0.0228$,

$f(901)=\mathrm{P}(\overline{X}\le 897)=\mathrm{P}(Z\le -1.5)=0.0668$.

$\therefore\ f(900)+f(901)=0.0228+0.0668=0.0896$.

15. 정답) ② [고난도]

[출제 포인트] 참신한 발상

〔Comment〕 2019를 2015개의 자연수로 나누는 것을 좋아할 사람은 없을 것이다. 직면한 문제가 너무 어렵다면 돌아갈 방법을 찾는 것이 최선책이다.

구하려 하는 분할에 1이 최소로 들어가려면 2가 최대한 많이 나와야 한다. 이러한 경우는 (2011개의 1)+(4개의 2)로 나누는 경우이다. 따라서 구하는 분할에는 1이 적어도 2011개 있다. 이를 제외하고 생각하면 $P(2019,\ 2015)$는 $P(8,\ 4)$와 같다.

$$\begin{aligned}8&=5+1+1+1\\&=4+2+1+1\\&=3+3+1+1\\&=3+2+2+1\\&=2+2+2+2\end{aligned}$$

와 같이 $P(2019,\ 2015)=P(8,\ 4)=5$이다. 이 5개의 분할 중 1이 짝수 개 있는 것은 위의 분할에서 1이 홀수 개 있다는 것과 같으므로 조건을 만족하는 분할의 개수는 2이다. 구하는 확률은 $\dfrac{2}{5}$.

16. 정답) ⑤ [신유형]

[출제 포인트] 익숙한 형태

〔Comment〕 수능은 빠른 시간 안에 정확하게 문제를 풀어내는 능력을 측정한다. 익숙한 형태를 빠르게 캐치하는 능력이 필요하다.

$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}$은 점 P와 점 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ 0)$ 사이의 거리이고, 마찬가지로 $\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-3)^2}$은 점 P와 점 $\mathrm{B}(-2,\ 0,\ 3)$ 사이의 거리이다.

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$가 최소가 되는 것은 점 P가 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위에 있는 것이므로, 점 P의 자취는 $\overline{\mathrm{AB}}$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{19}$가 구하는 자취의 길이이다.

17. 정답) ④ [신유형]

[출제 포인트] 복잡한 치환적분과 부분적분

〔Comment〕 치환적분을 할 때, 도함수가 이미 적분 안쪽에 곱해져 있는 경우(예: $\sin x\cos^2 x$)를 제외하면 치환당하는 문자에 대해 정리하는 것이 주로 편하다.

$t=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$라 놓으면 $t^2=\dfrac{1-x}{x}$이고,

$t^2x=1-x$에서 $x=\dfrac{1}{t^2+1}$이므로

$dx=-\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}dt$이다. 곧

$\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx=-\int\boxed{\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}}dt$이다. 따라서

적분구간 $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$에 대하여 $1\ge t\ge 0$이므로

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx=\int_0^1\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}dt$이다.

$f(t)=t,\ g'(t)=\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}$라 놓아 부분적분

$\displaystyle\int f(t)g'(t)dt=f(t)g(t)-\int f'(t)g(t)dt$을 이용하면

$\displaystyle\int\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}dt=t\times\left(-\frac{1}{t^2+1}\right)+\int\boxed{\frac{1}{t^2+1}}dt$이다.

따라서 적분구간 $0\le t\le 1$에 대하여

$\displaystyle\int_0^1\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}dt=\boxed{-\frac{1}{2}}+\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt$이다.

이때 $t=\tan\theta$라 하면 $dt=\sec^2\theta d\theta$에서

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\boxed{\frac{\pi}{4}}$이므로

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$이다.

$P(t)=\dfrac{2t^2}{(t^2+1)^2},\ Q(t)=\dfrac{1}{t^2+1},\ r=-\dfrac{1}{2},$

$s=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$P(1)+Q(1)+r+\dfrac{s}{\pi}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}.$

18. 정답) ③ [고난도] [실수 주의]

[출제 포인트] 경우의 수 세기

〔Comment〕 경우의 수를 셀 때는 중복되거나 빠뜨리는 것 없이 철저하게 세도록 주의해야 한다. 또한 평소에 한 문제를 여러 방법으로 푸는 습관을 들임으로써 경우의 수 문제를 푸는 여러 방법을 익히는 것도 중요하다.

