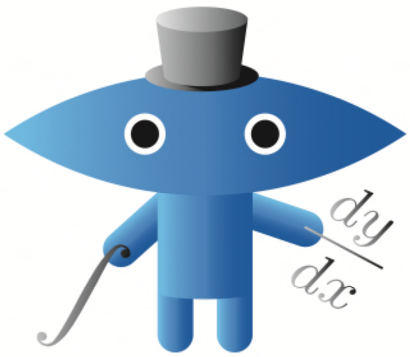
기출의 파급효과

미적분 II



저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 오르비에 출시하는 두 번째 전자책이네요. 작년에 EBS 선별과 칼럼으로 큰 사랑을 받고 기출의 파급효과 시리즈를 집필하기로 마음먹었습니다. 이까지 오는데 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 미적분 2 기출을 푸는데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 수능이 얼마 안 남은 이 시점, 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예시 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 ‘순서대로’ 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 기출에 대한 태도와 도구들을 바로 활용할 수 있도록 준킬러 이상급의 기출들을 본문 속 예시로 들었습니다. 20학년도 6월 평가원 경향과 해당 기출까지 반영되어 있습니다.

미적분 2 기출 중 평가원 21, 30번은 물론 오답률이 높은 문제들을 예시로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 더욱 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예시로 든 들어주는 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예시들을 ‘순서대로’ 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 21번, 29번, 30번을 풀 생각이 없어 과거의 21번, 29번, 30번을 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

최근 교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 19학년도 수능 29번의 경우 14학년도 사관학교 15번과 매우 유사하고 20학년도 6월 평가원 21번, 30번은 18년 10월 교육청 21번, 30번과 매우 유사합니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 현재 수능을 대비하기는 힘듭니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 그리고 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 본문과 함께 있는 예시 문제들은 미적분 2 교재의 경우 대략 80문제 정도입니다. 예시에 있는 문제 수만으로 부족함을 느끼실 분들을 위해 예시보다는 다소 쉬운 유제들도 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 충분히 넣었습니다. 미적분 2 교재의 경우 유제는 대략 120문제입니다. 본문 속 예시뿐만 아니라 유제들도 단순 단원별로 분리된 것이 아니라 기출에 대한 태도와 도구를 기준으로 분리되었습니다. 유제 120문제 중 30문제는 수학 가형 선택자들도 풀어볼 만한 수학 나형 미적분1 기출입니다.

4. 본문 속 예시해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다. 예시보다 다소 쉬운 유제들도 본문에서 배운 태도와 도구들과 key point를 comment로 달아 놓았습니다.

예시 해설은 단계별로 분리되어 있어 가독성이 좋아 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다. 유제 comment들은 문제의 핵심을 간략히 보여줍니다. 본문과 예시들을 잘 학습했다면 무리 없이 풀 수 있는 수준입니다.

하루에 예시를 포함한 Chapter 하나만 완료하고 유제 15문제만 푸세요! 이를 실천하면 미적분 2 교재를 모두 끝내는 데에 2주가 걸립니다. 이 교재를 최소 2번 이상 볼 수 있습니다.

수학 가형 4등급 초반이 1등급 컷 이상 받는 데 1달에서 2달 사이로 걸립니다.
약 파는 것 아닙니다. 과장된 광고를 극히 싫어하는 편입니다.

저도 18학년도 6월 평가원 때 3등급 받고 여름방학 때 이 책의 내용대로 기출을 학습하고 18학년도 9월 평가원, 18학년도 수능 1등급을 가볍게 받아냈습니다.

제 과외 학생은 19학년도 6월 평가원 때 4등급에 가까운 3등급이었으나 이 방법대로 1달간 기출을 학습하고 19학년도 수능 96점을 받아내었습니다.

수학 가형 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

간단한 교재 이용법

원활한 교재 이용을 위해 대단원, 중단원, 중소단원, 소단원 구분법을 소개하겠습니다.

대단원 제목입니다.

Chapter 1. 필수 도형 정리와 극한

대단원에 속한 중단원 제목입니다.

기본적인 도구

중단원에 속한 중소단원 제목입니다.

2. 극한 처리

중소단원에 속한 소단원 제목입니다.

(1) 기본 삼각함수, 초월함수 극한

위를 참고하여 학습하신다면 Chapter 내용이 더욱 유기적으로 연결될 것입니다. 헷갈린다면 Chapter를 순서대로 읽어나가셔도 전혀 문제가 없습니다.

원활한 교재 이용을 위해 예시, 예시해설, 유제, 유제 Comments 구분법을 소개하겠습니다.

본문과 함께 소개되는 예시입니다. 칼럼을 읽다 보면 중간중간에 예시들이 등장합니다.

11학년도 수능 28번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다.

모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고, $f(a)=0$, $\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k$ $(a>0, 0<k<1)$일 때, $\int_{a}^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은? [3점]

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2 ④ k ⑤ $2k$

본문과 함께 소개되는 예시해설입니다. 자세하고 본문에서 배운 도구와 태도를 일관적으로 적용합니다.

1. $f(2x)=2f(x)f'(x)$ 어디서 많이 보지 않았는가? 또 치환적분이다.

17년 9월 평가원 21번 조건 (가)처럼 정리하면 $f(2x)=(\{f(x)\}^2)'$

따라서 $\{f(x)\}^2$는 미분하기 쉬운 형태이다.

$f(a)=0$는 뭐 적분 상수 처리하려고 또 나오셨겠지.

본문 내용을 체화하기 위한 유제입니다.

Chapter 9 문제

9-1. 18학년도 9월 평가원 18번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, f(t))$ $(t>0)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. 모든 양수 t에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $e-2$ ② e ③ $e+2$ ④ $e+4$ ⑤ $e+6$

유제 문제에 대한 저자의 Comment입니다.

Chapter 9 문제 Comments

9-1. 18학년도 9월 평가원 18번

치환적분 꼴을 알아봐야 한다. 정신없이 치환적분을 하지 말고 무엇을 미분하면 원하는 꼴을 얻을 수 있는지 고민해 보자. 적분상수를 빼먹지 말자.

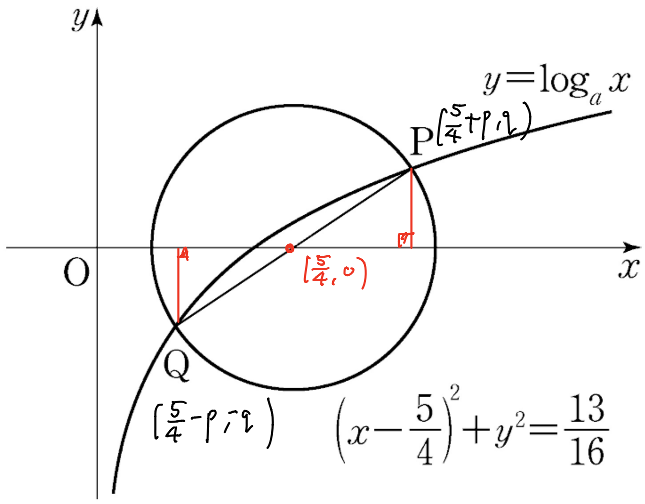
위를 참고하여 학습하신다면 교재 이용이 더욱 편리합니다.

미적분 II의 도구와 태도

1-1. 18학년도 9월 평가원 16번

$a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C:\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5



③

$p^2+q^2=\frac{13}{16}$

$q^2=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$q=\frac{1}{2}\ (q>0)$

$\log_a\left(\frac{5}{4}+p\right)=q$

$\log_a\left(\frac{5}{4}-p\right)=-q$

$\frac{5}{4}+p=\frac{1}{\frac{5}{4}-p}$

$\left(\frac{5}{4}+p\right)\left(\frac{5}{4}-p\right)=1$

$p^2=\frac{9}{16}\quad p=\frac{3}{4}\ (p>0)$

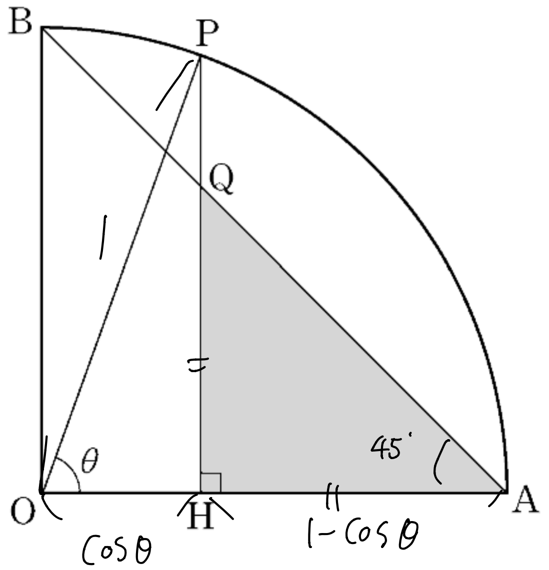
$\log_a 2=\frac{1}{2}$

$2=a^{\frac{1}{2}},\quad a=4$

1−2. 17학년도 수능 14번

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



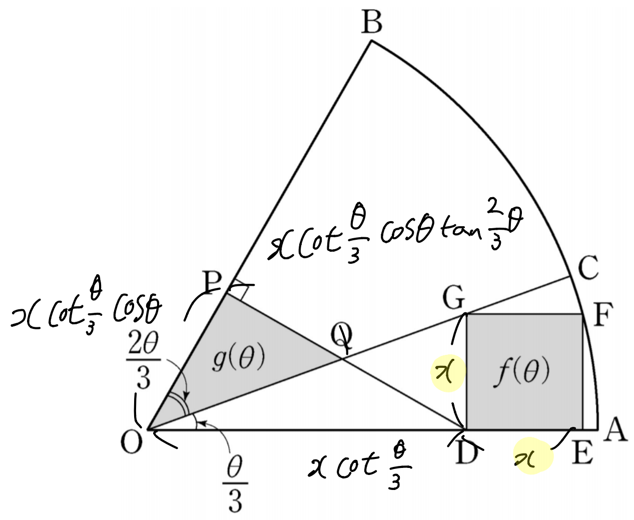
1

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

$S(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2$ $\quad \frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2 = \frac{1}{8}$

1-3. 18학년도 6월 평가원 28번

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$이고, $\overline{\mathrm{OD}} < \overline{\mathrm{OE}}$이다.) [4점]



$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\cancel{x^2}}{\frac{1}{2}\theta \times \cot^2\frac{\theta}{3}\cos^2\theta \ \tan\frac{2}{3}\theta \ \cancel{x^2}}$$

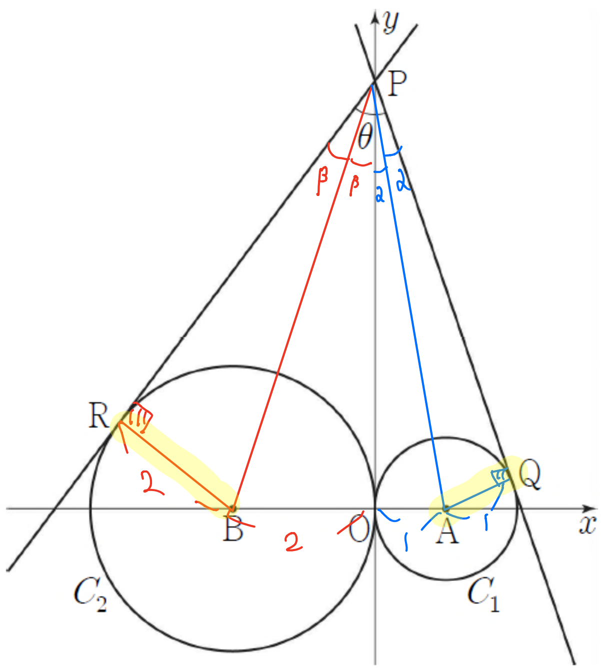
$$= 2\lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta \ \tan\frac{2}{3}\theta} = \frac{1}{3}$$

$60 \times \frac{1}{3} = 20$

20

1-4. 19학년도 4월 교육청 29번

그림과 같이 중심이 점 A$(1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1과 중심이 점 B$(-2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원 C_2가 있다. y축 위의 점 P$(0,\ a)$$(a>\sqrt{2})$에서 원 C_1에 그은 접선 중 y축이 아닌 직선이 원 C_1과 접하는 점을 Q, 원 C_2에 그은 접선 중 y축이 아닌 직선이 원 C_2와 접하는 점을 R라 하고 $\angle \mathrm{RPQ}=\theta$라 하자. $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$일 때, $(a-3)^2$의 값을 구하시오. [4점]



$\tan\alpha=\dfrac{1}{a}$

$\tan\beta=\dfrac{2}{a}$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{3}{a}}{1-\frac{2}{a^2}}=\dfrac{3a}{a^2-2}$

$\theta=2(\alpha+\beta)$

$\tan\theta=\dfrac{2\times\left(\frac{3a}{a^2-2}\right)}{1-\left(\frac{3a}{a^2-2}\right)^2}=\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{3a}{a^2-2}=t$

11

$\dfrac{2t}{1-t^2}=\dfrac{4}{3}$

$4t^2+6t-4=0$

$(2t-1)(t+2)=0$

$t=\dfrac{1}{2}$

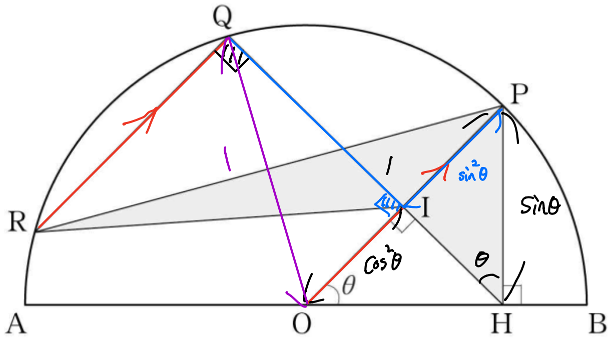
$\dfrac{3a}{a^2-2}=\dfrac{1}{2}$

$a^2-6a-2=0$

$(a-3)^2=11$

1−5. 19년 3월 교육청 19번

그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H를 지나고 선분 OP에 수직인 직선이 선분 OP, 호 AB와 만나는 점을 각각 I, Q라 하자. 점 Q를 지나고 직선 OP에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하자. $\angle POB = \theta$일 때, 두 삼각형 RIP, IHP의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta) - T(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ③ $\sqrt{2}-1$ ④ $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$

$$T(\theta) = \frac{1}{2} \sin^2\theta \sin\theta \cos\theta$$

2

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \sin^2\theta \sqrt{1-\cos^4\theta} = \frac{1}{2} \sin^3\theta \sqrt{1+\cos^2\theta}$$

$(\theta > 0)$

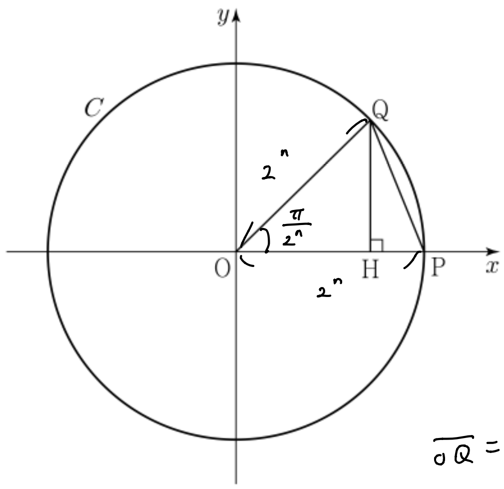
$$\frac{1}{2} \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin^3\theta \left(\sqrt{1+\cos^2\theta} - \cos\theta\right)}{\theta^3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

1−6. 19학년도 9월 평가원 19번

자연수 n 에 대하여 중심이 원점 O 이고 점 $P(2^n,\ 0)$ 을 지나는 원 C 가 있다. 원 C 위에 점 Q 를 호 PQ 의 길이가 π 가 되도록 잡는다. 점 Q 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\overline{OQ}\times\overline{HP})$ 의 값은? [4점]

① $\frac{\pi^2}{2}$ ② $\frac{\pi^2}{3}$ ③ π^2 ④ $\frac{5}{4}\pi^2$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi^2$



1

$\pi = 2^n\theta$

$\theta = \frac{\pi}{2^n}$

$\overline{OQ} = 2^n$

$\overline{HP} = 2^n - 2^n\cos\frac{\pi}{2^n}$

$\lim_{n\to\infty} 2^n\left(2^n - 2^n\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$ $\frac{1}{2^n} = t$

$= \pi^2\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\pi t}{\pi^2 t^2} = \frac{\pi^2}{2}$

1−7. 13학년도 9월 평가원 나형 15번

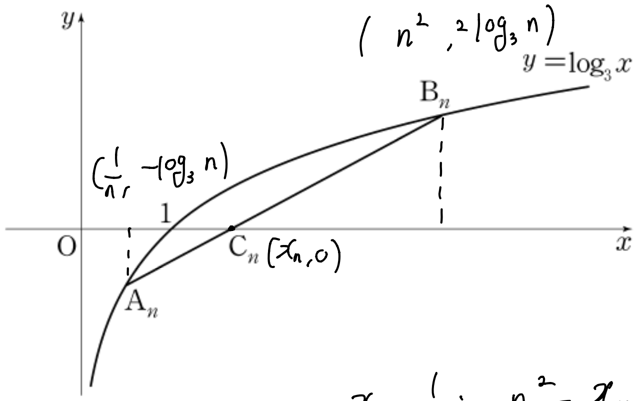
2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. 그래프 위의 점 B_n과 x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$

점 C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

①



$1 : 2 = x_n - \frac{1}{n} : n^2 - x_n$

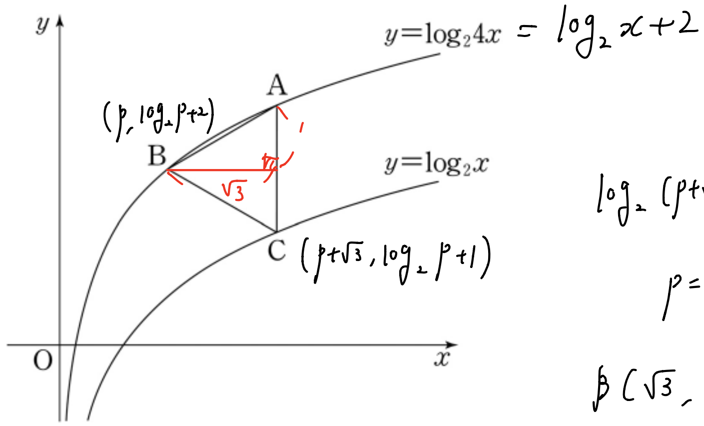
$2x_n - \frac{2}{n} = n^2 - x_n$

$x_n = \frac{n^2}{3} + \frac{2}{3n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{2}{3n^3} = \frac{1}{3}$

1−8. 11학년도 9월 평가원 나형 15번

함수 $y=\log_2 4x$ 의 그래프 위의 두 점 A, B 와 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프 위의 점 C 에 대하여 선분 AC 가 y 축에 평행하고 삼각형 ABC 가 정삼각형일 때, 점 B 의 좌표는 $(p,\ q)$ 이다. $p^2 \times 2^q$ 의 값은? [4점]



$\log_2 (p+\sqrt{3}) = \log_2 2p$

$p = \sqrt{3}$

$B(\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\log_2 3+2)$

① $6\sqrt{3}$　② $9\sqrt{3}$　③ $12\sqrt{3}$　④ $15\sqrt{3}$　⑤ $18\sqrt{3}$

$3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

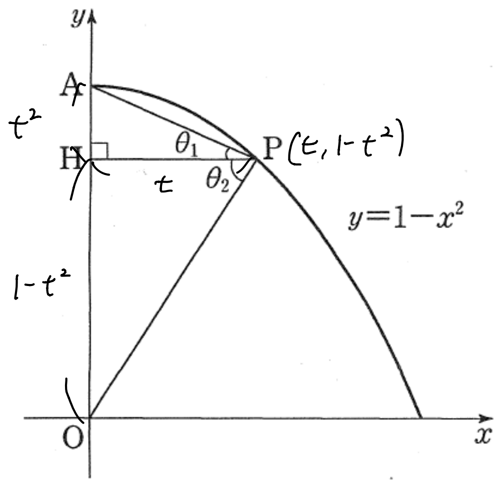
③

1−9. 18학년도 9월 평가원 15번

곡선 $y=1-x^2\,(0<x<1)$ 위의 점 P 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 원점 O 와 점 $\mathrm{A}(0,1)$ 에 대하여 $\angle \mathrm{APH}=\theta_1$, $\angle \mathrm{HPO}=\theta_2$ 라 하자. $\tan\theta_1=\dfrac{1}{2}$ 일 때, $\tan(\theta_1+\theta_2)$ 의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

4



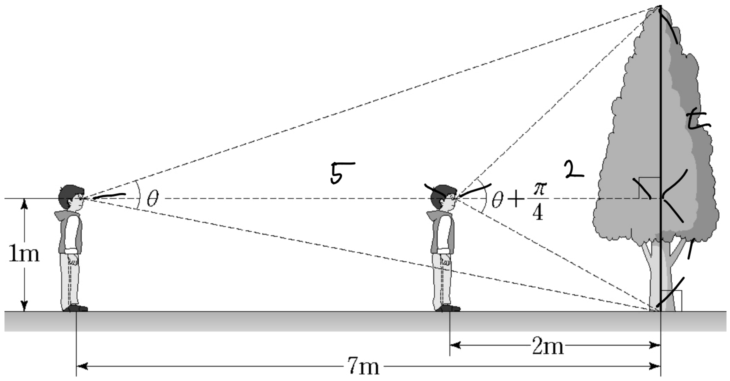
$\tan\theta_1 = \dfrac{t^2}{t} = t = \dfrac{1}{2}$

