

2020년 연세대학교 자연2계열 논술고사 [수학]

시험시간:150분

문제 1

$f(x) = f^{<1>}(x)$, $(f \circ f)(x) = f^{<2>}(x)$, $(f \circ f \circ \dots \circ f)(x) = f^{<n>}(x)$ 라 하자. $f(x) = \ln x$, $f^{<0>}(x) = x$ 일 때, $\int \frac{f^{<n>}}{f^{<0>} f^{<1>} f^{<2>} \dots f^{<n-2>}} dx$ 를 $f^{<i>}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) 으로 나타내어라.

문제 2

원 $C: (x-a)^2 + y^2 = 1$ 에 대해 원점을 지나는 원 C 의 두 접선의 접점을 P, Q 라 하자. 원 C 와 두 점에서 만나는 직선과 원 C 의 교점을 점 A, B 라 하고, \overline{AB} 의 중점의 자취 L 의 길이를 l 이라 하자. $\angle POQ = \theta$ 일 때 l 을 θ 에 관해 표현하고 $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} l$ 의 값을 구하여라.

문제 3

연속함수 $f(x)$ 가 $|f'(x)| \leq 1$ 을 만족한다.

실수 a, b ($0 < b < 1$)에 대해 $I = \int_{-1}^{-b} \frac{f(a+x)}{x} dx + \int_b^1 \frac{f(a+x)}{x} dx$ 일 때, a, b 값에 관계 없이 $|I| \leq 2$ 임을 보여라.

문제 4

집합 $C = \left\{ (a, b) \mid \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b \geq 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b \geq 0 \right\}$ 에 대해 $ax + by \geq 0$ 을 만족하는 점 (x, y) 의 집합을 D 라 하자.

4-1) D 의 경계를 표현하라.

4-2) 집합 $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 에 대해 $S(B \cap C)$ 와 $S(B \cap D)$ 의 합을 구하여라. (단, $S(P \cap Q)$ 는 $P \cap Q$ 에 해당하는 영역의 넓이다.)

4-3) 집합 $E = \{(a, b) \mid (\cos\theta)a + (\sin\theta)b \geq 0, (\cos\omega)a + (\sin\omega)b \geq 0\} \left(0 < \theta < \omega < \frac{\pi}{2} \right)$ 에 대해 $ax + by \geq 0$ 을 만족하는 점 (x, y) 의 집합을 D' 이라 하자. D' 의 경계를 표현하라.