조건 (가)와 (다)를 만족하면서 (나)를 만족하지 않는 함수 f의 개수를 구해 보자.

i) '더'는 Y의 원소이고 '초'는 그렇지 않은 경우
일단 $f(ㅊ) \neq ㅗ$이고, $f(ㅗ) \neq ㅊ$이다.
이때 $f(ㄷ) = ㅓ$이며 $f(ㅓ) \neq ㄷ$인 경우를 생각하자.
$f(ㅊ) = ㅏ$이어야 하며 $f(ㄴ) = ㅓ$이므로 자음의 함숫값은 정해진다.
또한 $f(ㅓ) = ㄴ$일 때 $f(ㅗ)$는 ㄷ으로 정해지며, $f(ㅓ) = ㅊ$일 때 $f(ㅗ)$는 ㄴ 또는 ㄷ이므로 이러한 경우는 3가지이다.
$f(ㄷ) \neq ㅓ$이고 $f(ㅓ) = ㄷ$인 경우도 3가지이다.
$f(ㄷ) \neq ㅓ$이고 $f(ㅓ) \neq ㄷ$인 경우는 자음과 모음의 함숫값이 모두 정해지므로 1가지이다.
따라서 i의 경우의 수는 $3 + 3 + 1 = 7$이다.

ii) '초'는 Y의 원소이고 '더'는 그렇지 않은 경우
i에서의 경우와 같이 경우의 수는 7이다.

iii) '더'와 '초' 모두 Y의 원소가 아닌 경우
$f(ㄷ) \neq ㅓ$, $f(ㅓ) \neq ㄷ$, $f(ㅊ) \neq ㅗ$, $f(ㅗ) \neq ㅊ$이다.
자음의 함숫값을 정하는 경우의 수가 3이고, 모음의 함숫값을 정하는 경우의 수도 3이므로 iii의 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$이다.

조건 (가)와 (다)를 만족하는 함수 f의 개수는 $3! \times 3! = 36$이므로 i~iii에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $36 - (7 + 7 + 9) = 13$이다.

다른 풀이)
다음과 같이 경우를 나누어 보자.

i) $f(ㄷ) = ㅓ$, $f(ㅊ) = ㅗ$
$f(ㄴ) = ㅏ$이고, 모음의 함숫값을 정하는 경우의 수는 6이다.

ii) $f(ㄷ) = ㅓ$, $f(ㅊ) \neq ㅗ$, $f(ㅗ) = ㅊ$
$f(ㅊ) = ㅏ$, $f(ㄴ) = ㅗ$이고, 모음의 함숫값을 정하는 경우의 수는 2이다.

iii) $f(ㄷ) \neq ㅓ$, $f(ㅊ) = ㅗ$, $f(ㅓ) = ㄷ$
ii)에서의 경우와 같이 경우의 수는 2이다.

iv) $f(ㄷ) \neq ㅓ$, $f(ㅊ) \neq ㅗ$, $f(ㅓ) = ㄷ$, $f(ㅗ) = ㅊ$
$f(ㅏ) = ㄴ$이고, 자음의 함숫값을 정하는 경우의 수는 3이다.

i~iv에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $6 + 2 + 2 + 3 = 13$이다.

19. 정답) ② [고난도] [신유형]

[출제 포인트 ①] 등비수열의 합

〔Comment〕 모의고사에 잠깐 안 나왔다고 벌써 까먹은 건 아니리라 믿는다. 무한등비수열의 합 공식 뿐만 아니라 등비수열의 부분합 공식도 까먹어서는 안 된다.

[출제 포인트 ②] 자연상수 e의 정의

〔Comment〕 e의 정의를 절대 까먹지 말자. 까먹었을 시에 시험에서 허비하는 시간이 너무나도 아깝다. 이 문제의 풀이법은, 선지에 e가 있는 것을 확인하고, e의 정의를 생각해낸 후, 구한 식을 그에 맞게 변형하는 것이다.

$\dfrac{\overline{\mathrm{AP}_1}}{\overline{\mathrm{AP}_0}}=\cos\dfrac{1}{n}$ 이므로 $S_n(1)$, $S_n(2)$, $S_n(3)$, $\cdots$은

공비가 $\cos^2\dfrac{1}{n}$인 등비수열이다.

$\overline{\mathrm{AP}_1}=2\cos\dfrac{1}{n}$이고, $\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}=2\sin\dfrac{1}{n}$이므로

$S_n(1)=2\sin\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n}$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}S_n(k)$

$$=\frac{2\sin\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n}\left\{1-\left(\cos^2\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\right\}}{1-\cos^2\dfrac{1}{n}}$$

$$=\frac{2\cos\dfrac{1}{n}}{\sin\dfrac{1}{n}}\times\left\{1-\left(\cos^2\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\right\}$$ 이다.

$\dfrac{1}{n}=x$라 하면 $n\to\infty$일 때 $x\to0+$이다.