$\tan\theta_2 = \dfrac{1-t^2}{t} = \dfrac{3}{2}$

$\tan(\theta_1+\theta_2) = \dfrac{2}{1-\frac{3}{4}} = 8$

1−10. 09학년도 6월 평가원 29번

눈높이가 1m인 어린이가 나무로부터 7m 떨어진 지점에서 나무의 꼭대기를 바라본 선과 나무가 지면에 닿는 지점을 바라본 선이 이루는 각이 θ이었다. 나무로부터 2m 떨어진 지점까지 다가가서 나무를 바라보았더니 나무의 꼭대기를 바라본 선과 나무가 지면에 닿는 지점을 바라본 선이 이루는 각이 $\theta+\frac{\pi}{4}$가 되었다. 나무의 높이는 a(m) 또는 b(m)이다. $a+b$의 값은? [4점]



① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$$\tan\theta = \frac{\frac{1+t}{7}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{t}{7}} = \frac{7(t+1)}{49-t}$$

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{t+1}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}} = \frac{2(t+1)}{4-t}$$

①

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

$$\frac{2(t+1)}{4-t} = \frac{49-t+7(t+1)}{49-t-7(t+1)} = \frac{56+6t}{42-8t}$$

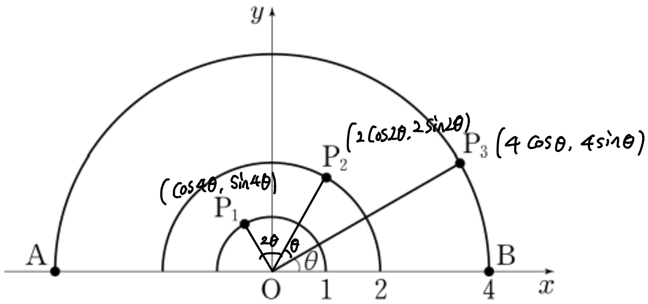
$$2(t+1)(4t-21) = (3t+28)(t-4)$$

$$8t^2-34t-42 = 3t^2+16t-112$$

$$5t^2-60t+70=0 \qquad t^2-12t+14=0 \qquad a+b=12$$

1−11. 13학년도 9월 평가원 19번

그림과 같이 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $1, 2, 4$인 세 반원을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하자. 세 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$은 선분 OB 위에서 동시에 출발하여 각각 세 반원 O_1, O_2, O_3 위를 같은 속력으로 시계 반대 방향으로 움직이고 있다. $\angle \mathrm{BOP}_3 = \theta$라 하고 삼각형 ABP_1의 넓이를 S_1, 삼각형 ABP_2의 넓이를 S_2, 삼각형 ABP_3의 넓이를 S_3이라 하자. $3S_3 = 2(S_1 + S_2)$일 때, $\cos^3\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$S_1 = \sin 4\theta$ $S_2 = 2\sin 2\theta$ $S_3 = 4\sin\theta$

③

$12\sin\theta = 2(\sin 4\theta + 2\sin 2\theta)$

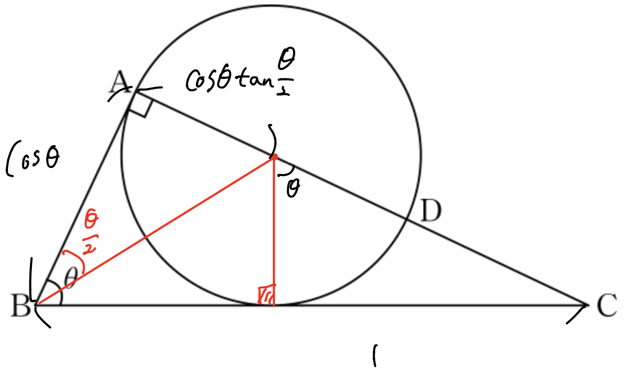
$12\sin\theta = 4\sin 2\theta(\cos 2\theta + 1)$

$3 = 2\cos\theta \times 2\cos^2\theta$

$\cos^3\theta = \frac{3}{4}$

1-12. 16년 10월 교육청 28번

그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=1$, $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{B}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 선분 AC 위의 점 D 에 대하여 선분 AD 를 지름으로 하는 원이 선분 BC 와 접할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta^3}=k$ 라 하자. $100k$ 의 값을 구하시오. [4점]



$$\overline{CD} = \sin\theta - 2\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{\sin\theta - 2\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - 2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\theta^3\cos\frac{\theta}{2}}$$

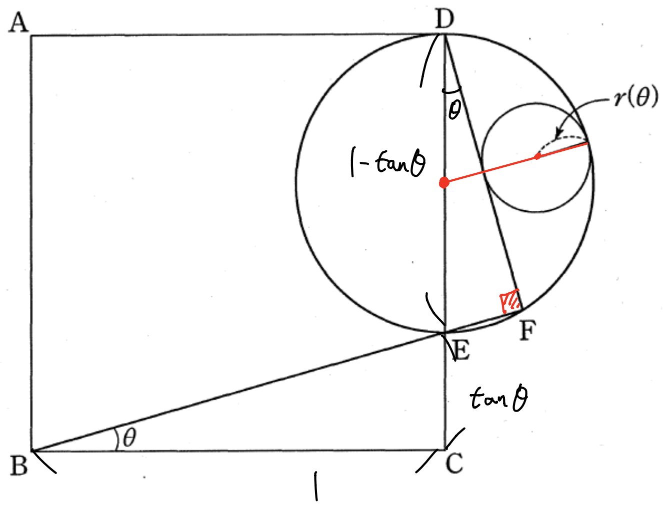
$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right)}{\theta^3\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^3\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4}$$

25

1-13. 17학년도 9월 평가원 20번

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle EBC = \theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$ ② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$ ③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$ ④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ ⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

$$2r(\theta) + \frac{1-\tan\theta}{2}\sin\theta = \frac{1-\tan\theta}{2}$$

④

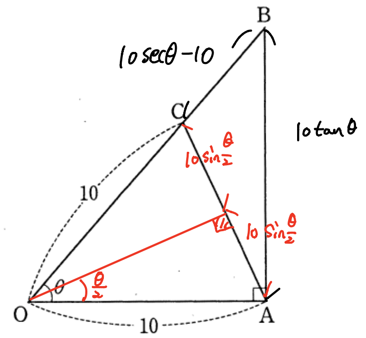
$$r(\theta) = \frac{1-\tan\theta}{4}(1-\sin\theta)$$

$$\frac{1}{4} \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}(1-\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 2 = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$$

1−14. 10학년도 6월 평가원 30번

그림과 같이 양수 θ에 대하여 $\angle \mathrm{AOB} = \theta$, $\angle \mathrm{OAB} = \frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{OA}} = 10$ 인 직각삼각형 OAB 가 있다. 변 OB 위에 있는 $\overline{\mathrm{OC}} = 10$인 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta}$ 의 값을 구하시오. [4점]



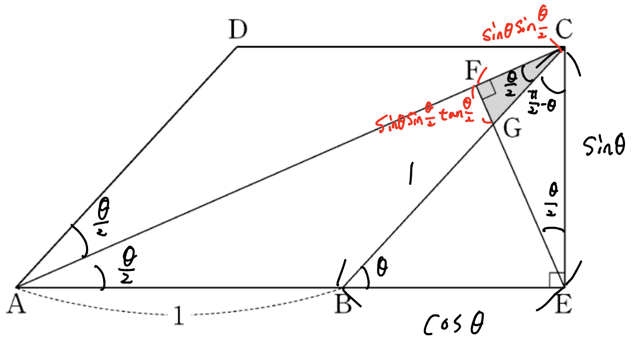
20

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{20\sin\frac{\theta}{2} + 10\tan\theta + 10(\sec\theta - 1)}{\theta}$$

$$= 10 + 10 = 20$$

1-15. 18학년도 수능 17번

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자. $\angle DAB = \theta$일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



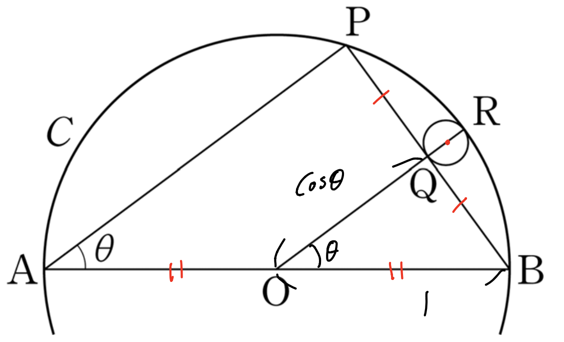
① $\frac{1}{24}$　② $\frac{1}{20}$　③ $\frac{1}{16}$　④ $\frac{1}{12}$　⑤ $\frac{1}{8}$

3

$$\frac{1}{2} \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2\theta \sin^2\frac{\theta}{2} \tan\frac{\theta}{2}}{\theta^5} = \frac{1}{16}$$

1−16. 12학년도 6월 평가원 27번

중심이 O이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하며 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 그림과 같이 원 C 위의 점 P에 대하여 점 O를 지나고 직선 AP와 평행한 직선이 선분 PB와 만나는 점을 Q, 호 PB와 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{PAB} = \theta \ (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$라 하고, 점 Q와 점 R를 지름의 양 끝으로 하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4} = \frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{QR}} < 1$이고, p와 q는 서로소인 정수이다.) [4점]

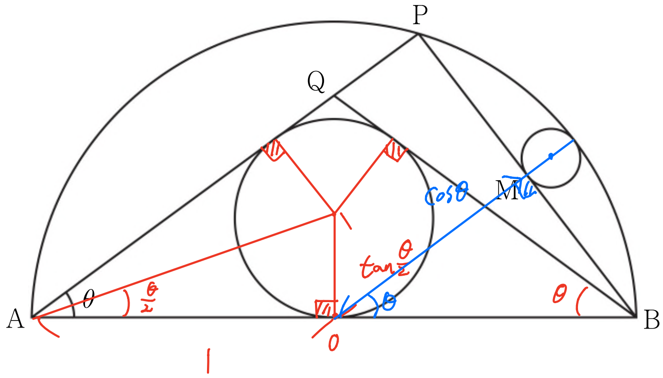


17

$S(\theta) = \frac{\pi}{4}(1-\cos\theta)^2$ $\quad$ $\frac{\pi}{4} \lim\limits_{\theta \to 0} \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2 = \frac{\pi}{16}$

1−17. 16년 4월 교육청 29번

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle PAB = \theta$라 하자. 선분 PB의 중점 M에서 선분 PB에 접하고 호 PB에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 AP 위에 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$가 되도록 점 Q를 잡고 삼각형 ABQ에 내접하는 원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^2 \times T(\theta)}{S(\theta)}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



$S(\theta) = \frac{\pi}{4}(1-\cos\theta)^2$

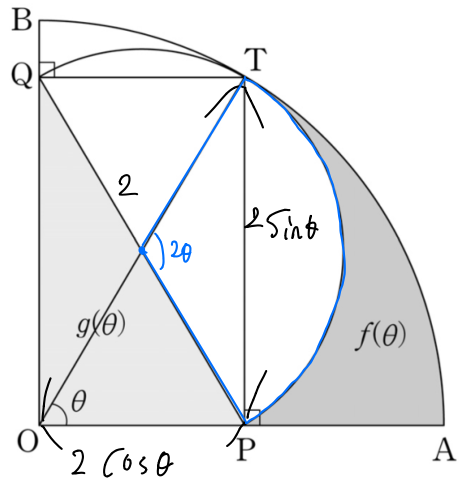
$T(\theta) = \pi \tan^2\frac{\theta}{2}$

4

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\pi \theta^2 \tan^2\frac{\theta}{2}}{\frac{\pi}{4}(1-\cos\theta)^2} = 4$$

1−18. 11학년도 9월 평가원 30번

그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 T에서 선분 OA와 선분 OB에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고 $\angle \mathrm{TOP} = \theta$라 하자. 점 P와 점 Q를 지름의 양끝으로 하고 점 T를 지나는 반원을 C라 할 때, 반원 C의 호 TP, 선분 PA, 부채꼴 OAT의 호 AT로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to +0} \frac{\theta + f(\theta)}{g(\theta)} = a$일 때, $100a$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)[4점]



$\frac{1}{2} + \theta$

50

$g(\theta) = \sin 2\theta$

$f(\theta) = 2\theta - \sin 2\theta - \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$

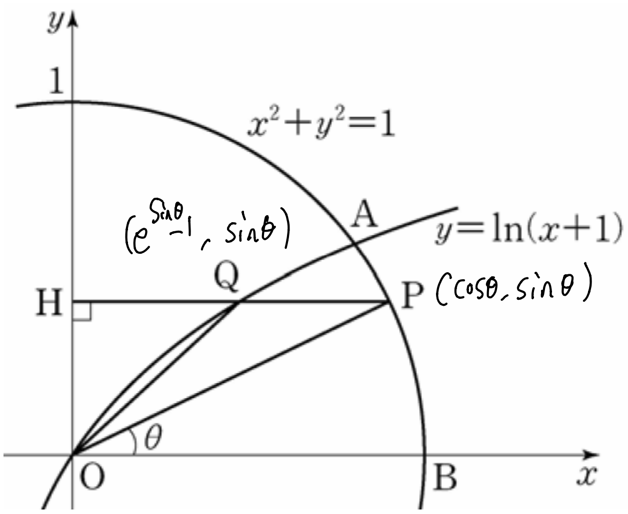
$= \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{2\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

1−19. 16학년도 수능 28번

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\ln(x+1)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 B(1, 0)에 대하여 호 AB 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 곡선 $y=\ln(x+1)$이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle\mathrm{POB}=\theta$라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 HQ의 길이를 $L(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{L(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$이고, O는 원점이다.) [4점]



30

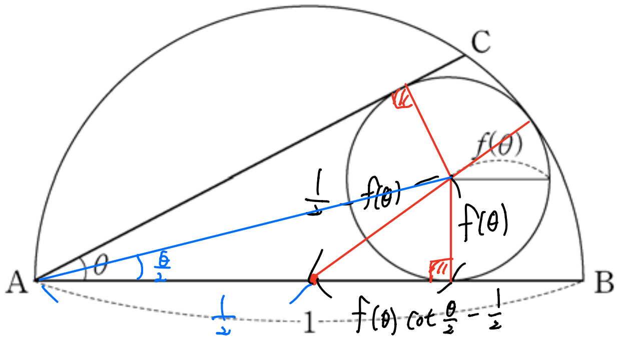
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\left(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1\right)\sin\theta$$

$$L(\theta)=e^{\sin\theta}-1$$

$$\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\left(\cos\theta+1-e^{\sin\theta}\right)}{e^{\sin\theta}-1}=\frac{1}{2}$$

1−20. 16학년도 6월 평가원 29번

그림과 같이 길이가 1 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위에 점 C 를 잡고 $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ 라 하자. 호 BC 와 두 선분 AB, AC 에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan\frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2} = \alpha$ 이다. 100α 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



$$\cancel{f^2(\theta)} - f(\theta) + \cancel{\frac{1}{4}} = \cancel{f^2(\theta)} + f^2(\theta)\cot^2\frac{\theta}{2} - f(\theta)\cot\frac{\theta}{2} + \cancel{\frac{1}{4}}$$

$$-1 = f(\theta)\cot^2\frac{\theta}{2} - \cot\frac{\theta}{2}$$

$$-\tan^2\frac{\theta}{2} = f(\theta) - \tan\frac{\theta}{2}$$

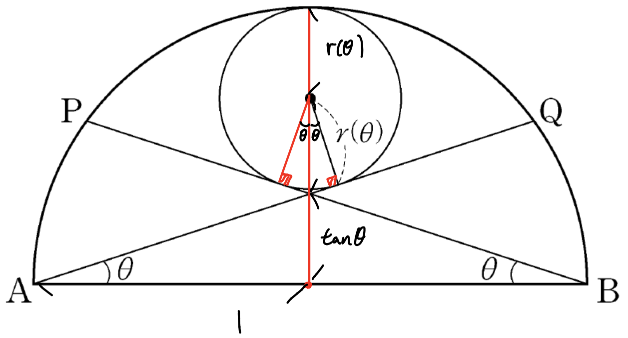
$$f(\theta) = \tan\frac{\theta}{2} - \tan^2\frac{\theta}{2}$$

25

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2} = \frac{1}{4}$$

1−21. 13학년도 6월 평가원 29번

그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q 를 $\angle\mathrm{ABP} = \angle\mathrm{BAQ} = \theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$ 가 되도록 잡는다. 두 선분 AQ, BP 와 호 PQ 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-0} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta} = p\sqrt{2} + q$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]



8

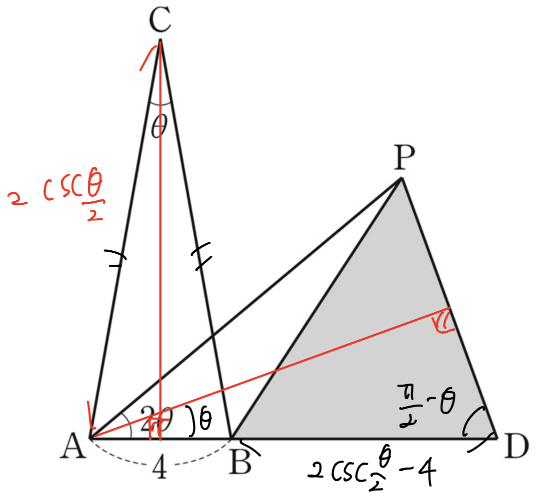
$$1 = r(\theta) + r(\theta)\sec\theta + \tan\theta$$

$$\frac{1-\tan\theta}{1+\sec\theta} = r(\theta)$$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{1-\tan\theta}{\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)(1+\sec\theta)} = \frac{2}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)$$

1−22. 14학년도 수능 28번

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 한 변으로 하고, $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ACB=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{AD}$인 점 D를 잡고, $\overline{AC}=\overline{AP}$이고 $\angle PAB=2\theta$인 점 P를 잡는다. 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}(\theta\times S(\theta))$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]



$2 \quad 2\csc\frac{\theta}{2}$

16

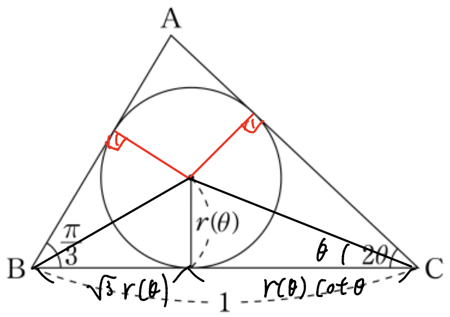
$$\lim_{\theta\to0+}\theta\left(2\csc^2\frac{\theta}{2}\sin2\theta-4\csc\frac{\theta}{2}\sin2\theta\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta\sin2\theta\left(1-2\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=16$$

1−23. 17년 10월 교육청 12번

그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=1$, $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{3}$, $\angle \mathrm{ACB}=2\theta$ 인 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $h(\theta)=\frac{r(\theta)}{\tan\theta}$일 때, $h'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$) [3점]



① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

$$r(\theta)\left(\sqrt{3}+\cot\theta\right)=1$$

$$r(\theta)=\frac{1}{\sqrt{3}+\cot\theta}$$

2

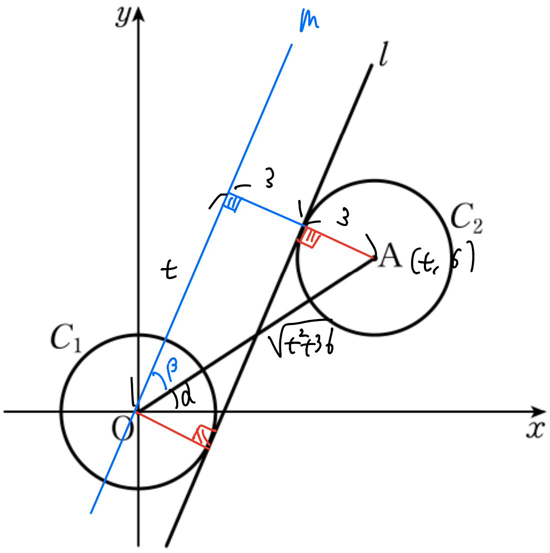
$$h(\theta)=\frac{1}{\sqrt{3}\tan\theta+1}$$

$$h'(\theta)=\frac{-\sqrt{3}\sec^2\theta}{(\sqrt{3}\tan\theta+1)^2}$$

$$h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}\times\frac{4}{3}}{4}$$

1−24. 16년 3월 교육청 18번

좌표평면에 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 3 인 원 C_1과 중심이 점 A $(t, 6)$ 이고 반지름의 길이가 3 인 원 C_2가 있다. 그림과 같이 기울기가 양수인 직선 l이 선분 OA 와 만나고, 두 원 C_1, C_2에 각각 접할 때, 다음은 직선 l의 기울기를 t에 대한 식으로 나타내는 과정이다. (단, $t > 6$)