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}S_n(k)$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{2x\cos x\left\{1-\left(\cos^2x\right)^{\frac{1}{x^2}}\right\}}{\sin x}$$

$$=2\times\lim_{x\to0+}\left\{1-\left(1-\sin^2x\right)^{\frac{1}{x^2}}\right\}$$

$$=2\times\lim_{x\to0+}\left\{1-\left(1-\sin^2x\right)^{\frac{1}{-\sin^2x}\times\left(-\frac{\sin^2x}{x^2}\right)}\right\}$$

$$=2\times\left(1-e^{-1}\right)=2-2e^{-1}.$$

20. 정답) ① [실수 주의]

[출제 포인트 ①] 직선과 평면이 이루는 각의 크기

〔Comment〕 직선과 평면이 이루는 각의 크기를 구할 때, 나오는 값은 $\cos$값이 아니라 $\sin$값임에 유의하자. 스스로를 낚아버리기 쉽다.

[출제 포인트 ②] 공간에서의 진위판단

〔Comment〕 아래에 쓰인 풀이는 이해를 돕기 위한 설명이지, 절대 수능 시험장에서 이와 같이 풀어야겠다고 생각해서는 안 된다.
공간에서의 진위판단은 증명이 아니라 직관이다. 직관으로 풀어야 함을 보여주는 한 예시가 2018학년도 수능 20번(세 점과 평면, $d(\alpha)$)이다.

~~[출제 포인트 ③] 국룰 어거가~~

~~〔Comment〕 ???~~

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ -1,\ 1)$이고, 평면 α의 법선벡터가 $\vec{n}=(2,\ 3,\ -6)$이므로 직선 AB와 평면 α가 이루는 예각을 ϕ라 할 때,

$\sin\phi=\dfrac{|1\times2+(-1)\times3+1\times(-6)|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다. 즉 $\cos\phi=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이다.

점 A에서 평면 α에 이르는 거리는

$\dfrac{|2\times2+3\times3-6\times4+32|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=3$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=3\times\dfrac{1}{\sin\phi}=3\sqrt{3}$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BP}}=1$에서 $\angle\mathrm{QAP}=\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{\pi}{6}$ 이고,

점 Q에서 직선 AP에 이르는 거리는

$3\sqrt{3}\times\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이다. (ㄱ. 참)

평면 α 위의 점 $\mathrm{R}(\neq\mathrm{Q})$에 대하여 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때,
$\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}$에서 $\angle\mathrm{AQR}$이 최소가 될 때는 $\angle\mathrm{AQR}=\phi$가 될 때이므로 $\angle\mathrm{AQR}\geq\phi$이다. 반직선 AP가 평면 α와 만나지 않는다고 하자. $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$이 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 평면 α로의 정사영과 방향이 정반대이도록 점 R을 움직이면 $\angle\mathrm{AQR}\leq\angle\mathrm{QAP}=\dfrac{\pi}{6}$인데,

$\sin\phi>\sin\dfrac{\pi}{6}$에서 $\phi>\dfrac{\pi}{6}$이므로 모순이다. 따라서 반직선 AP는 평면 α와 반드시 만난다. (ㄴ. 거짓)

직선 AP와 평면 α의 교점을 S라 할 때,

$\sin\phi>\sin\dfrac{\pi}{3}$에서 $\phi>\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\dfrac{\pi}{6}+\angle\mathrm{AQS}>\dfrac{\pi}{2}$임을 알 수 있다. 이에 의하여

$\theta=\pi-\dfrac{\pi}{6}-\angle\mathrm{AQS}$이고, $\cos\theta$가 최대이려면 θ는 최소여야 하고, 이는 $\angle\mathrm{AQS}$가 최대여야 함을 의미한다. $\overline{\mathrm{RS}}$ 위에 점 Q가 놓이도록 점 R을 움직이면 $\angle\mathrm{AQS}=\pi-\angle\mathrm{AQR}\leq\pi-\phi$이므로 $\angle\mathrm{AQS}$의 최댓값은 $\pi-\phi$임을 알 수 있다.

$\therefore\ \cos\theta\leq\cos\left(\phi-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\phi\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin\phi\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. (ㄷ. 거짓)

21. 정답) ① [고난도]

[출제 포인트 ①] 미분방정식의 해결

〔Comment〕 미분방정식은 자주 출제되는 유형은 아니지만, 풀이법을 알아두는 것도 좋다. 모의고사에서 나오는 미분방정식은 대부분이 미분계수의 정의를 이용하면 풀린다.