직선 OA 가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α,
점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 m이 직선 OA 와 이루는 예각의 크기를 β라 하면

$$\tan\alpha = \frac{6}{t}$$

$$\tan\beta = \boxed{(가)} \qquad \frac{6}{t}$$

이다.
직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\theta = \alpha + \beta$$

이므로

$$\tan\theta = \boxed{(나)} \qquad \frac{\frac{12}{t}}{1-\frac{36}{t^2}} = \frac{12t}{t^2-36}$$

이다.
따라서 직선 l의 기울기는 $\boxed{(나)}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, $\frac{g(8)}{f(7)}$의 값은? [4점]

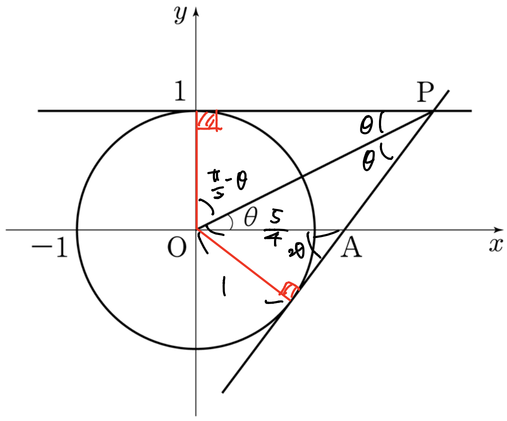
① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

5

$$\frac{\frac{96}{28}}{\frac{6}{7}} = 4$$

1−25. 14학년도 평가원 예비시행 16번

그림과 같이 직선 $y=1$ 위의 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선이 x축과 만나는 점을 A라 하고, $\angle \mathrm{AOP}=\theta$라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}=\dfrac{5}{4}$일 때, $\tan 3\theta$의 값은? $\left(단, 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}이다.\right)$ [4점]



④

$\tan 2\theta = \frac{4}{3}$, $\tan\theta = \frac{1}{2}$

$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{4}{3}$

$6t = 4-4t^2$

① 4　② $\dfrac{9}{2}$　③ 5　④ $\dfrac{11}{2}$　⑤ 6

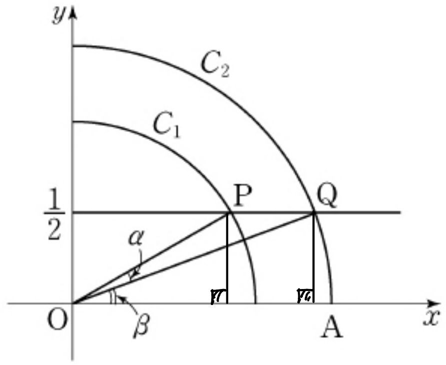
$2t^2+3t-2=0$

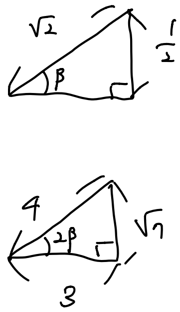
$(2t-1)(t+2)=0$

$\tan 3\theta = \dfrac{\frac{11}{6}}{1-\frac{2}{3}} = \dfrac{11}{2}$

1−26. 11학년도 6월 평가원 28번

좌표평면에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 1, $\sqrt{2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 직선 $y=\dfrac{1}{2}$이 원 C_1, C_2와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. 점 $\mathrm{A}(\sqrt{2}, 0)$에 대하여 $\angle \mathrm{QOP}=\alpha$, $\angle \mathrm{AOQ}=\beta$라고 할 때, $\sin(\alpha-\beta)$의 값은? [3점]





$\cos 2\beta$

④

① $\dfrac{3-\sqrt{14}}{8}$　② $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{8}$　③ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{14}}{8}$　④ $\dfrac{3-\sqrt{21}}{8}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{21}}{8}$

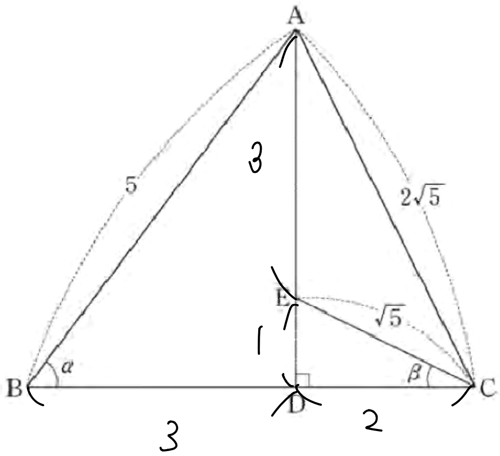
$\alpha+\beta = \frac{\pi}{6}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\beta\right) = \frac{1}{2}\cos 2\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\beta$

$= \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{21}}{8}$

1−27. 18학년도 수능 14번

그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{EC}=\sqrt{5}$이다. $\angle ABD=\alpha$, $\angle DCE=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은? [4점]



5

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

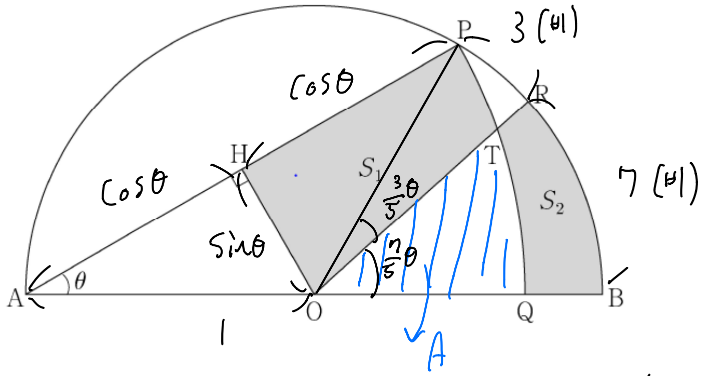
$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

1−28. 20학년도 6월 평가원 28번

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AP}$인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자. 호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 3:7이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자. 세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $\angle PAB=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S_1-S_2}{\overline{OH}}=a$이다. $50a$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



$$S_1 + A = \frac{1}{2}\times 4\cos^2\theta \times \theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$S_2 + A = \frac{1}{2}\times\frac{7}{5}\theta$$

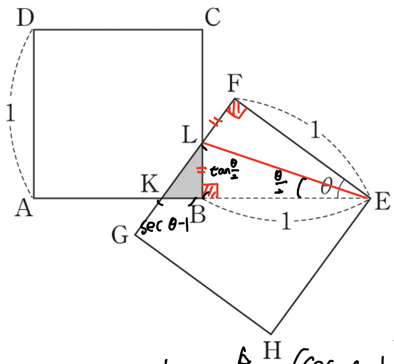
$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\theta\cos^2\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{7}{10}\theta}{\sin\theta}$$

40

$$= 2-\frac{1}{2}-\frac{7}{10}=\frac{4}{5}$$

1-29. 09학년도 6월 평가원 30번

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 변 AB를 연장한 직선 위에 $\overline{BE}=1$인 점 E가 있다. 점 E를 꼭짓점으로 하고 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH에 대하여 $\angle BEF=\theta$일 때, 변 FG와 변 AB의 교점을 K, 변 FG와 변 BC의 교점을 L이라 하자. 삼각형 KBL의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이고, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



65

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}(\sec\theta - 1)$$

$$\frac{1}{2}\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)}{\theta^3 \cos\theta} = \frac{1}{8}$$

Chapter 2 문제

2−1. 13학년도 6월 평가원 21번

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$f(1) = -12$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

$f'(x) = 3x^2-6x-9$

$= 3(x-3)(x+1)$

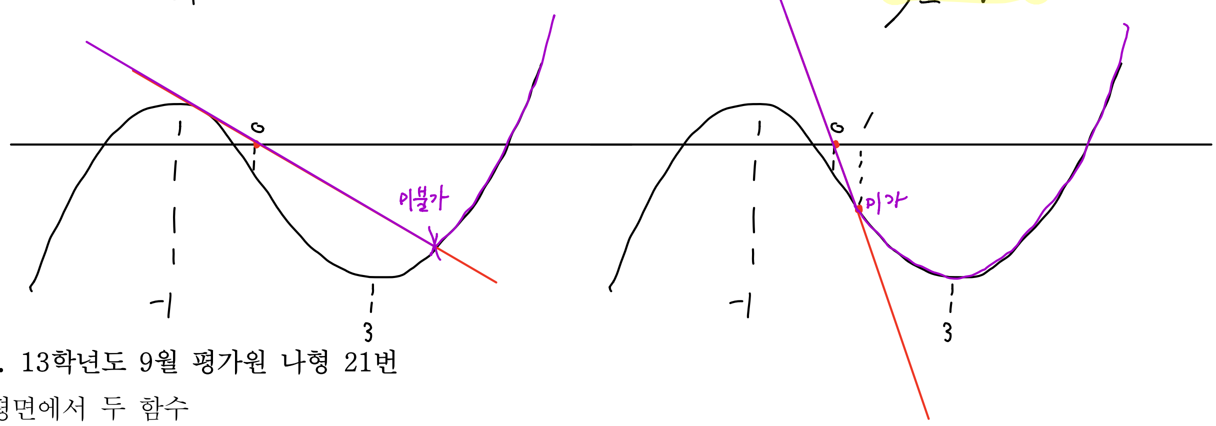
라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은? [4점]

$f'(1) = -12$

① -14　② -12　③ -10　④ -8　⑤ -6

$y = -12x$

2



2−2. 13학년도 9월 평가원 나형 21번

좌표평면에서 두 함수

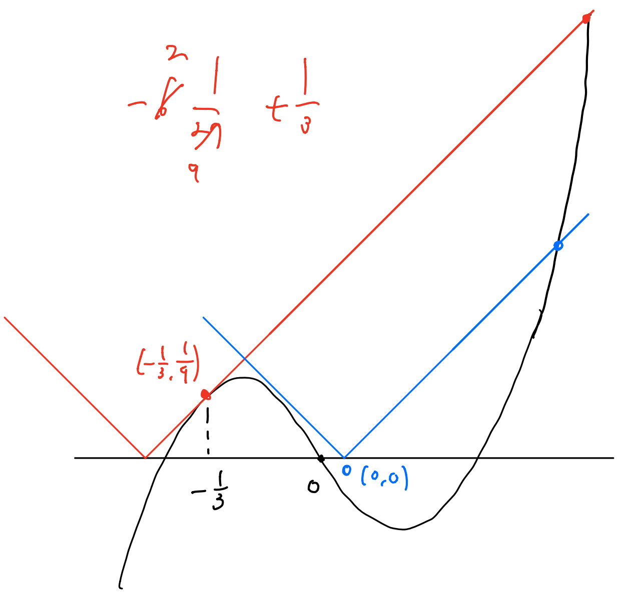
$$f(x)=6x^3-x,\quad g(x)=|x-a|$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{11}{18}$　② $-\frac{5}{9}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{4}{9}$　⑤ $-\frac{7}{18}$

4

$-\cancel{6}^{2}\frac{1}{\cancel{27}_{9}}+\frac{1}{3}$



$f'(x) = 18x^2-1$

$-\frac{1}{3}-a=\frac{1}{9}$

$18x^2-1=1$　$x=-\frac{1}{3}$　$\Rightarrow$　$a=-\frac{4}{9}$

$18x^2-1=-1$　$x=0$　$\Rightarrow$　$a=0$

2−3. 15학년도 수능 A형 21번

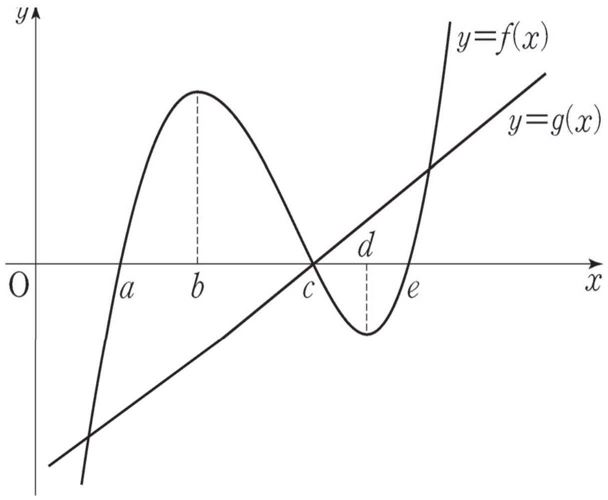
다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다. (나) $f(0)=f'(0)$ (다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38 ④ 43 ⑤ 48

2-4. 17학년도 6월 평가원 나형 18번

삼차함수 $y=f(x)$ 와 일차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 $f'(b)=f'(d)=0$ 이다.



함수 $y=f(x)g(x)$ 는 $x=p$ 와 $x=q$ 에서 극소이다. 다음 중 옳은 것은? (단 $p<q$) [4점]

① $a<p<b$ 이고 $c<q<d$ 이다.
② $a<p<b$ 이고 $d<q<e$ 이다.
③ $b<p<c$ 이고 $c<q<d$ 이다.
④ $b<p<c$ 이고 $d<q<e$ 이다.
⑤ $c<p<d$ 이고 $d<q<e$ 이다.

2-5. 18학년도 6월 평가원 나형 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다. (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점]

2−6. 18학년도 9월 평가원 나형 29번

두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2-7. 18학년도 9월 평가원 나형 30번

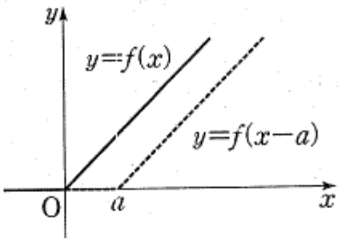
두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

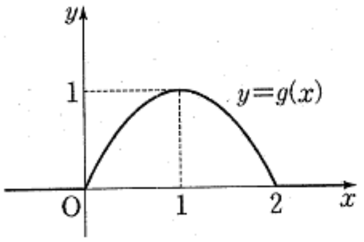
$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ x & (x>0) \end{cases},\ g(x)=\begin{cases} x(2-x) & (|x-1| \le 1) \\ 0 & (|x-1|>1) \end{cases}$$

이다. 양의 실수 k, a, b $(a<b<2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

라 정의하자. 모든 실수 x에 대하여 $0 \le h(x) \le g(x)$일 때, $\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b에 대하여 $60(k+a+b)$의 값을 구하시오. [4점]





2-8. 18학년도 수능 나형 20번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(0)=0$, $f'(2)=16$
(나) 어떤 양수 k에 대하여 두 열린 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ k)$에서 $f'(x)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 것을 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(0)=0$이면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq -\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2−9. 19학년도 9월 평가원 나형 30번

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b 이다.

$$f'(1) < 0,\ f'(2) < 0,\ f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$) [4점]

2−10. 20학년도 6월 평가원 나형 18번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

ㄴ. $g(1)<\frac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

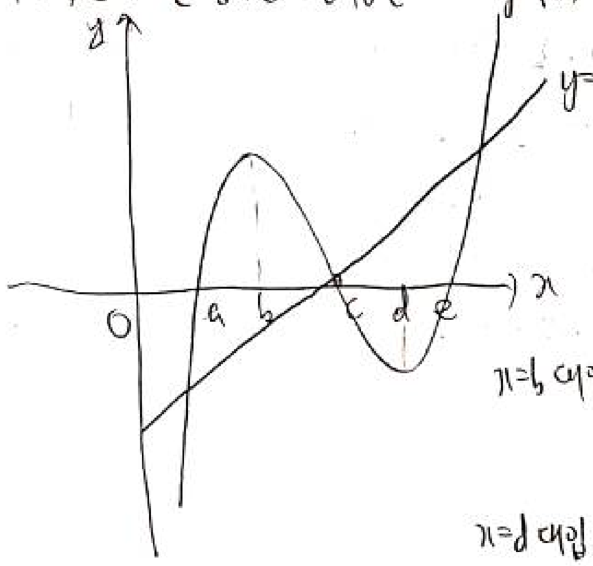
2-3 15학년도 수능 A형 21번

(다)에 의해, $f(x)-f'(x)=g(x)$라 하면, $x\ge-1$에서 $g(x)\ge0$이다.

(나)에 의해, $g(0)=0$이므로 (다)와 연립해서 보면 $g'(0)=0$ ($\because g'(0)\neq0$이면 $x>0$이나 $x<0$에서 $g(x)<0$인 지점이 생겨 모순)이므로 $g(x)=x^2(x-d)$ (d는 상수)이다. ((가)에 의해 최고차항 계수 1)

(다)에서 $x\ge-1$에서 $g(x)\ge0$이므로 $d\le-1$이고, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면 (b, c는 상수) $f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $g(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x+c-b=x^3-dx^2$에서 $b=c$, $b=2a$, $d=3-a$이다. 모든 계수를 a로 정리하면, $f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$에서, $f(2)=8+4a+4a+2a=10a+8$에서 $f(2)$의 최솟값은 a의 최솟값이다. $d=3-a$에서, a가 최소이면 d가 최대이므로 $d\le-1$에서 $d=-1$, $a=4$임을 알 수 있다. $\therefore f(2)$ 최솟값은 48이다.

2-4 17학년도 6월 평가원 나형 18번



$f(x)=k(x-a)(x-c)(x-e)$ (이때, k, m은 상수)

$g(x)=m(x-c)$

$f(x)g(x)=h(x)$라 하면, $h(x)=km(x-a)(x-c)^2(x-e)$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

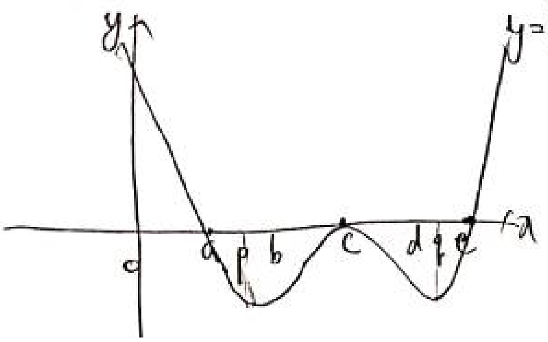
$x=b$ 대입 → $f'(b)=0$, $g'(b)>0$이므로 $h'(b)=f(b)g'(b)>0$

$\therefore a<p<b$

$x=d$ 대입 → $f'(d)=0$, $g'(d)>0$ 이므로 $h'(d)=f(d)g'(d)<0$

$\therefore d<q<e$

실제로 $y=h(x)$를 그려보면 다음과 같다.



2-5 18학년도 6월 평가원 나형 30번

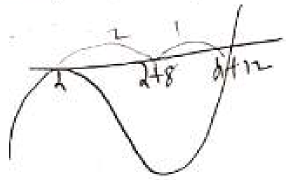
무작정 $h(x)=f(x)-g(x)$로 우선 두고 판단하지 말자. $h(x)$로 두는 거는 이전 단계에서 얻어낼 거 다 얻어내고 하는 거다. 설사 $h(x)$를 세웠어도 문제를 읽으면서 평가원이 이차함수의 최고차항 계수까지 다 알려주고 $g'(\alpha)$와 $g'(\beta)$의 값까지 왜 친절하게 다 알려줬는지에 대한 고찰을 했어야 한다. $g(x)$가 최고차항 계수가 2인 이차함수이므로 $g'(x)$는 최고차항 계수가 4인 일차함수이고, (가)에서 $g'(\alpha)=-16$, (나)에서 $g'(\beta)=16$ 에서, $g'(\beta)-g'(\alpha)=4(\beta-\alpha)=32$ 에서, $\beta=\alpha+8$ 임을 알 수 있다.

β와 α의 관계를 얻어냈으므로 $h(x)=f(x)-g(x)$로 두면 $h(x)$의 개형을 파악할 수 있다.

$h(\alpha)=0$, $h'(\alpha)=0$ ($\because$(가)), $h'(\beta)=h'(\alpha+8)=0$ 에서, $h(x)=(x-\alpha)^2(x-(\alpha+12))$ 임을 알 수 있다.

$\therefore g(\beta+1)-f(\beta+1)=-h(\beta+1)=-h(\alpha+9)$

$=-(9)^2(-3)=243$ 이다.

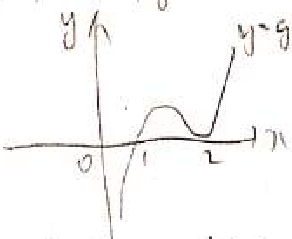


2-6 18학년도 9월 평가원 나형 29번

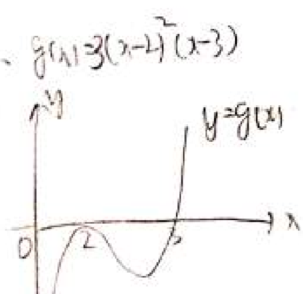
$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$이고, $g(x)$가 최고차항의 계수가 3인 삼차함수이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이고 인수로 $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ 중 최소한 한 개 이상을 갖는 삼차함수이다. (그리고, $f(x)=0$인 실근 x는 $x=1$, $x=2$, $x=3$ 말고는 존재하지 않는다.) $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지므로

i) $g(2)=0$ 과 ii) $g(2)\neq0$ 인 케이스로 분류할 수 있다.

i) $g(2)=0$ → $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $g(x)=3(x-2)^2Q(x)$ ($Q(2)\neq0$, $Q(x)$는 $Q(1)=0$ 또는 $Q(3)=0$인 일차식) 이 때, $Q(x)=x-1$일 경우, $g(x)$의 개형이 다음과 같으므로 모순

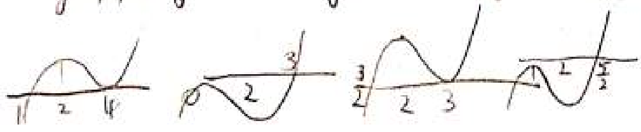


$\therefore g(x)=3(x-2)^2(x-3)$



이에 따라, $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$ 이므로 $f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)(x-3)+\frac{1}{3}(x-1)^2$ 이므로 $f'(0)=\frac{7}{3}=\frac{q}{p}$ $\therefore p+q=3+7=10$

ii) $g(2)\neq0$ $g'(2)=0$이고 $g(1)=0$ 또는 $g(3)=0$이므로 $g(x)=3(x-1)(x-4)^2$ 또는 $g(x)=3(x-\frac{3}{2})(x-3)^2$



$g(x)=3x^2(x-3)$ 이다. ($\because$ 비율 1:2)

$g(x)=3(x-1)^2(x-\frac{5}{2})$ 모두 모순

2-7 18학년도 9월 평가원 나형 30번

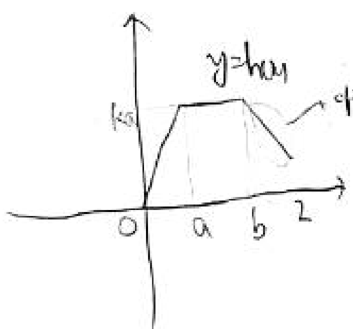
답만 구하려 하면 좀 당혹스러운 문제이다. 우선 $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$를 구하고자 해서 $0\le x\le 2$에서 $h(x)$를 생각해보면, $f(x-2)=0$이므로 사실상 $h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)\}$가 된다. 그럼에도 불구하고 평가원은 '왜' $f(x-2)$를 줬을까? 문제 완결성을 위해서다. 만약 $h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)\}$로 줬으면 $x<0$일 때는 $h(x)=0$으로 정의되지만, $x>2$일 때는 $h(x)=k(a+b-x)$이므로 $h(x)$는 $x>2$에서 감소함수가 된다. 하지만 $f(x-2)$가 들어가면 $x>2$에서 $h(x)=k(a+b-2)$이 되므로 특정 상수함수가 되고, 이게 $x>2$일 때 $g(x)=0$과 일치하게 해 $h(x)$와 $g(x)$는 $0\le x\le 2$에서만 다른 함수가 된다. 그럼 이 시각에서 문제를 한번 풀어보자.

i) $0<x\le a$ $h(x)=kx$

ii) $a<x\le b$ $h(x)=ka$

iii) $b<x<2$ $h(x)=k(a+b-x)$

해당함수를 그려보면 다음과 같다.



아직 $x=2$에서 무슨값을 갖는지 모른다.

$a+b>2$이면 $h(2)>0$
$a+b<2$이면 $h(2)<0$

→ $0\le h(x)$에서, $a+b\ge 2$이다.
모든 실수 x에 대해 $0\le h(x)\le g(x)$이므로
$0\le h(2)\le g(2)=0$에서,
$h(2)=k(a+b-2)=0$
$\because k>0$이므로 $a+b=2$ … $\boxed{1}$

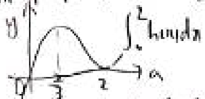
이 때, $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소이므로 $\int_0^2 g(x)dx$가 고정인 것을 이용해 ① $\int_0^2 h(x)dx$의 값이 최대인 것을 이용할 수도 있고

② $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$의 값 자체를 이용해서 구할 수도 있다. 양쪽 다 연습해보자.

① $\int_0^2 h(x)dx=\{(b-a)+(2-0)\}\times ka\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}ka(2+b-a)=\frac{1}{2}ka(4-2a)=ka(2-a)$ ($\because \boxed{1}$),

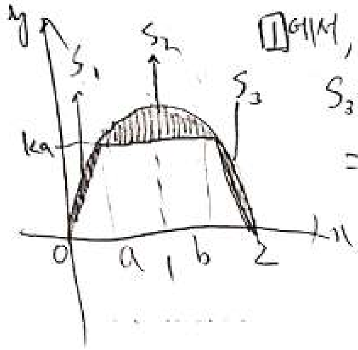
$h(a)\le g(a)=a(2-a)$에서, $k\le 2-a$이므로 ($\because 0<a<2$) $ka(2-a)\le a(2-a)^2=a(a-2)^2$

$a(a-2)^2$의 개형이 다음과 같으므로 $\int_0^2 h(x)dx$의 최댓값은 $a=\frac{2}{3}$일 때이다. $\therefore b=\frac{4}{3}, k=\frac{4}{3}$에서,



$60(k+a+b)=60\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)=200$이다.

② $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}$의 값이 최소이므로 $h(x)$와 $g(x)$가 만날 때 최소임을 직관적으로 알 수 있다. 이를 그래프로 표현하면,



① 에서, $a+b=2$ 이므로 $b=2-a$ 에서, $S_1=\frac{1}{6}(a-0)^3$, $S_2=\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{1}{6}(2-2a)^3$

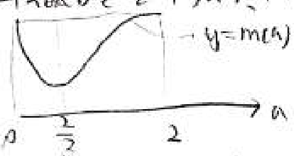
$S_3=\frac{1}{6}(2-b)^3=\frac{1}{6}a^3$ 이므로 $S_1+S_2+S_3=\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$

$=\frac{-6a^3+24a^2-24a+8}{6}$ 이다. $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx=m(a)$ 라 하면,

$m'(a)=\frac{1}{6}(-18a^2+48a-24)=-3a^2+8a-4=-3(a-\frac{2}{3})(a-2)$ 에서,

$a=\frac{2}{3}$ 에서 극솟값을 가짐을 알 수 있고, $0<a<2$ 에서, $a=\frac{2}{3}$ 일 때

$m(a)$가 동시에 최솟값임을 알 수 있다. (의심될 시 $m(a)$를 그려 증명 가능하다.)



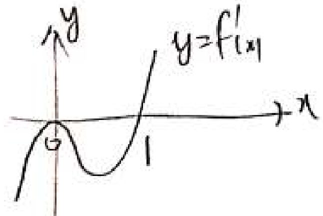
$\therefore a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{4}{3}$ 이고, $f(a)=f(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=ka=\frac{2}{3}k$ 이므로 $k=\frac{4}{3}$ 이다.

$\therefore 60(k+a+b)=60(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3})=200$ 이다.

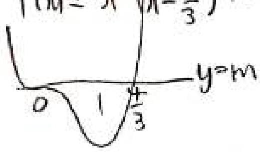
개인적으로는 ② 풀이로 풀었으면 한다. ①로도 충분히 풀리지만 수식 계산이 메인이라 a와 b가 $x=1$ 에 대한 대칭임을 ②보다 눈치채기 어렵다. (애초에 $g(x)$가 $x=1$ 에 대해 대칭이므로 굳이 수식을 쓰지 않아도 $g(a)=g(2-a)=g(b)$ 에서 $a+b=2$ 임이 나온다!) 문제 자체는 쉽게 풀리지만 생각해볼 만한 점이 많은 문제이다.

2-8

$(-\infty, 0)$, $(0, k)$ 에서 $f'(x)<0$ 이므로 (단 $k>0$) $f'(x)=4x^2(x-k)$ 이다. $f'(2)=16(2-k)=16$ 에서 $k=1$ 이고, $f'(x)$가 다음 그래프와 같으므로 $f(x)$의 개형을 구할 수 있다.



$f(x)=x^3(x-\frac{4}{3})+m$ (m이 정해져있지 않다!)



ㄱ. → $(0, 2)$ 에서 $x=1$ 에서 실근 1개를 갖는다 (참)
ㄴ. → $f(x)$는 극솟값만을 가진다. (참)
ㄷ. → $f(0)=0=m$ 에서, $f(x)\geq f(1)=-\frac{1}{3}$ (참)

→ ⑤

2-9 19학년도 7월 평가원 나형 30번

이과생이면 삼차함수가 변곡점 대칭임을 이용해 $f'(1)<0, f'(2)<0, f'(0)-f(1)=6$ 조건 없이도 풀 수 있다.

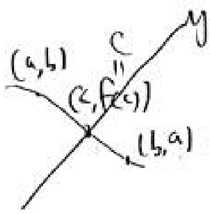
$f(f(x))=x$인 경우

↱솔직히 결과적으론 크게 상관x

i) 해당구간에서 $f(x)$가 감소 $f(x)$가 $(a,b), (b,a)$를 지난다 하자. (단, $a<b$)

$f(f(a))=f(b)=a$

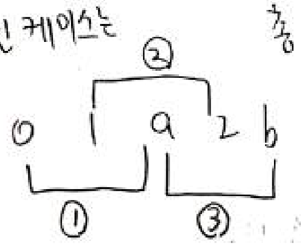
$f(f(b))=f(a)=b$



$f(x)-x=k(x)$라 하면, $k(a)>0$ $k(b)<0$이고, $k(x)$는 $[a,b]$에서 연속이므로 $a<c<b$에서 $k(c)=0$인 실수 c가 반드시 존재한다.

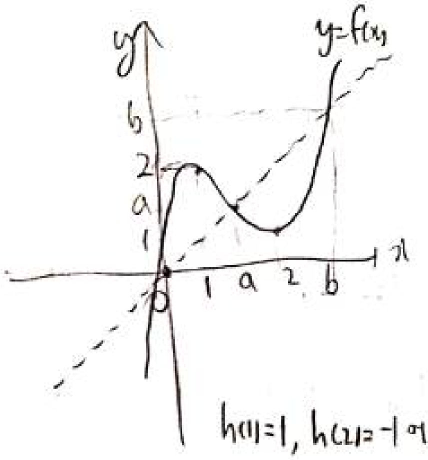
ii) 해당구간에서 $f(x)$가 증가 → $y=x$ 위에 점 존재

i)에 의해, i)인 케이스는 총 3가지가 나온다.

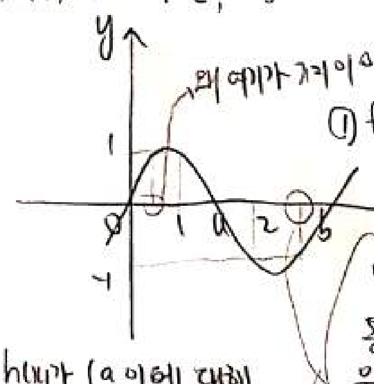


①,③의 경우
①은 $(f(0)=a, f(a)=0)$ $x<0$인 지점에서 $y=x$와의 교점 존재 (모순)
③은 $(f(a)=b, f(b)=a)$ $x>b$인 지점에서 $y=x$와의 교점 존재 (모순)

∴ ②처럼 $f(1)=2, f(2)=1$이다. (2개 i)와 같이 $f(x)$가 감소일 때가 생기냐면, $f(x)$가 삼차함수일 때는 $f(f(x))=x$를 만족하는 실근 x의 개수가 증가함수일 시 최대 3개이므로 조건에 대해 모순.)



$h(x)=f(x)-x$라 하면, 다음과 같은 그래프를 그릴 수 있다.



↱왜 여기가 거기이 아니냐고 확정 지을 수 있냐면

① $f'(1)<0$ 조건 쓸 시에는 자명 $(\because f'(1)<0 \to f'(1)-1<0)$

② $f'(1)<0$조건 안 쓸 시에 만일 저기가 거기이면 $a>\sqrt{3}$임을 통해 $x=2$에서의 위치의 모순으로 유도가능

이 경우도 동일한 원리

아마 이 경우를 따지기 껄끄러워서 $f'(1)<0, f'(2)<0$인을 준 듯하다.

$h(1)=1, h(2)=-1$에서, $h(x)$가 $(a,0)$에 대해 변곡점 대칭이란 것을 파악가능

∴ $a=\frac{3}{2}$이고, $h(0)$에서, $h(3)=h(b)=0 \to b=3$

$h(1)=k=1$에서, $f(x)=x(x-\frac{3}{2})(x-3)+x$

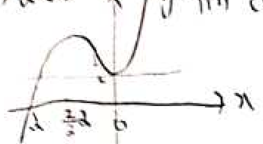
$\therefore f(5)=5\times\frac{7}{2}\times2+5=40$

2-10 20학년도 6월 평가원 나형 18번

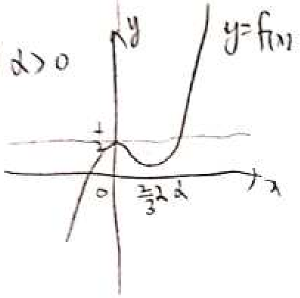
$g(x)$가 실수 전체 집합에서 미분가능하므로 $\lim_{x\to 0-} g'(x) = \lim_{x\to 0+} g'(x) = \lim_{x \to 0+} f'(x) = 0 = g'(0)$

$f(x)$가 삼차함수이므로 $f(x) = x^2(x-\alpha)+\frac{1}{2}$ (α는 상수)이다. i) $\alpha<0$일 때와 ii) $\alpha>0$일 때를 나누면

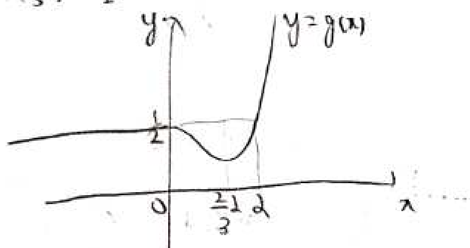
i) $\alpha<0$ $y=f(x)$ 다음과 같은 개형이므로, $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작다는 조건에 모순



ii) $\alpha>0$



$f(\frac{2}{3}\alpha)<\frac{1}{2}$ 이므로 조건을 만족한다. 따라서 확정된 $g(x)$는 다음과 같다.



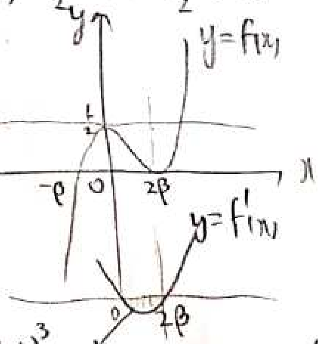
ㄱ → $g(0)=\frac{1}{2}$, $g'(0)=0$ (참)

ㄴ → $g(1)=1-\alpha+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\alpha$, $\alpha>0$이므로 $\frac{3}{2}-\alpha<\frac{3}{2}$ (참)

ㄷ → $g(\frac{2}{3}\alpha)=f(\frac{2}{3}\alpha)=-\frac{4}{27}\alpha^3+\frac{1}{2}=0$에서, $\alpha=\frac{3}{2}$ → $g(2)=\frac{17}{2}-4\alpha=\frac{5}{2}$ (참)

→ ⑤

다만, 이 관점도 참고해보자. $g(x)$가 최소일 때 값이 0 → 눈치챘을지도 모르겠지만, 30번 문항에서의 아이디어를 그대로 갖다 쓸 수 있다.



$\frac{(2\beta-0)^3}{6}\times 3=4\beta^3=\frac{1}{2} \rightarrow \beta=\frac{1}{2}$

$f(x)=(x+\frac{1}{2})(x-1)^2$에서, $g(1)=f(1)=\frac{5}{2}$

Chapter 3 문제

3-1. 16학년도 6월 평가원 21번

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ 이기에

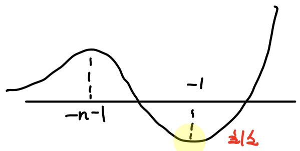
모든 x에 대해 $f'(x) \ge 0$

④

$f'(x) = e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$

$f''(x) = e^{x+1}(x^2+(n+2)x+n+1)$

$= e^{x+1}(x+n+1)(x+1)$



$f'(-1) \ge 0$

$(2-n)+a \ge 0$

$a \ge n-2$

$g(n) = n-2 \Rightarrow 3 \le n \le 10$

$55-3=52$

3-2. 17년 7월 교육청 20번

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x \frac{t}{f(t)}dt$$

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=-g'(x)$이다. (나) 점 $(1, g(1))$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

$g'(x) = \frac{x}{f(x)} \Rightarrow$ 이함수 이므로 $f(x)$ 우함수!

$f(x) = x^2+a$

$g(0)=0$

$g(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{5}\ln 2$ ② $\frac{1}{4}\ln 2$ ③ $\frac{1}{3}\ln 2$ ④ $\frac{1}{2}\ln 2$ ⑤ $\ln 2$

④

$g''(1)=0$

$g''(x) = \frac{f(x)-xf'(x)}{f^2(x)}$

$f(1)=f'(1)$

$a+1=2$

$a=1$

$f(x)=x^2+1$

$g(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

3-3. 13학년도 수능 21번

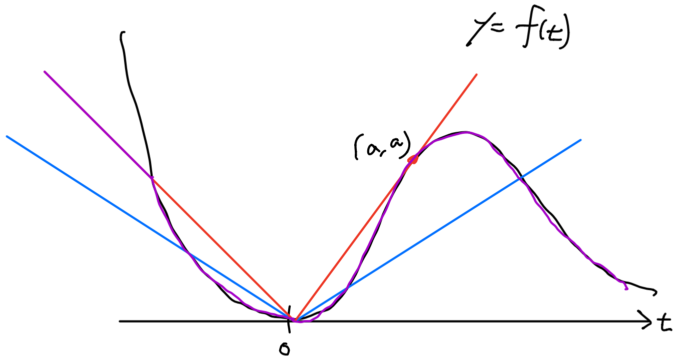
$|t|$

함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? [4점]

$|f(t)|$

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

⑤



$$g(t)=\begin{cases} |f(t)| = f(t) & (f(t) \le |t|) \\ |t| & (f(t) \ge |t|) \end{cases}$$

항상 $f(t) \ge 0$

$f'(x) = k(-x^2+2x)e^{-x}$

$a = ka^2e^{-a}$ $\quad 1 = kae^{-a}$

$1 = k(-a^2+2a)e^{-a}$

$1 = -a+2$ $\quad a=1,\ k=e$

3-4. 19학년도 3월 교육청 20번

함수 $f(x)=x^2+ax+b$ $\left(0<b<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 함수 $g(x)=\sin(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=-g'(x)$이다. $\Rightarrow$ $f(x)$ 우함수, $a=0$
(나) 점 $(k, g(k))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이고 $2kg(k)=\sqrt{3}g'(k)$이다.

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$ ④ $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

$2k\sin(f(k)) = \sqrt{3}$ ③

$a=0$

$2k$
$\parallel$

$b = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$g''(k)=0$

$2k\sin(f(k)) = \sqrt{3}\cos(f(k))f'(k)$

$g(x) = \sin(f(x))$

$\tan(f(k)) = \sqrt{3}$ $\quad f(k) = \frac{\pi}{3} = k^2+b$

$g'(x) = \cos(f(x))f'(x)$

$-4k^2\sin(f(k)) + 2\cos(f(k)) = 0$

$g''(x) = -\sin(f(x))f'^2(x) + \cos(f(x))f''(x)$

$\sqrt{3} = \frac{1}{2k^2} = \tan(f(k))$

$k^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

3−5. 16년 10월 교육청 21번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
(다) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pi$

3

함수 $g(x)=\dfrac{\sin f(x)}{x}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

$\sin f(x) \to$ 우, $x \to$ 기

<보 기>

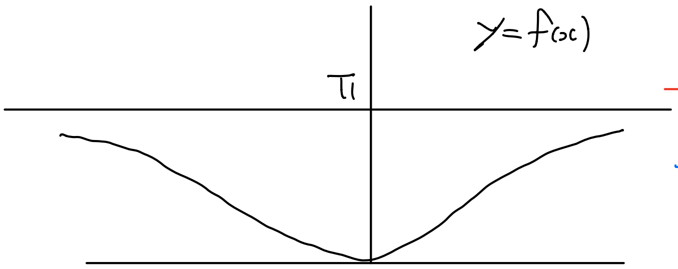
ㄱ. 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)+g(-x)=0$이다. $g(x)$ 기함수

ㄴ. $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ $\quad \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}\times\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)=0$

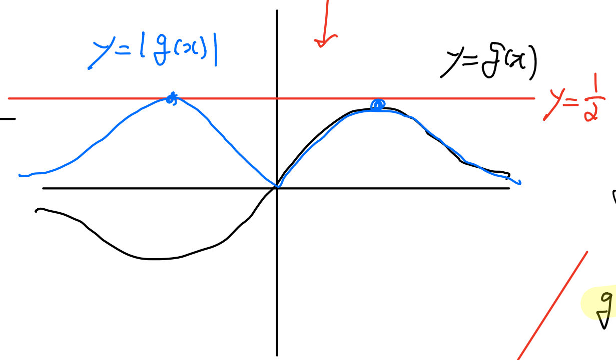
~~ㄷ.~~ $f(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}$ $(\alpha>0)$이면 방정식 $|g(x)|=\dfrac{1}{\alpha}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

만족하려면 $g'(\alpha)=0$이 되어야 함!