[출제 포인트 ②] 출제의도 생각하기

〔Comment〕 구해야 할 적분 $x\{f(x)+1\}$에서 좋아라 하고 x를 분리해서 미리 적분하면 이후에 $g(x)$를 구한 후 적분하다가 막힐 것이다. 이렇게 생각하자: 왜 $xf(x)$라 안 하고 굳이 잉크 더 들여서 $x\{f(x)+1\}$라 했겠는가? 모의고사 문제의 가장 중요한 원칙 중 하나가 "필요 없는 것은 써 놓지 않는다"이다.

$g(x^2+y^2)=\dfrac{g(x^2)+g(y^2)}{1+g(x^2)g(y^2)}$에서 양수 $x,\ y$에 대하여 $g(x+y)=\dfrac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}$. 또한 $g(0)=0$이다.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{y\to0}\frac{g(x+y)-g(x)}{y} \\ &= \lim_{y\to0}\frac{\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}-g(x)}{y} \\ &= \lim_{y\to0}\frac{g(y)-g(0)}{y}\times\lim_{y\to0}\frac{1-g(x)^2}{1+g(x)g(y)} \\ &= 1-g(x)^2 \end{aligned}$$

이고, $-1<g(x)<1$에서 $\dfrac{g'(x)}{1-g(x)^2}=1$.

$g(x)=t$라 하면 $g'(x)dx=dt$에서

$$\begin{aligned} x &= \int\frac{g'(x)}{1-g(x)^2}dx=\int\frac{1}{1-t^2}dt \\ &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C \end{aligned}$$

이다. (단, C는 적분상수) $x=0,\ t=0$을 대입하면 $C=0$이고, 주어진 조건에 의하여 $-1<g(x)<1$이므로 $x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+g(x)}{1-g(x)}$. 이를 정리하면 $g(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

$x^2=s$라 하면 $2xdx=ds$에서

$$\int_0^1 x\{f(x)+1\}dx=\int_0^1 x\{g(x^2)+1\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\{g(s)+1\}ds=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2e^{2s}}{e^{2s}+1}ds$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{2s}+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}.$$

22. 정답) 56

$${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56.$$

23. 정답) 89 [신유형]

[출제 포인트] 타원의 장축, 단축 및 초점거리

〔Comment〕 초점거리의 절반의 제곱과 단축의 길이의 절반의 제곱은 장축의 길이의 절반의 제곱과 같다. 또한 타원의 꼭짓점이 무엇인지 까먹은 이들에게는 좋은 복습이 될 것이다.

타원의 장축의 길이의 절반을 p, 타원의 두 초점 사이의 거리의 절반을 q라 하자. 타원의 한 초점과 장축 위의 한 꼭짓점 사이의 거리가 될 수 있는 수는 $p-q$와 $p+q$이다. 또한, 타원의 한 초점과 단축 위의 한 꼭짓점 사이의 거리는 p이다. 따라서 주어진 집합의 세 수는 등차수열을 이루어야 하며, $k=7$이다.

$p=7,\ q=4$에서, $a=49,\ b=33$ 또는 $a=33,\ b=49$이므로 $a+b+k=82+7=89$.

24. 정답) 17

[출제 포인트] 주사위 두 개

〔Comment〕 주사위 두 개를 던졌을 때는 표를 만드는 것이 가장 간단하다.

아래 표와 같이 두 주사위를 던졌을 때 두 수의 곱이 6의 배수인 경우는 15가지이다.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$. $\therefore\ p+q=17$.

25. 정답) 35 [신유형]

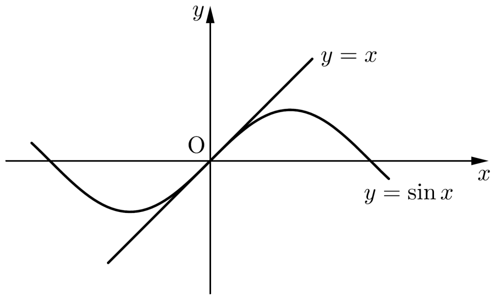
[출제 포인트] 방정식과 그래프

〔Comment〕 방정식을 해결하기 어려울 때 이용하는 것이 그래프이다. 특히 삼차함수나 $\sin x$와 같이 자주 보는 함수의 변곡접선은 제대로 알아 놓자.

$\sin\left(\sin 2x+\frac{1}{2}\right)=\sin 2x+\frac{1}{2}$ 인데,

아래 그림과 같이 $\sin x=x$의 근은 $x=0$ 뿐이므로

$\sin 2x+\frac{1}{2}=0$, $\sin 2x=-\frac{1}{2}$.