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$f'(0)=0$



$g(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$

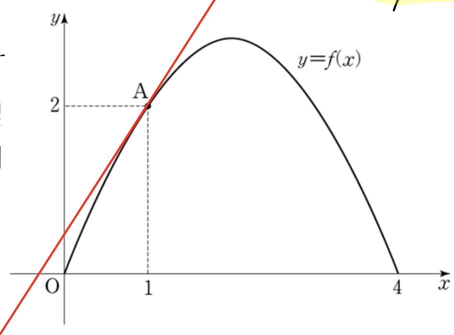
$g'(x)=\dfrac{x\cos f(x) f'(x)-2x\sin f(x)}{x^2}$

$g'(\alpha)=\dfrac{-2\alpha}{\alpha^2}$

$\neq 0$

3−6. 16학년도 6월 평가원 14번

닫힌 구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}x$의 그래프가 그림과 같고 직선 $y=g(x)$가 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 지난다. 일차함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0,4]$에서 $f(x)\le g(x)$를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은? [4점]



① π ② $\pi+1$ ③ $\pi+2$
④ $\pi+3$ ⑤ $\pi+4$

3

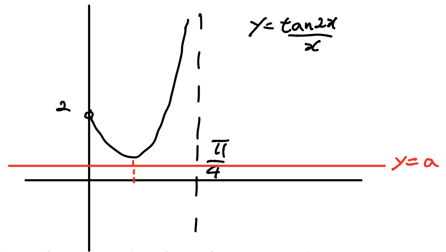
$f'(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi\cos\dfrac{\pi}{4}x$

$f'(1)=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad g(x)=\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{2}+2$

$g(3)=\pi+2$

* 2번째 풀이

$\frac{\tan 2x}{x} > a$

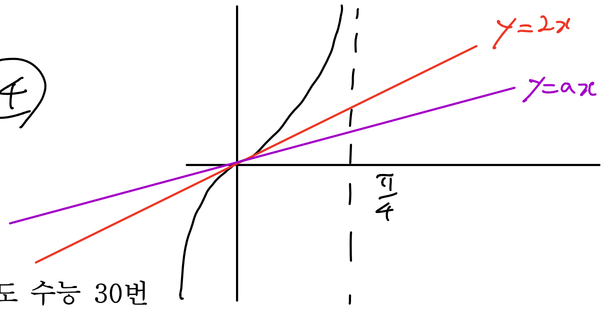


3−7. 05학년도 9월 평가원 26번

$0 < x < \frac{\pi}{4}$인 모든 x 에 대하여 부등식 $\tan 2x > ax$ 를 만족하는 a 의 최댓값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$　　④ 2　　⑤ $\frac{5}{2}$

4



$y' = 2\sec^2 2x$

$a \leq 2$

3−8. 06학년도 수능 30번

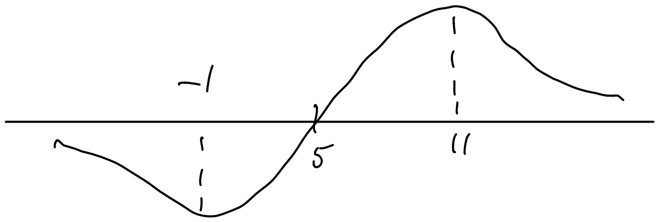
양수 a에 대하여 닫힌 구간 $[-a, a]$에서 함수

$$f(x) = \frac{x-5}{(x-5)^2+36} \Leftarrow \frac{x}{x^2+36}$$

x 방향으로 5만큼 평행이동

$$y' = \frac{x^2+36-2x^2}{(x^2+36)^2}$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M+m=0$이 되도록 하는 a의 최솟값을 구하시오. [4점]



$a \geq 11$

11

3−9. 17년 7월 교육청 17번

함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{k}{x}$ 가 열린 구간 $(0, \infty)$에서 증가할 때, 실수 k 의 최솟값은? [4점]

$f'(x) \geq 0$

3

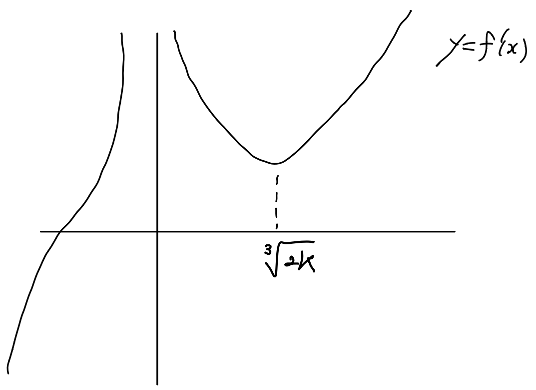
① 3　　② $\frac{7}{2}$　　③ 4　　④ $\frac{9}{2}$　　⑤ 5

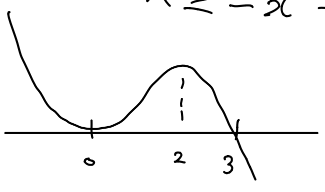
$f'(x) = x - 3 + \frac{k}{x^2}$

$f''(x) = 1 - \frac{2k}{x^3}$

$x - 3 + \frac{k}{x^2} \geq 0$

$k \geq -x^3 + 3x^2$





$k \geq 4$

$f(x) = \frac{2\ln x}{x}\ (x>0)$ $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$

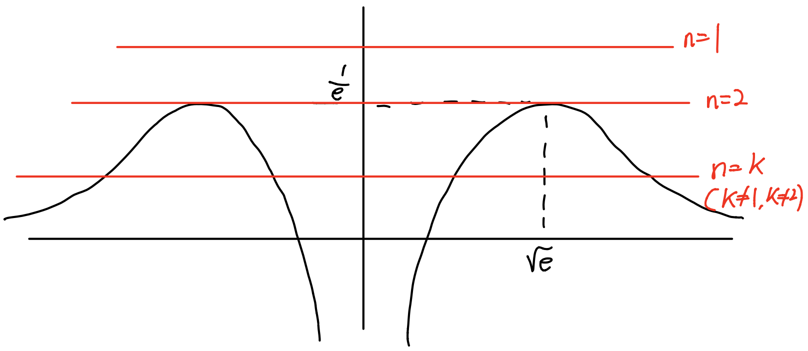
3−10. 14년 4월 교육청 30번

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$의 극댓값을 α라 하자. 함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)-\dfrac{\alpha}{n}x=0$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

$\frac{f(x)}{x} = \frac{\alpha}{n}$

$g(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$ $g'(x) = \frac{2x(1-2\ln x)}{x^4}\ (x>0)$ $\alpha = f(e) = \frac{2}{e}$

34



$g(x) = \frac{2}{ne}$

	a_n
$n=1$	0
$n=2$	2
$n\geq 3$	4

$2+4\times 8 = 34$

3−11. 17년 7월 교육청 30번

상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수인 이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $g(x)$가

(항상 $e^{f(x)}>0$ 이므로) $|f'(x)e^{f(x)}| = g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$

축 대칭

$f(x)$가 $x=a$ 대칭이라면

$f'(x)$는 $(a, f(a))$ 대칭이다. (일차함수가 원래 점대칭이기도 하고)

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$f'(x)$가 일차함수여서 $g(x)=0$이 되는 극점이 존재할수밖에 없음.

$\Downarrow$

$g(2)=0$

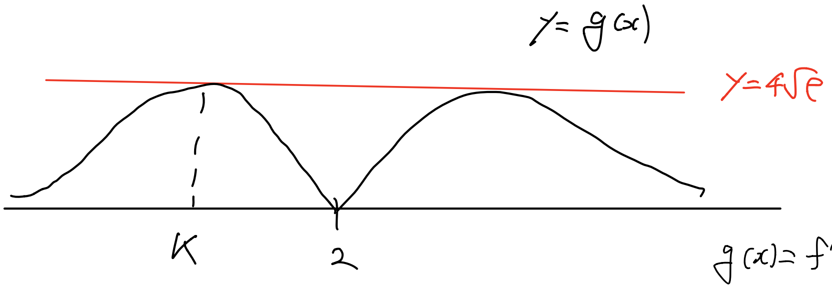
> (가) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $4\sqrt{e}$이다.
> (다) 방정식 $g(x)=4\sqrt{e}$의 근은 모두 유리수이다.

$\Downarrow$

$y=f'(x)e^{f(x)}$는 $(a, f(a))$ 대칭

$|f(-1)|$의 값을 구하시오. [4점]

71



$g(x) = f'(x)e^{f(x)}\ (x\geq 2)$

$g(2)=0 \Rightarrow f'(2)=0$ $g'(k)=0$

$g(k)=4\sqrt{e}$

$g'(x) = f''(x)e^{f(x)} + f'^2(x)e^{f(x)}\ (x\geq 2)$

$f'^2(k)+f''(k)=0$

$f'(k)e^{f(k)} = 4\sqrt{e}$

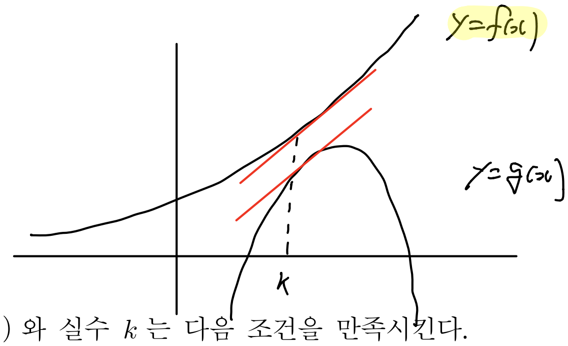
$\Downarrow$ 유리수

$f(k)=\frac{1}{2},\ f'(k)=4,\ f''(k)=-16$

$(a<0)$ $f(x)=a(x-2)^2+b$

$f''(x)=-16$ $f'(x)=-16x+32$ $(k=\frac{7}{4})$ $f(x)=-8(x-2)^2+1$

$|f(-1)|=71$



합성함수 그래프

3−12. 18학년도 9월 평가원 30번

함수 $f(x)=\ln(e^x+1)+2e^x$ 에 대하여 이차함수 $g(x)$ 와 실수 k 는 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $h(x)=|g(x)-f(x-k)|$ 는 $x=k$ 에서 최솟값 $g(k)$ 를 갖고, 닫힌구간 $[k-1,\ k+1]$ 에서 최댓값 $2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$ 를 갖는다.

$g'\left(k-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. (단, $\frac{5}{2}<e<3$ 이다.) [4점]

6

최댓값 $h(k+1) = f(1) - g(k+1) = 2e+\ln(e+1) - g(k+1)$

그러면 $h(k)=g(k)=0$ 일까?

$g(k+1) = \frac{1}{2}\ln 2$

$h(k) = |g(k) - f(0)| = 2+\ln 2 \neq 0$

인수정리(고1)

모순 발생! 따라서 $h(x) = f(x-k) - g(x)$

$g(x) = a(x-k)(x-k-1) - x+k+1 + \frac{1}{2}\ln 2$

$g'(x) = a(x-k-1) + a(x-k) - 1$

$h(k) = f(0) - g(k) = g(k)$

$f(x-k)$가 $g(x)$보다 증가 속도 훨씬 빠름.

$-a-1 = \frac{5}{2}$ $\quad a = -\frac{7}{2}$

$g(k) = \frac{f(0)}{2} = 1+\frac{1}{2}\ln 2$

$h'(k)=0,\ g'(k) = \frac{5}{2}$

$g'(k-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}a - \frac{a}{2} - 1 = -2a-1 = 6$

3−13. 16년 4월 교육청 27번

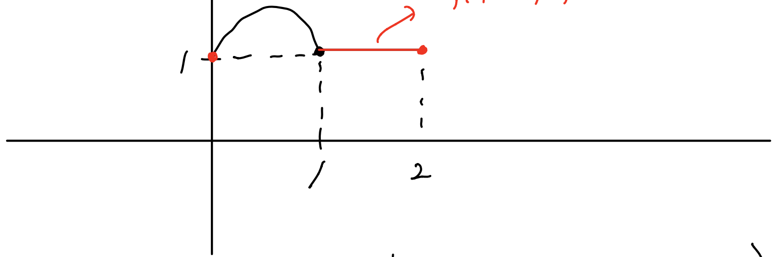
모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.
> (나) $0\le x\le 1$일 때, $f(x)=\sin\pi x+1$이다.
> (다) $1<x<2$일 때, $f'(x)\ge 0$이다.

$\int_0^6 f(x)dx = p+\frac{q}{\pi}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]

$f(2)=f(0)$

$f(x)$ 연속, $f'(x)\ge 0$ 이기에.



12

$3\left\{\int_0^1 \sin\pi x+1\ dx + 1\right\} = 3\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x + x\right]_0^1 + 3 = \frac{6}{\pi} + 6$

3−14. 10년 10월 교육청 28번

연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+2)$ 이다.
(나) $\int_1^{\frac{3}{2}} f(2x)dx = 7$, $\int_1^{\frac{4}{3}} f(3x)dx = 1$

$\int_{2001}^{2012} f(x)dx$ 의 값은? [3점]

$\int_1^{11} f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + 5\int_2^4 f(x)dx =$

4

① 65 ② 71 ③ 82 ④ 88 ⑤ 99

$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_2^3 f(x)\,dx = 14$

$3 + 5\times 17 = 88$

$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_3^4 f(x)\,dx = 3$

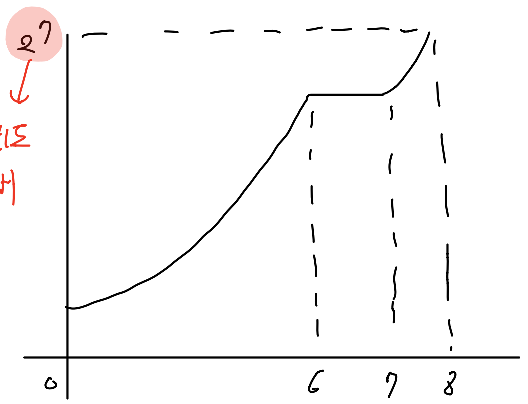
3−15. 16학년도 6월 평가원 30번

정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 8\}$ 이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$ 의 최댓값은 $p + \frac{q}{\ln 2}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 자연수이고, $\ln 2$ 는 무리수이다.) [4점]

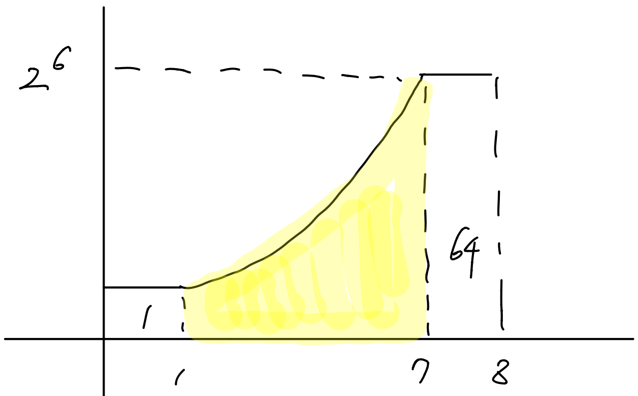
(가) $f(0) = 1$ 이고 $f(8) \le 100$ 이다.
(나) $0 \le k \le 7$ 인 각각의 정수 k 에 대하여 $f(k+t) = f(k)$ $(0 < t \le 1)$ 또는 $f(k+t) = 2^t \times f(k)$ $(0 < t \le 1)$ 이다.
(다) 열린 구간 $(0, 8)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2 이다.

$2^6 = 64$ $2^7 = 128$

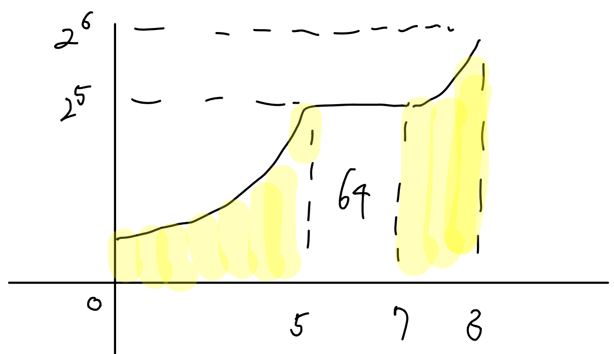
K 직접 대입으로 상황파악!



아쉽게도 조건(가) 위배



128



노란부분 넓이 $\int_0^6 2^x dx$로 공통!!

$65 + \int_0^6 2^x dx = 65 + \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^6$

$= 65 + \frac{63}{\ln 2}$

노예님 손풀이 157~162

3−16. 18학년도 수능 30번

실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x-t| & (|x-t|\le 1) \\ 0 & (|x-t|>1) \end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]

3−17. 17년 4월 교육청 30번

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0과 2뿐이고 허근은 존재하지 않는다.

(나) $\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)^3}{f(x)}$이 존재한다.

(다) 함수 $\left|\frac{g(x)}{x}\right|$는 $x=\frac{5}{4}$에서 연속이고 미분가능하지 않다.

함수 $g(x)$의 극솟값을 k라 할 때, $27k$의 값을 구하시오. [4점]

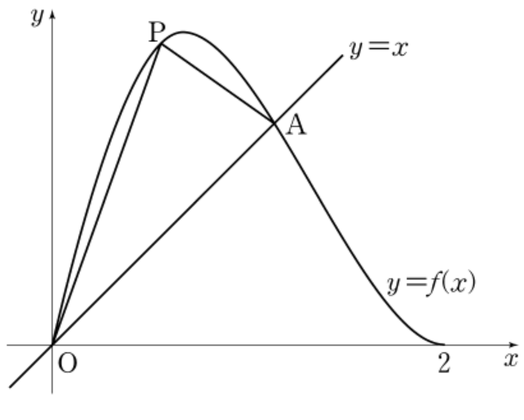
3−18. 13학년도 9월 평가원 나형 19번

닫힌 구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수

$$f(x) = ax(x-2)^2 \quad \left(a > \frac{1}{2}\right)$$

에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y = f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이다. 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{17}{12}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{19}{12}$



3-19. 18학년도 수능 나형 29번

두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le a) \\ (x-1)^2(2x+1) & (x > a) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} 0 & (x \le k) \\ 12(x-k) & (x > k) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오. [4점]

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

3-20. 19학년도 수능 나형 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
(나) 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
(다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x > 0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

3-21. 20학년도 6월 평가원 나형 30번

최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

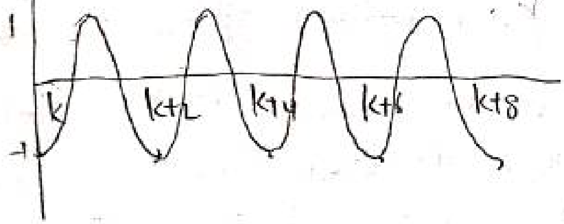
> 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1$ 또는 $t \geq 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

3-16 18학년도 수능 30번

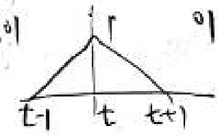
개인적으로 역대 수능 문제 중에 가장 해설하기 힘든 문제가 아닌가 싶다. 일단 ①같은 해 9월 평가원 21번의 풀이와 연계하며 다소 직관적인 풀이와 ②계산을 통해 증명하는 풀이 2개를 작성할 예정이다. 하지만 실제로 현장에서 맞은 사람들은 대개 ① 같이 직관을 바로 이용하여 풀었으니 너무 수식으로 푸는 ②풀이와 같은 것에 집착하지 않았으면 한다. 그냥 편하게 논술 공부한다 생각하고 보자.

① k가 홀수이므로 $\cos(k\pi)=-1$, $\cos(\pi x)$의 주기가 2이므로 $\cos(\pi x)$의 그래프는 다음과 같다.



여기에 $f(x)$를 곱해 극소를 만들고 싶으면, t를 이동해 가며 극소가 될 만한 범위를 찾으면 된다.

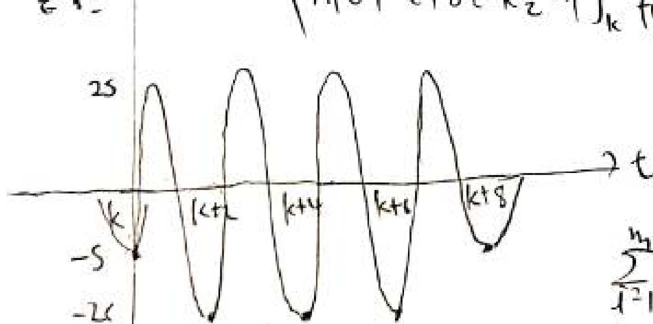
$f(x)$ 개형이



이 꼴이니 $t+1 \le k (= t \le k-1)$ 이거나 $t-1 \ge k+8 (= t \ge k+9)$ 일 경우에는 $\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx = 0$이다.

$k-1 < t < k+9$에서 t를 움직이다 보면, $t=k, k+2, k+4, k+6, k+8$일 때 극소가 되고, $t=k$나 $k+8$일 경우에는 $t=k+2, k+4, k+6$과 비교 시 $\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$의 값이 절반임을 알 수 있다. ($\because f(x)$가 $x=t$에 대한 대칭인데, $f(x)$의 절반부분이 범위에 들어오지 못함) $\therefore g(t)$의 그래프 개형을 그려보면 다음과 같다.

(계산의 편의상 $t=k$일 때 $\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$를 $-s$라 했다.)



$d_1=k$, $d_2=k+2$, $d_3=k+4$, $d_4=k+6$, $d_5=k+8$

$m=5$에서, $\sum_{i=1}^{m} d_i = 5(k+4) = 45 \rightarrow k=5$

$\sum_{i=1}^{m} g(d_i) = -s-2s-2s-2s-s = -8s$에서,

$s = \int_k^{k+8} \{1-|x-k|\}\cos(\pi x)dx = \int_1^9 \{1-|x-1|\}\cos(\pi x)dx$

$(k-1)$은 짝수이므로 주기성에 의해 같은 값

$x=1$에 대해 대칭

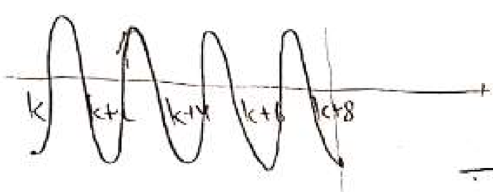
$= \int_1^2 (2-x)\cos(\pi x)dx = \int_0^1 x\cos(\pi x)dx$

$= \left[(x)\left(\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right) - (1)\left(-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right)\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}$이므로 $8s = -\frac{16}{\pi^2}$

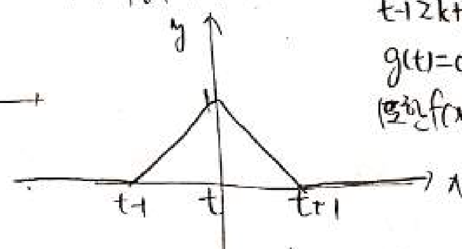
$\therefore k - \pi^2 \sum_{i=1}^{m} g(d_i) = 5 + \pi^2 \times \frac{16}{\pi^2}$

$= 21$

② $\cos(\pi x)$ 개형은 $k \le x \le k+8$ 에서 다음과 같다. (단, k는 홀수)

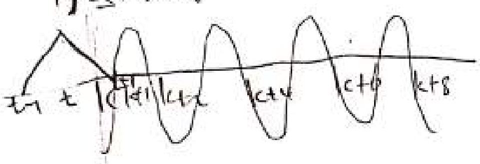


$f(x)$ 개형이 아래 그림과 같으므로, $t+1 \le k$ $(t \le k-1)$ 이나 $t-1 \ge k+8$ $(t \ge k+9)$ 일 때는 $g(t)=0$ 이다.



(또한 $f(x)$가 $x=t$에 대칭임도 알 수 있다. 이를 알고 있자.)

i) $t \le k < t+1$ $(= k-1 < t \le k)$



$f(x)$가 $x=t$에 대해 대칭이고, $\cos(\pi x)$가 $x=k+4$에 대해 대칭이므로 $t-1 \ge k$, $t+1 \le k+8$ 인 범위 $k+1 \le t \le k+7$ 에서 $\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx = \int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$ 이므로 $g(t)$가 $t=k+4$에 대해 대칭임을 알 수 있다. ∴ $k-1 \le t \le k+4$에 대해서만 따지면 $[k, k+8]$ 에서의 그래프 개형을 구할 수 있다.

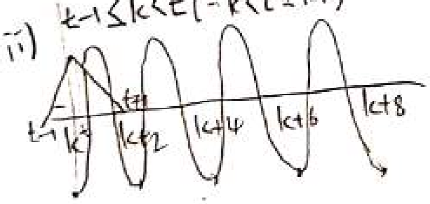
$$\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx = \int_k^{t+1} (t+1-x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= (t+1)\int_k^{t+1} \cos(\pi x)\,dx - \int_k^{t+1} x\cos(\pi x)\,dx = (t+1)\left(\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right)_k^{t+1} - \left[(x)\left(\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right]_k^{t+1}$$

$$= \frac{(t+1)\sin(\pi t+\pi)}{\pi} - \frac{1}{\pi}(t+1)\sin(\pi t+\pi) - \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t+\pi) - \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2}(\cos(\pi t) - 1)$$ k가 홀수이므로

$k-1 < t \le k$ 에서 $g(t)$는 감소한다. (의심이 가면 t에 대해 미분해서 $g'(t) = -\frac{1}{\pi}\sin(\pi t) < 0$ 으로 보일 수도 있다.)

ii) $t-1 \le k < t$ $(= k < t \le k+1)$



$$\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx = \int_k^t (x-t+1)\cos(\pi x)\,dx + \int_t^{t+1} (-x+t+1)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= (1-t)\int_k^t \cos(\pi x)\,dx + \int_k^t x\cos(\pi x)\,dx + (t+1)\int_t^{t+1} \cos(\pi x)\,dx$$

$$- \int_t^{t+1} x\cos(\pi x)\,dx = (1-t)\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_k^t + \left[\frac{x}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right]_k^t$$

$$+ (t+1)\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_t^{t+1} - \left[\frac{x}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right]_t^{t+1} = \frac{(1-t)}{\pi}\sin(\pi t)$$

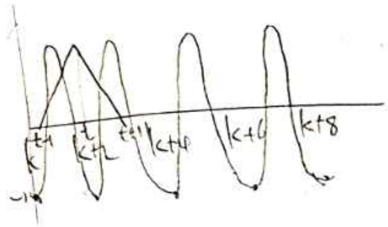
$$+ \frac{t}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t) + \frac{1}{\pi^2} - \frac{2(t+1)}{\pi}\sin(\pi t) - \frac{2t+1}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi t)$$

$$\frac{3\cos(\pi t)+1}{\pi^2}$$

i)과 비슷한 원리로 k가 홀수이므로 $k < t \le k+1$ 에서 $g(t)$는 증가한다.

→ i)과 ii)에서, $t=k$일 때 $g(t)$는 극솟값 $-\frac{2}{\pi^2}$을 갖는다.

iii) $k < t-1$ ($= k+1 < t$), (단, $t \le k+4$) → ($k+1 < t \le k+4$)



$$g(t) = \int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx = \int_{t-1}^{t} (x-t+1)\cos(\pi x)\,dx + \int_t^{t+1} (t+1-x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= (1-t)\int_{t-1}^{t} \cos(\pi x)\,dx + \int_{t-1}^{t} x\cos(\pi x)\,dx + (t+1)\int_t^{t+1} \cos(\pi x)\,dx$$

$$- \int_t^{t+1} x\cos(\pi x)\,dx = (1-t)\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{t-1}^{t} + \left[\frac{x}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right]_{t-1}^{t}$$

$$+ (t+1)\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_t^{t+1} - \left[\frac{x}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right]_t^{t+1} = \frac{2(t-1)}{\pi}\sin(\pi t)$$

$$+ \frac{2t-1}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi t) - \frac{2t+2}{\pi}\sin(\pi t) - \frac{2t+1}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi t)$$

$= \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t)$ $[k+1, k+4]$에서, $g(t)$는 $t = k+2, k+4$에서 최소이고,

$g(t)$가 $t = k+4$에 대해 대칭이므로 $g(t)$는 i), ii), iii)에 의해, $t = k, k+2, k+4, k+6, k+8$ 에서 극솟값을 가지게 된다. 단, $g(k+2) = g(k+4) = g(k+6) = -\frac{4}{\pi^2}$ 이고, $g(k) = g(k+8) = -\frac{2}{\pi^2}$ 이므로 $\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$ $= \sum_{i=1}^{5} g(\alpha_i) = -\frac{2}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^2} = -\frac{16}{\pi^2}$ 이다. $\sum_{k=1}^{m} \alpha_i = \sum_{k=1}^{5} \alpha_i = 5(k+4) = 45$에서,

$k = 5$이므로 $k - \pi^2 \sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i) = 5 - \pi^2 \times \left(-\frac{16}{\pi^2}\right) = 21$ 이다.

② 풀이는 진심 풀이 방법을 알아도 정말 쓰기 어렵다. 최대한 ①에 가깝게 풀려 시도해보자.

3-17. 17년 4월 교육청 30번

'계산파티다'. 의외로 계산으로 밀어붙이다 보면 어찌어찌 답은 나와서 절대적 난이도는 높지 않지만, 평소에 보지 않는 9차식이 나와서 구하고도 당황한 학생들이 많지 않았을까 한다. 한번 정도는 봐볼 만한 문제지만 말 그대로 '한 번쯤만'.....

(가)에 의해 $f(x)=x^a(x-2)^b$ (a, b는 자연수)로 둘 수 있고, (나)에 의해, $b\le 3$임을 알 수 있다.

$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$에서, $\frac{g(x)}{x}=1-\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\frac{x^a(x-2)^b}{x^a(x-2)^{b-1}\{(a+b)x-2a\}}=1-\frac{x-2}{(a+b)x-2a}=\frac{(a+b-1)x-2a+2}{(a+b)x-2a}$

에서, (다)에 의해, $\frac{5}{4}(a+b-1)-2a+2=0$이므로 $5b=3(a-1)$임을 알 수 있다. 이때, a, b 모두 자연수이므로 b가 자연수 중 최솟값이 3에서, $b=3$으로 유일함을 보일 수 있다. $b=3$, $a-1=5$에서, $a=6$이다. $\therefore f(x)=x^6(x-2)^3$이므로 $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x^2-2x}{9x-12}=\frac{8x^2-10x}{9x-12}$이다.

$\therefore g'(x)=\frac{(16x-10)(9x-12)-9(8x^2-10x)}{9(3x-4)^2}=\frac{8}{3}\times\frac{(x-1)(3x-5)}{(3x-4)^2}$에서, $x=\frac{5}{3}$일 때 극소임을 알 수 있으므로

$g\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{\frac{5}{3}}{3}\times\frac{10}{3}=\frac{50}{27}$에서, $k=\frac{50}{27}$ $\therefore 27k=50$이다.

솔직히 그닥 맘에 드는 문제는 아니다.... 그냥 식 정리하는 문제라고 생각한다.

3-18 13학년도 9월 평가원 나형 19번

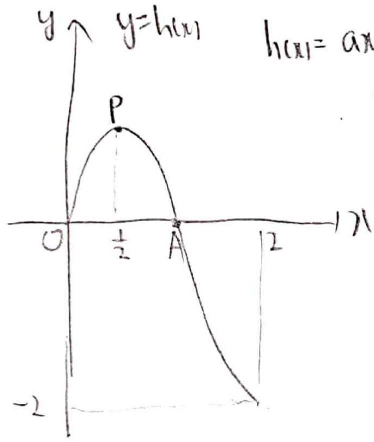
① 그냥 단순히 답만 내고 실에서 푸는 풀이와 ② 일관성 있게 다른 기출에도 반복되는 풀이가 사뭇 다르다.

두 가지 풀이 모두 알되, 공부할 때는 ②로, 현장에서는 ①로 쉽게쉽게 할 수 있도록 연습하자.

① △OAP가 최대일 때는 $f'(x)=1$인 점에서이므로 $f'(x)=3a(x-\frac{2}{3})(x-2)$에서 $f'(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}a=1$

$\rightarrow a=\frac{4}{3}$

② $f(x)-x=h(x)$라 하자. $h(x)$를 그래프로 표현할시 다음과 같다.



$h(x)=ax(x-2)^2-x$에서, $h'(x)=a(x-2)^2+2ax(x-2)-1$

이므로 $h'(\frac{1}{2})=\frac{9}{4}a-\frac{3}{2}a-1=\frac{3}{4}a-1=0$

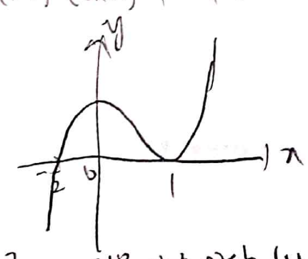
$\therefore a=\frac{4}{3}$

($\because$ △OAP가 최대이므로 점 P는 $h'(x)=0$인 점)

3-19 18학년도 수능 나형 29번

솔직히 약간의 직관이 있는 가형러들은 바로 '당연히 $a=1$이고 $f'(x)=12$일 때 아니야?'이라고 풀 것 같은 문제이기도 하다. 실제로 그게 현장에서는 가장 간단하고 바람직한 풀이라고 보지만, 한 단계 한 단계 밟아가며 풀어보자. 참고로 이 문제는 18학년도 9월 평가원 나형 30번과 아이디어가 같다.
(특히 (나) 조건)

$(x-1)^2(2x+1)$의 개형은 다음과 같다.

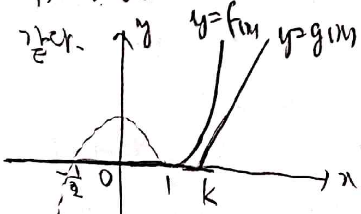


$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $a\neq1$일 경우에는

i) $a\neq-\frac{1}{2}$일 때는 $f(x)$가 불연속인 지점이 생기므로 모순
ii) $a=-\frac{1}{2}$일 때는 $f(x)$가 $x=-\frac{1}{2}$에서 미분불가능하므로 모순

이다.

즉, $a=1$임을 알 수 있다. (나)에 의해, $f(x)\geq g(x)$이므로 $k\geq a=1$이고, 이를 그림으로 표현하면 다음과 같다.



이 때, k가 최소이려면 $f(x)=g(x)$를 만족하는 실수 t에 대해 $f'(t)=g'(t)=12$이므로 $f'(t)=6t(t-1)=12$에서, $t=-1$ or $t=2$이다. $t>0$에서 $t=2$이니 $(2,5)$와 $(k,0)$을 지나는 $g(x)$에서, $\frac{5-0}{2-k}=12\rightarrow k=\frac{19}{12}$이다.

$\therefore a+p+q=1+12+19=32$이다.

3-20 19학년도 수능 나형 30번

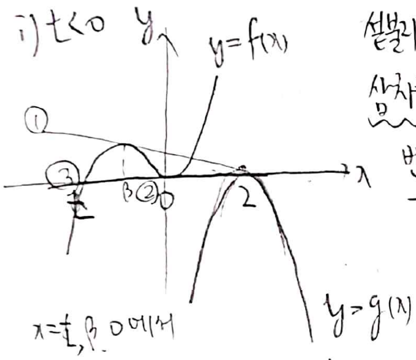
이 문제는 현장에서 그래프 추론을 얼마나 하느냐에 따라 '쉽게' 풀 수도 있고 그게 안 보여 수식으로 '어렵게' 풀 수도 있다. 둘 다 보여줄 거지만 되도록이면 현장에서는 그래프를 그려가며 풀었으면 한다. (수식으로 푸는 풀이는 다소 결과론적이다라는 생각이 들 수도 있다. 이걸 도대체 현장에서 어떻게 바로 한단 말인가...)

① 그래프 개형을 통한 풀이

(가) → $f(0)=f'(0)=0$, $g'(2)=g(2)=0$에서, $f(x)=x^2(x-t)$ (t는 상수), $g(x)=-(x-2)^2$임을 알 수 있다.

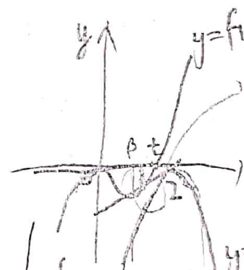
이 때, i) $t<0$ ii) $t>0$ iii) $t=0$으로 경우를 나눠보자.

i) $t<0$



$x=t, \beta, 0$에서 접선이 생기므로 (나)에 모순이다.

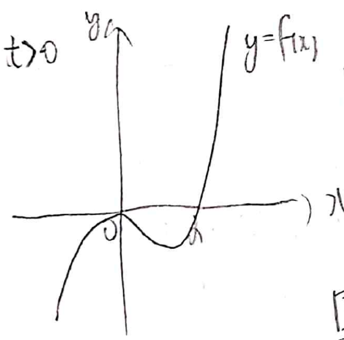
섣불리 여기서 '아, $f(x)$와 $g(x)$는 만나지 않네'라고 판단하지 말자. 삼차함수는 이차함수보다 급격히 커지고 작아진다. $f(x)$와 $g(x)$는 $x<0$에서 반드시 1번 만난다. 정 의심이 가면 $h(x)=f(x)-g(x)$로 잡아 $\lim_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} h(x)=\infty$에서, $(-\infty, 0)$에서 $h(x)$가 연속이므로 사잇값 정리에 의해 $h(c)=0$인 실근 c가 존재함을 보일 수 있다.



(다)를 만족하기 위해서는 $x>0$에서 교점이 없어야 한다.

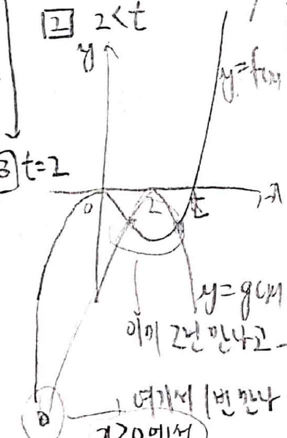
$x=0, \beta, t$에서 접선이 생기므로 (다)에 모순이다.

ii) $t>0$



$\boxed{1}$ $0<t<2$

$\boxed{2}$ $2<t$



$\boxed{3}$ $t=2$

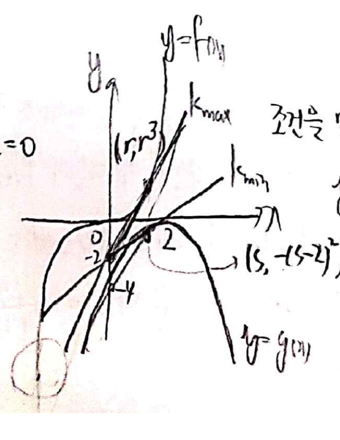
$\boxed{1}$과 동일

이미 2번 만나고

여기서 1번 만나 → 총 3번 만난다. ((다)에 모순)

$x>0$에서

iii) $t=0$



조건을 만족하므로 $g(x)\le kx-2\le f(x)$를 만족하는 실근 k에 대하여, 최댓값은 $y=f(x)$와 접할 때, 최솟값은 $y=g(x)$와 접할 때임을 알 수 있다.

$\because \dfrac{r^3-(-2)}{r-0}=3r^2$에서, $r=1$ → $k_{max}=3r^2=3=\alpha$

$\dfrac{-(s-2)^2-(-2)}{s-0}=-2(s-2)$에서, $s=\sqrt{2}$ ($\because s>0$) → $k_{min}=-2(s-2)=4-2\sqrt{2}=\beta$ 이므로

$\alpha-\beta=3-(4-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}-1$에서, $a^2+b^2=2^2+(-1)^2=5$이다.

② 계산을 이용한 풀이 (개인적으로도 추천하지 않고, 교재에 있는 내용에 입각해서 봐도 일관성은 떨어진다. 단지 수리논술 공부 시에 한 번쯤 볼 만한 풀이인 듯해서 한번 써보는 거니 굳이 기출을 풀 때 이런 풀이에 대해 집착하지 말자. 장담하는데, 현장에서 이렇게만 생각해서 푸는 학생은 극소수이다...)

(가) → $g'(2)=g(2)=0$ 에서, $g(x)=-(x-2)^2$

$f'(0)=f(0)=0$ 에서, $f(x)=x^2(x-t)$ (t는 상수) → $f'(x)=3x^2-2tx$. $(2,0)$에서 $f(x)$에 그은 직선 중에 $f(x)$에 접하는 점의 좌표를 $(m, m^2(m-t))$라 하면, (단, m은 0이 아닌 실수)

$\frac{m^2(m-t)-0}{m-2}=3m^2-2mt=m(3m-2t)$ (단, 이 때, $f(2)=f'(2)=0$을 동시에 만족 못하므로 $m\neq 2$)

$m\neq 0$에서, $(3m-2t)(m-2)=3m^2-(6+2t)m+4t=m^3-tm^2$

$h(m)=m^3-(t+3)m^2+(6+2t)m-4t$ 라 하면, $h'(m)=3m^2-2(t+3)m+(6+2t)$ $h'(m)$에 대한 판별식 $D/4=(t+3)^2-6(3+t)=(t+3)(t-3)$에서, $-3<t<3$일 경우, 실수 m에 대하여 $h'(m)>0$이므로 $h(m)$은 증가함수이다. $h(m)$이 최고차항계수가 1인 삼차함수이므로 $m=m_1$에서 $h(m_1)=0$인 지점이 반드시 존재한다. 그런데, $m=t$인 경우, 필연적으로 $(2,0)$와 $(0,0)$을 잇는 직선이 $m\neq 0$인 실수 m에서 $(t,0)$도 지나게 되므로 $(0,0)$, $(m_1, f(m_1))$, $(0,t)$에서 $f(x)$가 $g(x)$와 총 3번 지난다. 이는 (나)에 모순이므로 $m_1=0$ 또는 $t=0$ 또는 $m_1=t$이다. $m_1\neq 0$이므로 $t=0$이다. ∴ $f(x)=x^3$로 고정된다.

(r, r^3), $(s, -(s-2)^2)$와 $(0,-2)$의 직선에서 ①과 같은 원리로 (r, r^3)와 $(0,-2)$를 지나는 직선일 때 k가 최대이고, $(s, -(s-2)^2)$와 $(0,-2)$를 지나는 경우 k가 최소이므로 $\frac{r^3-(-2)}{r-0}=3r^2$

→ $r=1$, $\alpha=3$ $\frac{-(s-2)^2-(-2)}{s-0}=-2(s-2)$ → $s>0$이므로 $s=\sqrt{2}$, $\beta=4-2\sqrt{2}$이므로

$\alpha-\beta=3-(4-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}-1=a+b\sqrt{2}$에서, $a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$이다.