$2x=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi$임에서 방정식을 만족하는 x의 값 중 가장 큰 것은 $\frac{23}{12}\pi$.

$\therefore\ p+q=35$.

26. 정답) 617

4일간 태어난 신생아 수가 126명이므로 4일간의 평균은 31.5명이다. 따라서 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$31.5-2.58\times\frac{4}{\sqrt{4}}\le m\le 31.5+2.58\times\frac{4}{\sqrt{4}}$,

$26.34\le m\le 36.66$이다.

그 다음 16일간 태어난 신생아 수가 n명일 때, 16일간의 평균은 $\frac{n}{16}$명이다. 따라서 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\frac{n}{16}-1.96\times\frac{4}{\sqrt{16}}\le m\le\frac{n}{16}+1.96\times\frac{4}{\sqrt{16}}$,

$\frac{n}{16}-1.96\le m\le\frac{n}{16}+1.96$이다.

이 두 신뢰구간의 교집합이 존재해야 하므로

$36.66\ge\frac{n}{16}-1.96$, $\frac{n}{16}\le 38.62$, $n\le 617.92$.

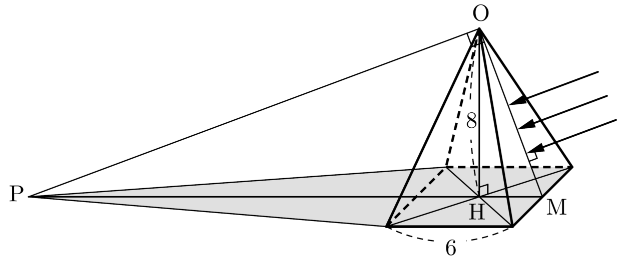
따라서 n의 최댓값은 617.

27. 정답) 91

[출제 포인트] 직선의 투영

〔Comment〕 직선을 직선인 빛에 투영하면 무조건 직선이다.

사각뿔의 밑면은 평행광선에 의해 평행이동하여 넓이가 그대로이다. 따라서 사각뿔은 다음 그림과 같은 그림자를 가진다.



위 그림과 같이, 평행광선에 수직인 옆면의 밑변의 중점을 M, 밑면의 중심을 H, 밑면의 꼭짓점이 아닌 사각뿔의 꼭짓점을 O, 점 O를 지나고 평행광선과 평행한 직선이 직선 MH와 만나는 점을 P라 하자.

$\triangle\mathrm{OHM}\sim\triangle\mathrm{PHO}$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=8\times\frac{8}{3}=\frac{64}{3}$이고,

그림자의 삼각형 부분의 높이는 $\frac{64}{3}-3=\frac{55}{3}$이다.

따라서 그림자의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6\times\frac{55}{3}+6\times 6=55+36=91$.

28. 정답) 82 [고난도]

[출제 포인트 ①] 출제의도 생각하기

〔Comment〕 뜬금없는 함수, 조건, 또는 변수가 주어진다면 이는 힌트를 암시하는 것이다. 예를 들어, 함수 $g(x)$가 주어진 이유는 $f(x)+f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$가 상수임을 알려주고 싶어서이다.

[출제 포인트 ②] 치환적분

〔Comment〕 위에서 얻은 힌트를 이용해서 어떻게 치환할지 유추해 내야 한다. $f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$가 등장하는 것을 이용하면 $x=\frac{\pi}{3}-t$로 치환해보는 것을 생각할 수 있다.

$$f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\ln\left(1+\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)$$
$$=\ln\left(1+\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan x+\sqrt{3}(\sqrt{3}-\tan x)}{1+\sqrt{3}\tan x}\right)$$
$$=\ln 4-\ln(1+\sqrt{3}\tan x)=\ln 4-f(x)$$
$$\therefore\ g(x)=2x\ln 2.$$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left|x-\frac{\pi}{6}\right|f(x)dx$에서 $x=\frac{\pi}{3}-t$로 치환적분하면

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left|\frac{\pi}{6}-t\right|f\left(\frac{\pi}{3}-t\right)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left|x-\frac{\pi}{6}\right|f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)dx.$$

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left|x-\frac{\pi}{6}\right|f(x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left|x-\frac{\pi}{6}\right|\left\{f(x)+f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left|x-\frac{\pi}{6}\right|\ln 2\,dx=\frac{\pi^2}{36}\ln 2$$이다.

$$\therefore\ g\left(\frac{\pi}{10}\right)+\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=\frac{\pi}{5}\ln 2+\frac{\pi^2}{36}\ln 2,$$
$$360(p+q)=82.$$

29. 정답) 60 **[고난도] [신유형]**

[출제 포인트 ①] 타원의 정의

〔Comment〕 두 선분의 길이를 더한 값이 나올 때는 타원을 의심해볼 필요가 있다.