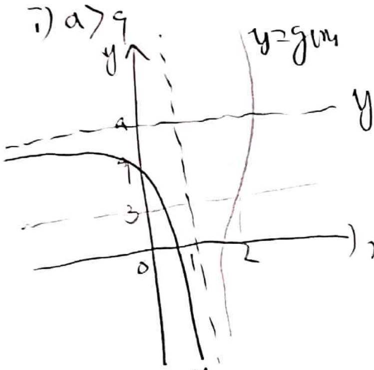
3-21 20학년도 6월 평가원 나형 30번

엄밀히 푸는 경우와 그냥 'a=-1 이나 a=3 아냐?' 하고 찍어서 푸는 것과 괴리가 상당히 크다. 단원 자체가 그래프를 그리는 거니 실수 a의 범위에 따라 모두 해보자. 얻어갈게 굉장히 많다.

$\frac{ax-9}{x-1} = a + \frac{a-9}{x-1}$ ⟶ i) $a>9$ ii) $a=9$ iii) $3<a<9$ iv) $a=3$ v) $-1<a<3$ vi) $a=-1$ vii) $a<-1$ ⟶ 이렇게 총 7가지 그래프를 생각가능하다.

(참고로, $g(x)$는 항상 $(0,9)$를 지난다.)

i) $a>9$

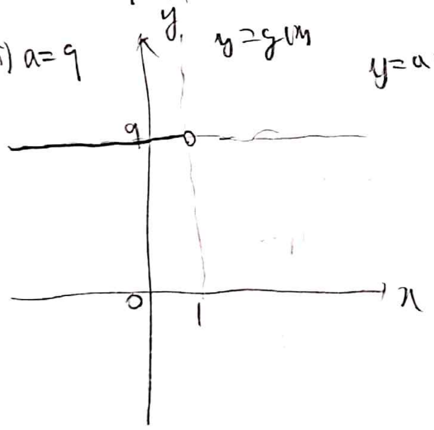


$y=3$ 에서 교점 2개이려면

이 개형

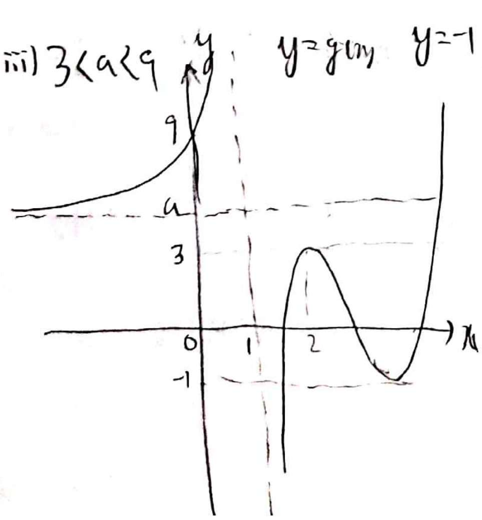
다만, 이러려면 $\{t \mid t<a\}$ 가 됨. (모순)

ii) $a=9$



$y=a$ 에서 교점이 무한히 많다. (모순)

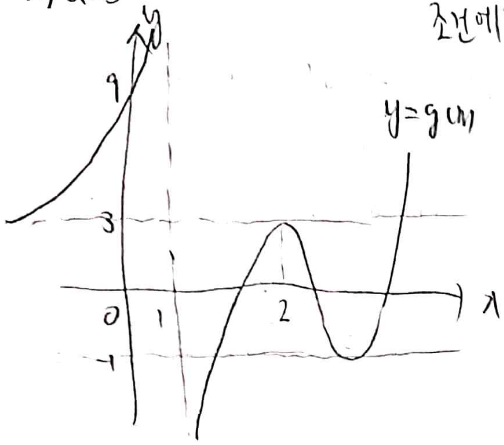
iii) $3<a<9$



$y=-1$, $y=3$ 에서 교점이 두개라면 다음 그래프와 같다.

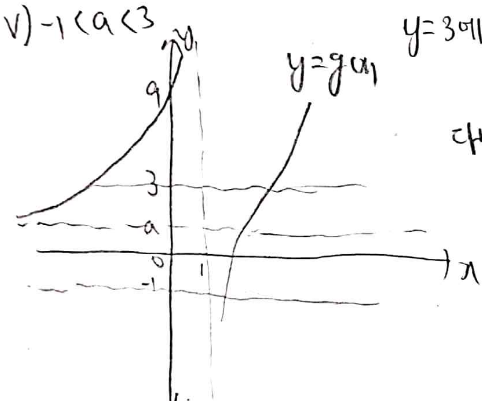
다만, 이 때는 $3<t<a$ 에서 교점 개수가 1개라 모순

iv) $a=3$

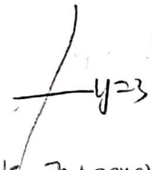


조건에 모두 만족하는 개형이다. vii)까지 다 따지고 난 뒤에 $f(x)$를 확정하자. (아직은 $f(x)$를 모르는 상태다.)

v) $-1<a<3$



$y=3$에서 교점이 2개이려면

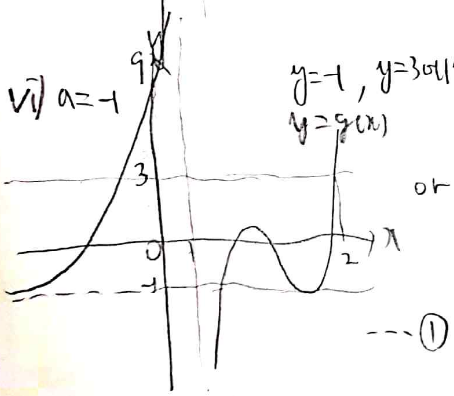


이런 개형

다만, 이럴 시 $t<3$에서도 교점 2개인 실수 t 존재 (모순)

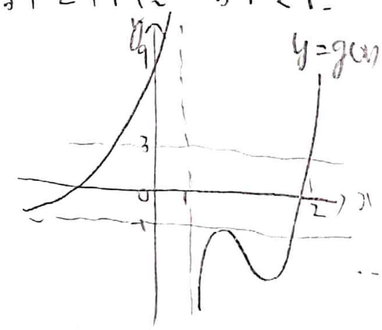
vi) $a=-1$

$y=-1$, $y=3$에서 교점이 2개이려면 다음과 같다.



…①

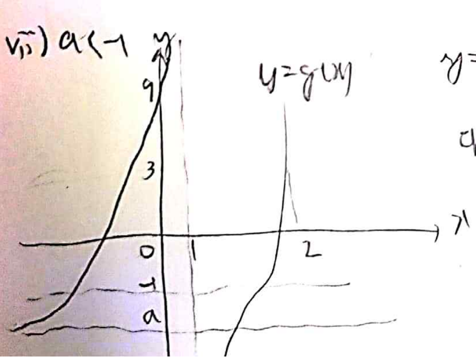
or



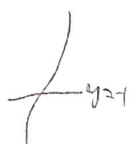
…②

①, ② 모두 $t<3$ 에서 교점 2개인 구간 존재 (X)

vii) $a<-1$



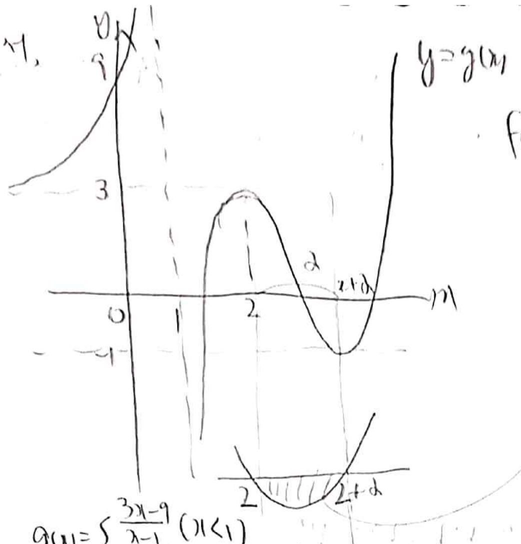
$y=-1$와의 교점이 2개이므로 $y=-1$ 부근에서



이 개형

다만, 이럴 시 $t<-1$ 에서 교점 2개인 부분 생김 (모순)

iv) $a=3$ 에서,



f(x)가 최고차항계수가 1인 삼차함수

↓

f'(x)가 최고차항 계수가 3인 이차함수

넓이 $\frac{3(\alpha)^3}{6} = \frac{\alpha^3}{2} = 4 \to \alpha = 2$

↓

$f(x) = (x-1)(x-4)^2 - 1$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x-9}{x-1} & (x<1) \\ (x-1)(x-4)^2-1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

$\therefore (g \circ g)(-1) = g(6) = f(6) = 19$

Chapter 4 문제

4−1. 18년 7월 교육청 19번

$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$ $g'(x) = \dfrac{4x^3}{x^4+2n}$

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 $f(x) = x^n - 1$, $g(x) = \log_3(x^4+2n)$이다. $= \dfrac{\ln(x^4+2n)}{\ln 3}$ 꼭 이렇게 분리!

함수 $h(x)$가 $h(x) = g(f(x))$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

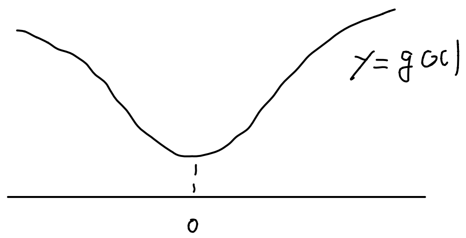
ㄱ. $h'(1) = 0$

ㄴ. 열린 구간 $(0, 1)$에서 함수 $h(x)$는 ~~증가~~한다. 감소

ㄷ. $x > 0$일 때, 방정식 $h(x) = n$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

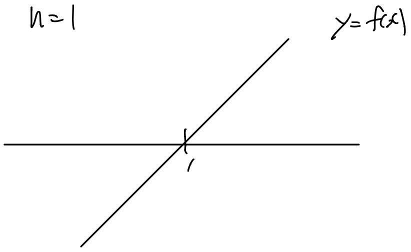
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

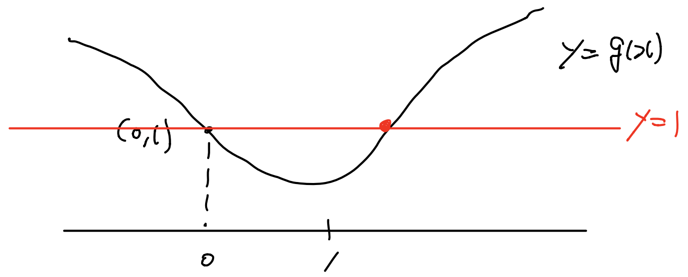
3



$x-1$ $\log_3(2n+1)$

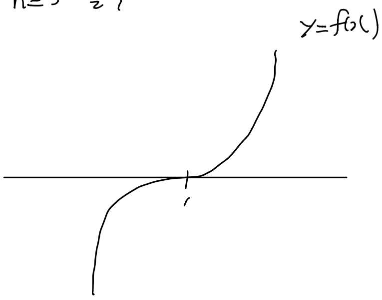
n=1

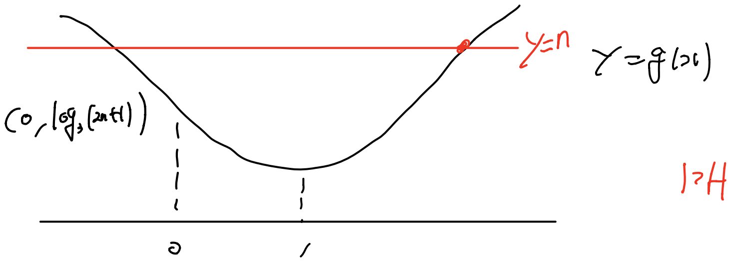




1개

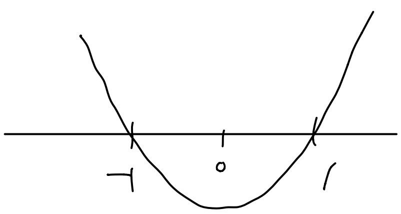
n≥3 홀수

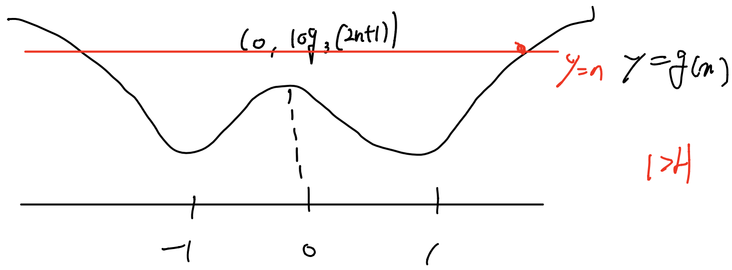




1개

n 짝수

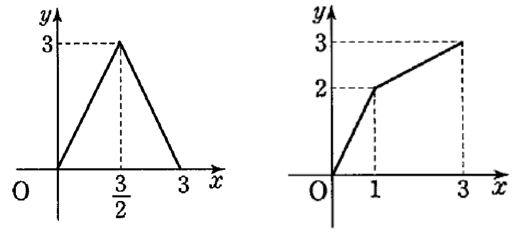




1개

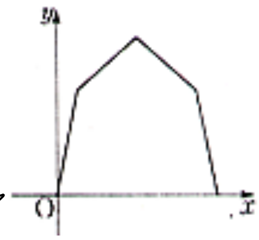
4−2. 94학년도 1차 수능 7번

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 각각 아래 그림과 같다.

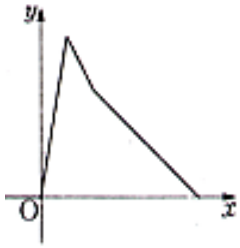


$y=f(x)$ 의 그래프　　$y=g(x)$ 의 그래프

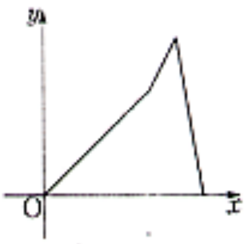
다음 중 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프의 개형은? [3점]

①


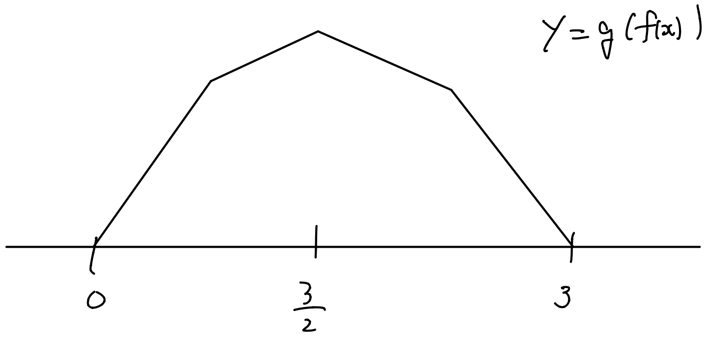
②


③


④

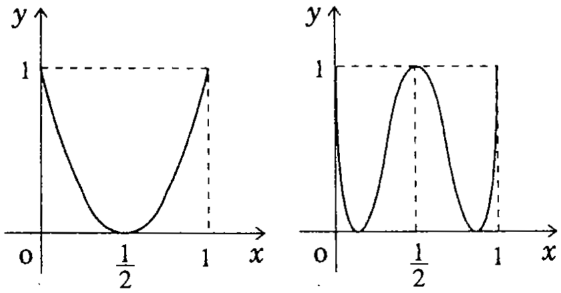

⑤


①



4−3. 94학년도 2차 수능 17번

함수 $f(x) = 4x^2 - 4x + 1\,(0 \leqq x \leqq 1)$에 대하여, $y = f(x)$와 $y = f(f(x))$의 그래프 개형은 각각 다음과 같다.

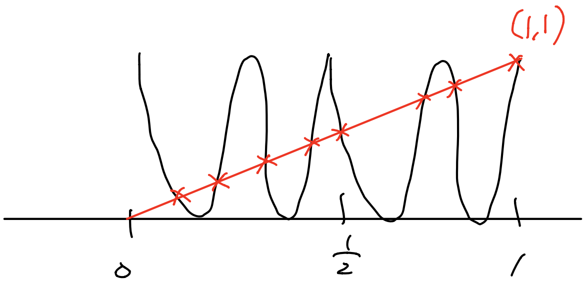


이 때 집합 $\{x \mid f(f(f(x))) = x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$의 원소의 개수는? [4점]

① 16 ② 12 ③ 8 ④ 6 ⑤ 5

$y = f(f(f(x)))$

8



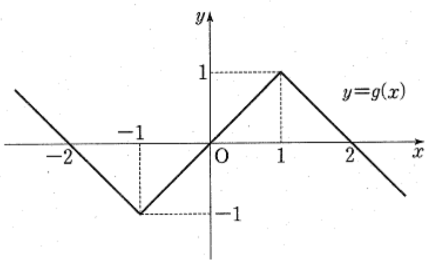
4-4. 18학년도 9월 평가원 나형 21번

실수 a, b, c와 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<-1) \\ bx & (-1\le x<1) \\ x+c & (x\ge 1)\end{cases},$$

$$g(x)=|x+1|-|x-1|-x$$

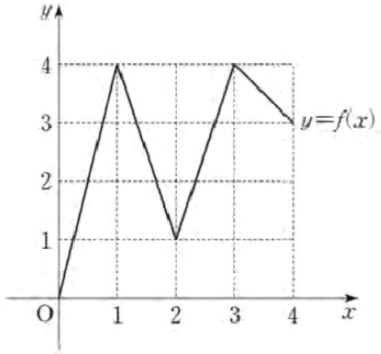
에 대하여, 합성함수 $g\circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다. $a+b+2c$의 값은? [4점]



① 2 ② 1 ③ 0 ④ −1 ⑤ −2

4-5. 18학년도 수능 나형 21번

그림과 같이 닫힌 구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 4)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같다.



다음 조건을 만족시키는 집합 $X=\{a,\ b\}$의 개수는? (단, $0 \le a < b \le 4$) [4점]

X에서 X로의 함수 $g(x)=f(f(x))$가 존재하고 $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$를 만족시킨다.

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

4-6. 19년 3월 30번 파일 첨부

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 1인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$) [4점]

(가) $f(1)=0$, $f'(1)=0$

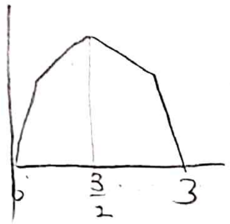
(나) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 10 이하의 자연수이다.

(다) 함수 $g(x)=\frac{3x}{e^{x-1}}+k$에 대하여 함수 $|(f \circ g)(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수는 4이다.

4-2 94학년도 1차 수능 7번

$f(x)$가 $0 \le x \le \frac{3}{2}$에서 $0 \to 3$

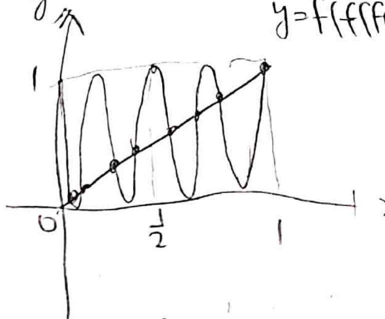
$\frac{3}{2} < x \le 3$ 에서 $3 \to 0$ 이므로 대략적인 $g(f(x))$의 개형은 다음과 같다.



$\to$ ①

4-3 94학년도 2차 수능 17번

혹시 노파심에 하는 말인데, $f(f(f(x)))$를 단순히 $f(x)=(2x-1)^2$ $(0 \le x \le 1)$을 주었다고 그대로 대입해서 그래프를 그리지는 않았으면 한다. $f(f(x))$를 주었으니, 여기서 생각해보자 $f(f(x))$값이 $1 \to 0 \to 1 \to 0 \to 1$ 이렇게 반복되었고, $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에 대한 대칭이므로 다음의 개형을 생각할 수 있다.



↳ $y=x$와 $f(f(f(x)))$의 교점은 $0 \le x \le 1$에서 8개

(단순히 생각하면 $0 \le x \le \frac{1}{2}$ 에서 생각하고 이에 대한 대칭으로 $f(f(f(x)))$의 $0 \le x \le 1$ 개형을 그린 거다)

4-4 18학년도 9월 평가원 나형 21번

실수 전체에서 역함수가 정의되면 해당 함수가 증가함수일 거라 추측하고 푸는 학생들을 빡실내 문제이다. 나만 단순히 문제를 풀려 손대다보면 추론문제라기보다 단순 계산문제에 가까워지고, 특수한 특정 함수로 찍어서 풀면, a, b, c값이 다 나오기에 그닥 좋은 문제는 아닌 듯하다. (실제로는 $a+c$, $b+c$ 값만 나와 a, b, c를 특정할 수 없다) 그래도 나름 볼 만한 문항이긴 하니 한번 공부해보자. ①현장에서 할만한 풀이와 ②정석대로 푼 풀이를 소개하겠다.

(공통) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 이고, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 이고, $\lim_{x\to\infty} g(x)=-\infty$

] → 에서, $g(f(x))$는 증가함수와 감소함수 중에 감소함수임을 알 수 있다.

① 2. $g(f(x))$ 개형은 다음과 같다.

$\therefore g(-3)=1 \to f(-1)=-b=1 \to b=-1$

$\lim_{x\to-1-} f(x)=a-1=-3 \to a=-2$

$f(1)=1+c=3 \to c=2 \to a+b+2c=1$

② ①를 보고 '?' 하실 사람들도 꽤 있을 것이다. '정상'이다. 너무나도 특수한 개형이기에 기출 공부를 많이 한 사람이라면 '이렇게 의미 없게 줬다고?' 의문이 충분히 들 수 있다. 정석대로 풀어보자.