[출제 포인트 ②] 수선의 발 내리기

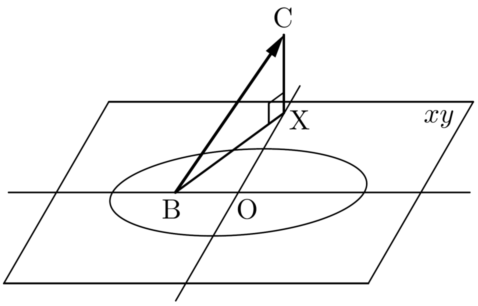
〔Comment〕 어떤 점이 평면 위에서 움직일 경우 거의 100%의 확률로 다른 어떤 점에서 그 평면에 수선의 발을 내려야 한다.

[출제 포인트 ③] 이차곡선의 접선

〔Comment〕 이차곡선에서의 최대·최소는 이차곡선의 정의를 이용하거나 접선의 기울기를 이용하는 경우가 대부분이다.

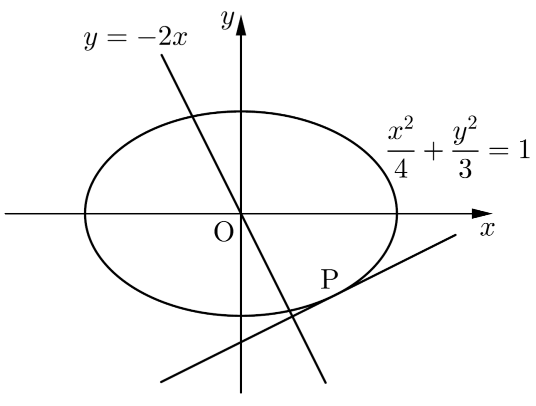
두 점 A, B는 모두 xy평면과 평면 α 위에 있다. 따라서 점 P가 그리는 도형은 xy평면 위에서 두 점 A, B를 두 초점으로 하고 장축의 길이가 4인 타원 C_1이고, 점 Q가 그리는 도형은 평면 α 위에서 두 점 A, B를 두 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원 C_2이다.

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 최소, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 최대이도록 하면 된다.



점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 $\mathrm{X}(0,\ 2,\ 0)$라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BX}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}}$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BX}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}})=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BX}}$이다.
$\overrightarrow{\mathrm{BX}}=(-1,\ 2,\ 0)$이므로 xy평면에서 직선 BX의 기울기는 -2이다.

이 상황을 좌표평면에 그리면 아래와 같다.



점 P에서 직선 $y=-2x$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{BX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{BX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}$가 최소가 되려면 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$는 방향이 $\overrightarrow{\mathrm{BX}}$와 반대이고 크기가 최대가 되어야 한다.

따라서 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이고, 타원의 방정식에서 음함수의 미분법을 이용하면

$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{4y}=\frac{1}{2}$이므로 $y=-\frac{3}{2}x$이고, 타원의 방정식에 대입하면 $\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x^2=1$에서 $x=1$이다. $(\because\ x>0)$

따라서 $\mathrm{P}\left(1,\ -\frac{3}{2}\right)$이다. $\overline{\mathrm{OH}}$의 길이는 점 P에서 직선 $y=\frac{1}{2}x$까지의 거리인 $\frac{|-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 최솟값은 $\sqrt{5}\times\frac{4}{\sqrt{5}}\times(-1)=-4$.

점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 Y라 하고, 점 Y에서 타원 C_2의 장축에 내린 수선의 발을 Y'라 한다. $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ 2,\ 2)$이고 타원 C_2의 장축의 방향벡터는 $(1,\ 0,\ 0)$이므로 $\cos\angle\mathrm{CBY}'=\frac{1}{3}$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{BY}'}=1$이다. 또한 평면 α의 법선벡터는 $(0,\ 1,\ 2)$이므로 $\sin\angle\mathrm{CBY}=\frac{6}{3\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$이다.

$\overline{\mathrm{BY}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$이고, $\overline{\mathrm{YY}'}=\frac{2}{\sqrt{5}}$이므로 평면 α를 좌표평면으로 놓으면 직선 BY의 기울기는 $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ (또는 $\frac{2}{\sqrt{5}}$, 어느 것이든 무방하다)라 놓을 수 있다.

이번에는 타원의 방정식이 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$이므로 이전과 같은 방법으로 계산하면 $\frac{dy}{dx}=-\frac{15x}{16y}=\frac{\sqrt{5}}{2}$에서 $y=-\frac{3\sqrt{5}}{8}x$이고, $\frac{1}{16}x^2+\frac{3}{64}x^2=1$에서 $x=\frac{8}{\sqrt{7}}$이다. $(\because\ x>0)$

따라서 $\mathrm{Q}\left(\frac{8}{\sqrt{7}},\ -\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)$이므로 점 Q에서 직선 $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$까지의 거리를 구하면 $\frac{2\sqrt{35}}{3}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최댓값은 $\frac{3}{\sqrt{5}}\times\frac{2\sqrt{35}}{3}=2\sqrt{7}$.

$M=4+2\sqrt{7}$에서 $M^2=44+16\sqrt{7}$, $p+q=60$.

30. 정답) 123 [고난도] [신유형]

[출제 포인트 ①] 식이 의미하는 바

〔Comment〕 식이 기하적으로 어떤 의미를 가지는지 이해하는 것이 문제의 핵심인 경우가 많다. 한 예가 점대칭 및 선대칭이고, 다른 예로는 두 점을 잇는 직선의 기울기와 같은 것이 있다.

[출제 포인트 ②] 교점의 개수

〔Comment〕 멈춰있는 그래프와 움직이는 그래프의 교점의 개수를 셀 때 가장 중요한 것은 경계성이 나타나는 경우이다. 이 문제에서는 캐치하기 어려운 부분이 $y=f(x)$의 극점이 $y=nx$ 위에 있을 때의 경계성일 것이다.

$n=0$이면 $g(t)=0$으로 일정하므로 조건 (가)가 성립하지 않는다. 따라서 $n \neq 0$.

$f(x)=a$라 하면 $f(a)=na$이다. 즉, $g(t)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=nx$의 교점에서 y축에 수직으로 그은 직선들이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수이다. (단, 원점은 제외)

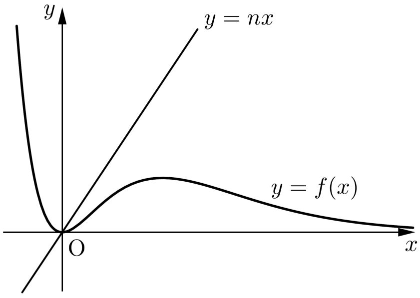
$g(t)$가 $y=f(x)$와 $y=nx$가 접할 때와 $y=nx$가 $y=f(x)$의 <u>원점이 아닌 극점</u>을 지날 때의 총 2가지 경우이다.

i) $f'(x)=t(-x^2+2x)e^{-x}$이므로 접점의 x좌표를 w라 놓으면 접선의 방정식은 $y=t(-w^2+2w)e^{-w}(x-w)+tw^2e^{-w}$에서 원점을 대입하면 $w=1$. $f'(1)=n$이므로 $\dfrac{t}{e}=n$에서 $t=en$.

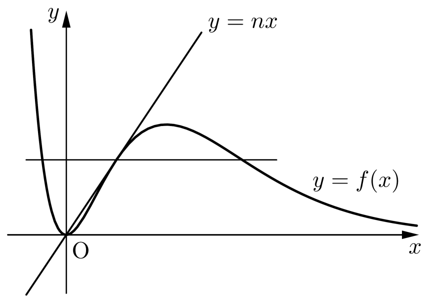
ii) 곡선 $y=f(x)$의 <u>원점이 아닌 극점</u>은 $\left(2,\ \dfrac{4t}{e^2}\right)$이므로 $n=\dfrac{2t}{e^2}$에서 $t=\dfrac{e^2}{2}n$.

이제 $n>0$인 각 경우에 대하여 함수 $g(t)$의 함숫값을 구해 보자.

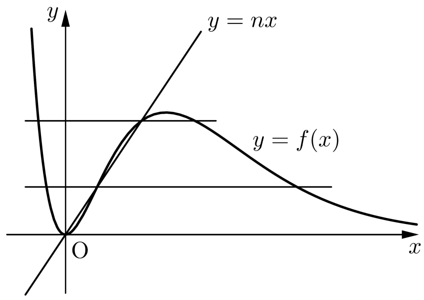
a) $0<t<en$
그림과 같이
$g(t)=0$이다.



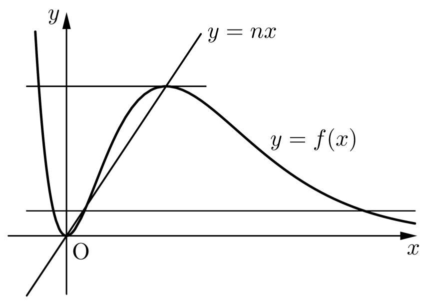
b) $t=en$
그림과 같이
$g(en)=3$이다.



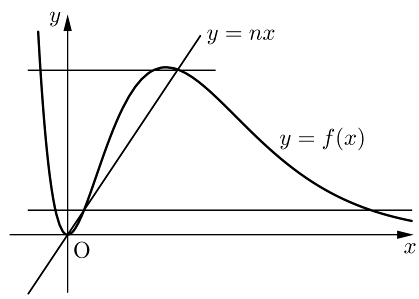
c) $en<t<\dfrac{1}{2}e^2n$
그림과 같이
$g(t)=6$이다.



d) $t=\dfrac{1}{2}e^2n$
그림과 같이
$g\left(\dfrac{1}{2}e^2n\right)=5$이다.



e) $t>\dfrac{1}{2}e^2n$
그림과 같이
$g(t)=5$이다.



따라서 조건 (가)를 만족하는 $(n,\ \alpha)$의 쌍은 $(3,\ 3e)$와 $\left(5,\ \dfrac{5}{2}e^2\right)$이고, $n<0$일 때는 $(-3,\ -3e)$와 $\left(-5,\ -\dfrac{5}{2}e^2\right)$이다. 각각의 경우 중 함수 $y=7\alpha x^2e^{-x}$의 극값 $\dfrac{28\alpha}{e^2}$가 $|n|\alpha$보다 큰 것은 $\alpha>0$에서는 $28>en^2$, $\alpha<0$에서는 $28<en^2$을 의미하므로 $(3,\ 3e)$와 $\left(-5,\ -\dfrac{5}{2}e^2\right)$의 경우만이 가능하다. 즉 $pe^q=12e\times 10e^2=120e^3$이므로 $p+q=123$.

ZETA 모의평가 정답 및 해설

|| 총평 ||

<예상 등급컷 (1~3등급)>

1등급컷 - 89점

2등급컷 - 82점

3등급컷 - 73점

<킬러 (21, 29, 30)> 난도: 중

29번의 공간벡터 및 평면곡선 융합 문제를 제외하면, 21번의 함수방정식 문제와 30번의 합성함수 방정식 문제는 평이하여 킬러 문항의 전반적인 난도는 평이하다.

<준킬러 (14~20, 26~28)> 난도: 중상

14번 문항은 통계 문제답지 않게 상황이해가 어렵고, 15번 문항은 분할에 대한 새로운 접근방법이 낯설 수 있다. 16, 17, 20번 문항은 개념을 이해하고 있다면 수월하게 해결할 수 있다. 다만, 18번 문항의 경우 경우의 수를 중복하지 않고 세는 것이 까다로우며 19번 문항의 경우 식을 구하는 것은 쉬우나 극한값을 구하는 것은 어렵다.

26, 27번 문항은 개념을 이해하고 있다면 수월하게 해결할 수 있다. 다만, 28번 문항은 힌트를 이용하여 제시된 정적분을 구하는 것이 어려울 수 있다.

전반적으로 준킬러 문항의 난도는 평이하나, 그 편차가 심하다.

<비킬러 (1~13, 22~25)> 난도: 상

1~3번 문항은 단순히 계산하면 되므로 논외로 하자. 4번 문항의 경우 곱셈 공식 또는 이차방정식을 이용하는 과정이 4번 문항 치고는 까다롭다.

5~9번 문항은 어렵지 않게 해결할 수 있는데, 이 중 8번 문항은 이름값 치고는 계산이 까다롭다. 10번 문항의 경우 두 곡선의 위치관계를 파악하는 것이 까다로우며 이를 정확히 했다면 별 문제 없이 해결할 수 있다.

11번 문항은 그래프가 두 개 주어져 당황할 수 있으나 침착하게 문제 상황을 이해하면 의외로 간단하다. 12번 문항의 경우 함수방정식이 의미하는 바를 제대로 이해하고, 그래프에 적용하면 된다. 만약 이를 기하적으로 이해하지 못한다면 식으로써 풀어야 하는데, 이러면 상당히 복잡해진다. 13번 문항은 평이하다.

22번 문항은 전통적인 단순 계산이다. 23번 문항에서는 주어진 집합의 의미를 파악하는 것이 23번 문항 치고는 까다로웠다. 24번 문항은 일일이 확인하면 어렵지 않게 해결할 수 있다. 다만, 25번 문항은 3점 문항답지 않게 요구하는 발상이 난도 있다.

전반적으로 비킬러 문항의 난도는 평균 이상이며, 이로 인해 시험 초반 및 중반에 당황할 수 있다.