$g(f(x))$가 연속이므로 $\lim_{x \to -1-} g(f(x)) = g(a-1) = \lim_{x \to -1+} g(f(x)) = g(-b)$ ---- ①

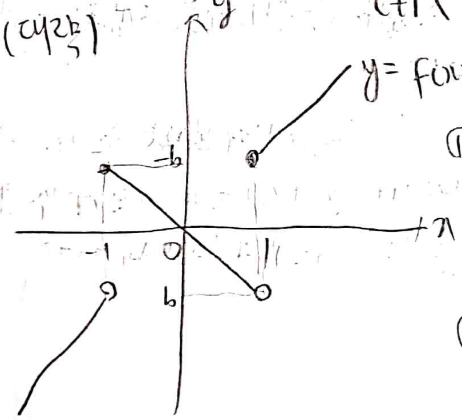
$\lim_{x \to 1-} g(f(x)) = g(b) = \lim_{x \to 1+} g(f(x)) = g(c+1)$ --- ②

이 때, $g(f(x))$는 감소하므로 $-1 \le x < 1$에서, $b < 0$이다. ($b > 0$일 경우, $g(f(x))$가 증가하는 구간이 있으므로 모순, $b=0$일 때는 역함수가 실수 전체에서 정의 X → 모순)

또한, $|b| > 1$일 경우 $g(f(x))$가 극값이 생기므로 $-1 < b < 0$

∴ $f(x)$의 개형은 다음과 같다. (∵ $a-1 > -1$일 시, 극값 생김
$c+1 < 1$일 시, 극값 생김)

(대략)



① $g(f(-1)) = g(-b) = g(a-1)$인데, $g(x)$ 개형을 볼 시에, $x \le 1$에서 $g(x)$는 $x=-1$에 대한 대칭이므로 $-1 = \frac{a-1+(-b)}{2}$ --- $\boxed{1}$

② $g(f(1)) = g(c+1) = g(b)$인데, $g(x)$ 개형을 볼 시에, $x \ge -1$에서 $g(x)$는 $x=1$에 대한 대칭이므로 $1 = \frac{c+1+b}{2}$ --- $\boxed{2}$

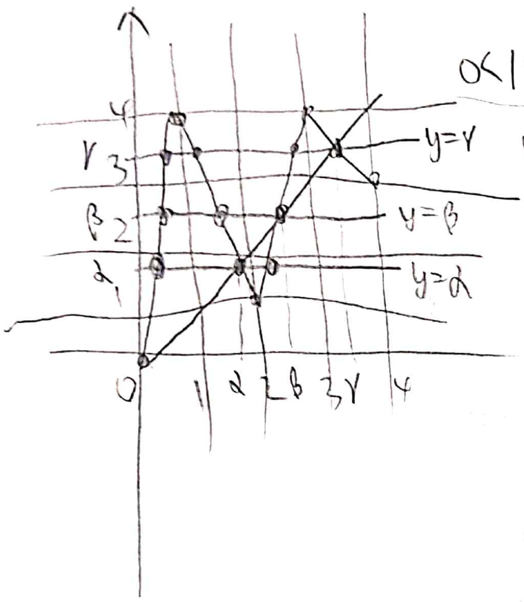
$\boxed{1} \times 2 \longrightarrow a-b = -1$

$\boxed{2} \times 2 \longrightarrow b+c = 1$

$\therefore a+b+2c = (a-b) + 2(b+c) = -1+2 = 1$

4-5 18학년도 수능 나형 21번

$g(a)=f(f(a))$에서, $f(a)=k$라 하면, $f(f(a))=f(k)=f(a)=k$에서, 실수 k는 $f(x)$와 x와의 교점이다. 이는 $g(b)=f(b)$일 때도 똑같이 적용된다. 이를 알고 그래프를 그려보자.



$0<1<\alpha<\beta<\gamma<4$에서, $g(x)$가 $X\to X$로의 함수이므로 a와 b중에 적어도 하나 이상은 $f(x)=x$의 실근이다. (둘 다 만족 못할 시 $X\to X$ 정의 X)

i) $f(x)=x$의 실근인게 a, b중 하나일 때

단, 이 때 주의해야 할게, $f(f(a))=f(f(b))$이어야 한다. $f(f(a))\neq f(f(b))$일 시에 $X\to X$ 정의 X

① $f(x)=0\to a<b$이므로 $a=b$에서 모순

② $f(x)=\alpha\to(\alpha,\alpha)$를 고정하고 나머지 두 점 중 한 개이므로 ${}_2C_1=2$

③ $f(x)=\beta\to(\beta,\beta)$를 고정하고 나머지 두 점 중 한 개이므로 ${}_2C_1=2$

④ $f(x)=\gamma\to(\gamma,\gamma)$를 고정하고 나머지 세 점 중 한 개이므로 ${}_3C_1=3$

ii) $f(x)=x$의 실근이 a, b 모두일 때

$f(x)=0, \alpha, \beta, \gamma$ 중 2개를 고르고 각각 $f(a)=a$, $f(b)=b$를 만족하므로 ${}_4C_2=6$

i)+ii)에 의해, $2+2+3+6=13$이다.

개인적으로 제일 해설하기 힘든 문제이다. 함수의 정의에 대해 빠삭하게 이해를 한 상태에서 접근해야만 실마리가 보이기 시작한다. 가끔씩 이걸 $f(f(x))$를 직접 그려서 푸는 학생들이 있는데 한 가지의 방법이긴 하지만 어디까지나 보조 풀이 정도로만 남겨두자.

19년 3월 30번

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 1인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$) [4점]

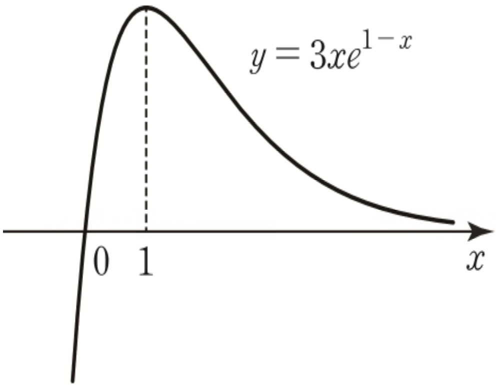
(가) $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$

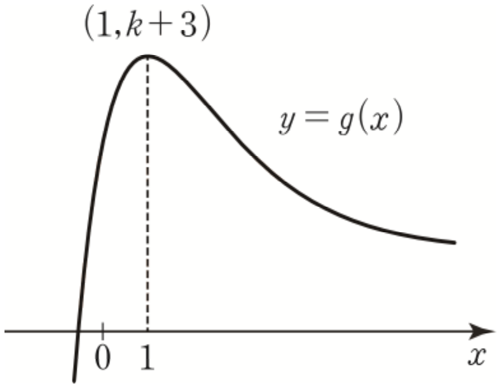
(나) 방정식 $f(x) = 0$의 모든 실근은 10 이하의 자연수이다.

(다) 함수 $g(x) = \frac{3x}{e^{x-1}} + k$에 대하여 함수 $|(f \circ g)(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수는 4이다.

1. 또 나왔다. 다항함수×초월함수 꼴은 1순위 단골로 나온다.

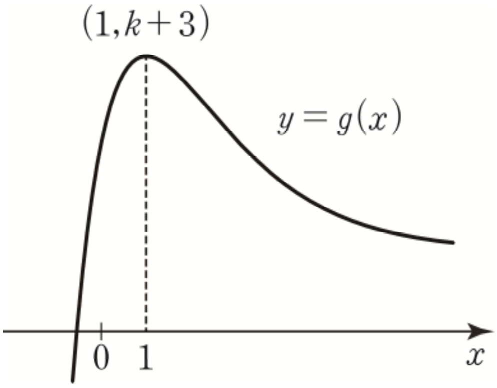
$y=g(x)$는 다음과 같이 그려진다.

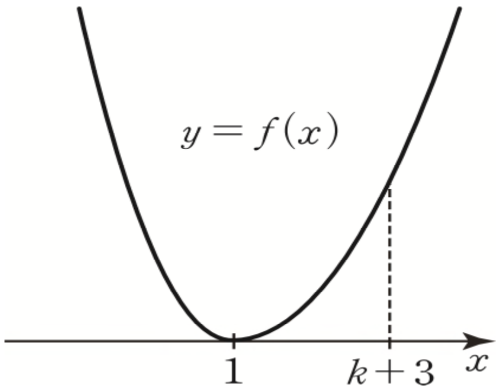


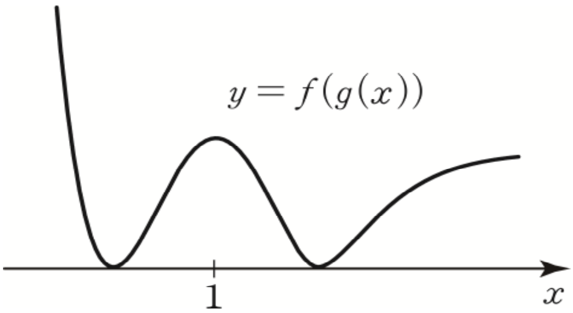


2. $f(x)$의 해가 하나일 때

(1) $f(x)$가 사중근을 가질 때

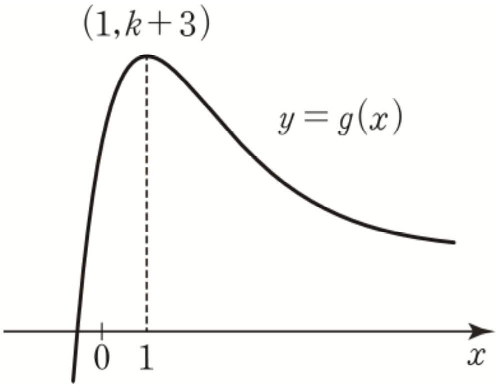


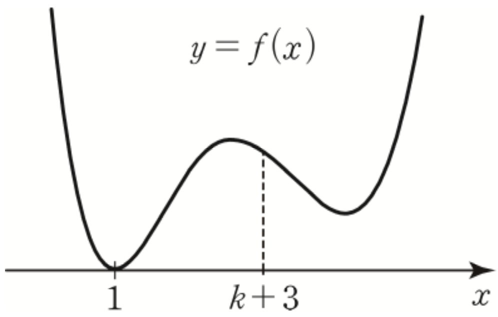


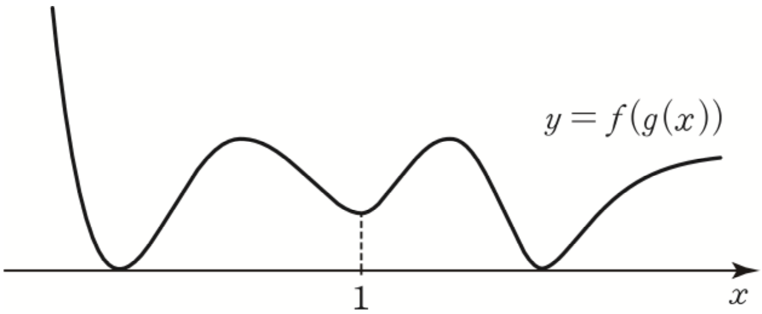


$x=k+3$가 어디에 있든 $|f(g(x))|$를 미분가능하게 하는 자연수 k는 무한히 많으므로 조건 (다)를 위반한다.

(2) $f(x)$가 $x=1$을 제외하고 중근을 갖지 않을 때



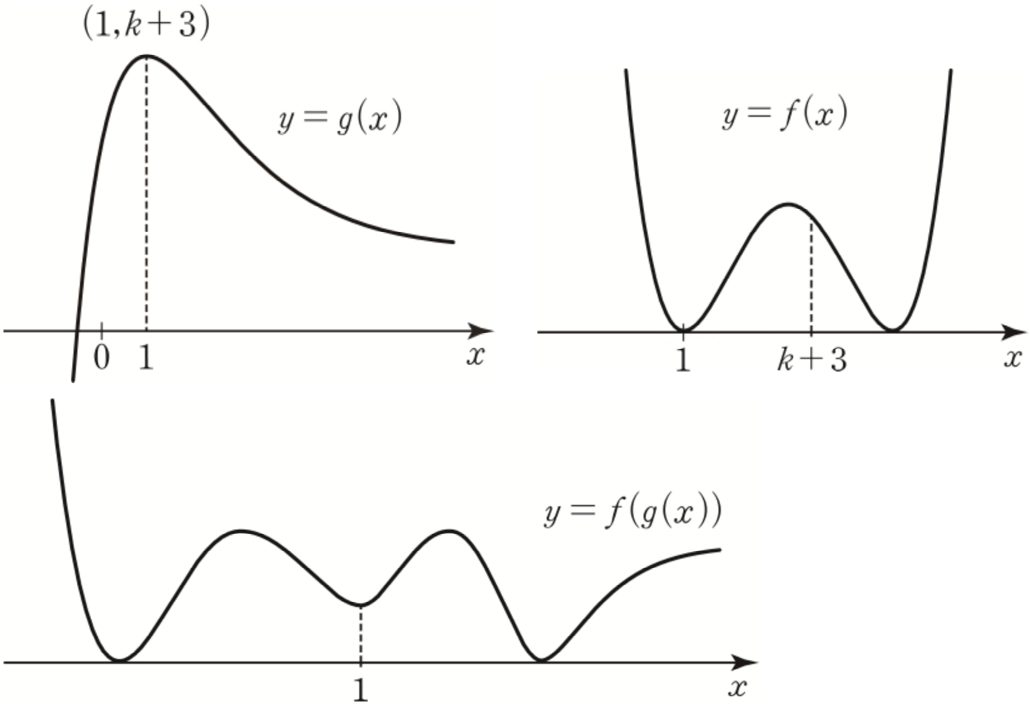




$x=k+3$가 어디에 있든 $|f(g(x))|$를 미분가능 하게 하는 자연수 k는 무한히 많으므로 조건 (다)를 위반한다.

3. $f(x)$의 해가 두 개일 때

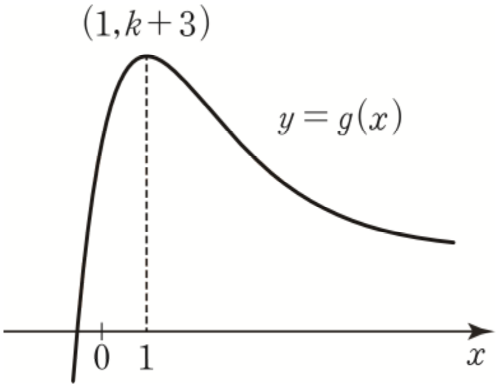
(1) $f(x)$가 중근 두 개를 가질 때

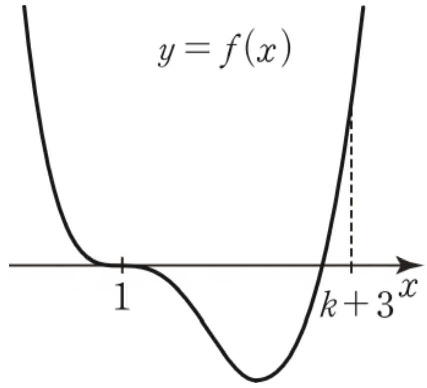


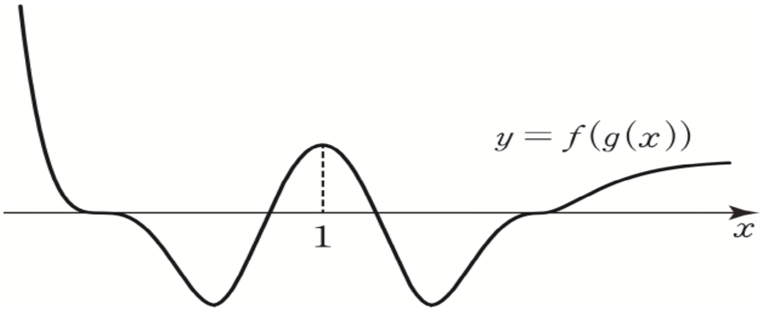
$x=k+3$가 어디에 있든 $|f(g(x))|$를 미분가능 하게 하는 자연수 k는 무한히 많으므로 조건 (다)를 위반한다.

(2) $f(x)$가 $x=1$에서 삼중근을 가질 때

$k+3$이 $f(x)$의 다른 근보다 클 때는….

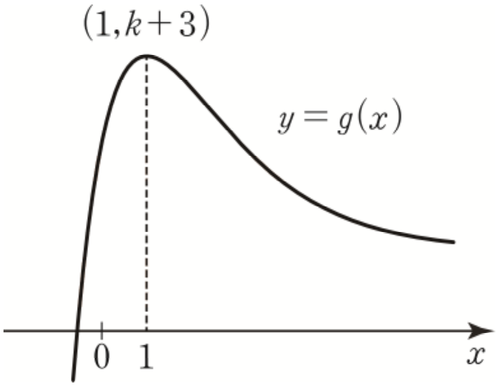


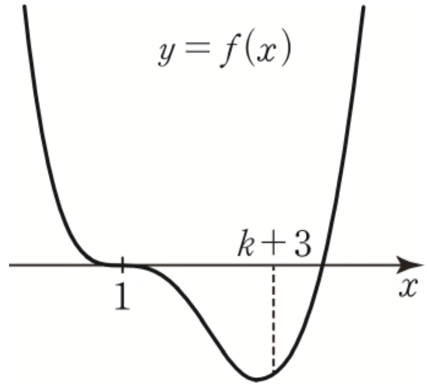


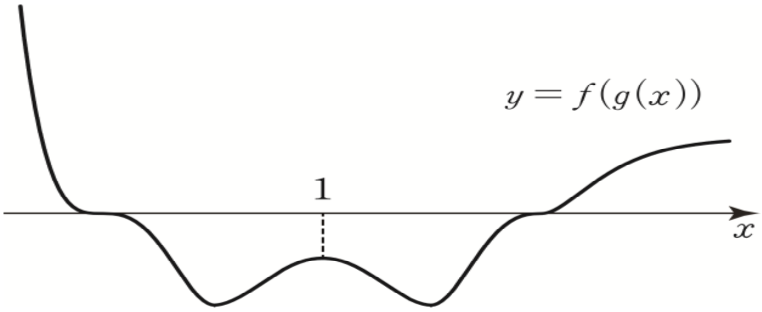


$|f(g(x))|$를 미분가능 하게 하는 자연수 k는 없으므로 (다) 조건을 위반한다.

$k+3$이 $f(x)$의 다른 근보다 같거나 작을 때는….







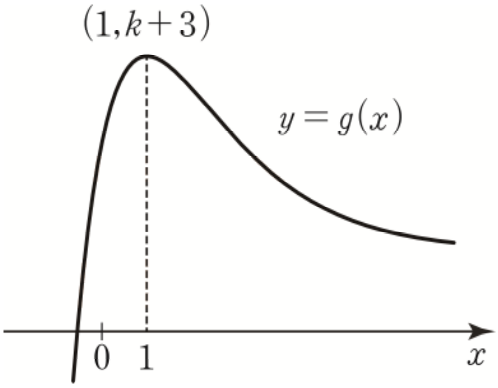
$|f(g(x))|$가 미분가능 하게 하는 자연수 k는 유한개이며

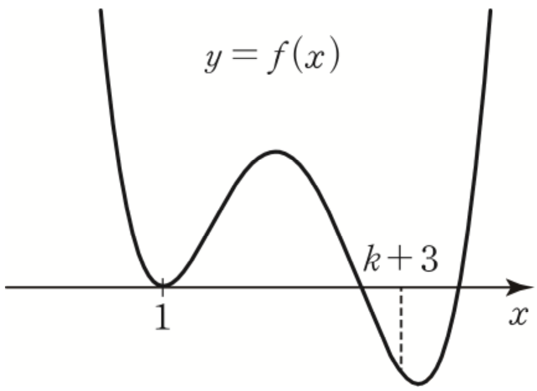
이것이 4개가 되기 위해서는 $k=1,2,3,4$이고 $f(x)$의 다른 한 근은 7이다.

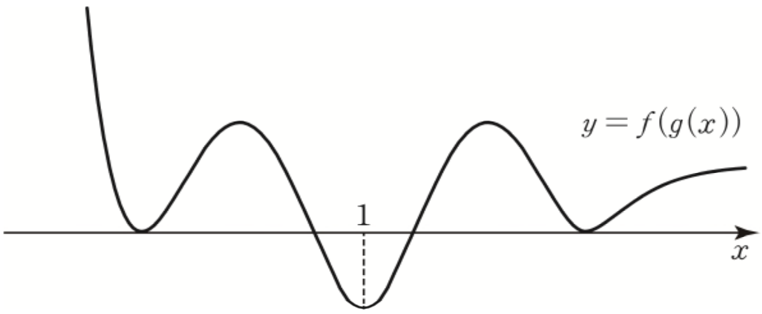
따라서 $f(x)=(x-1)^3(x-7)$이므로 $f(0)=7$이다.

3. $f(x)$의 해가 세 개일 때

$k+3$이 $f(x)$의 두 번째로 큰 근보다 클 때는….

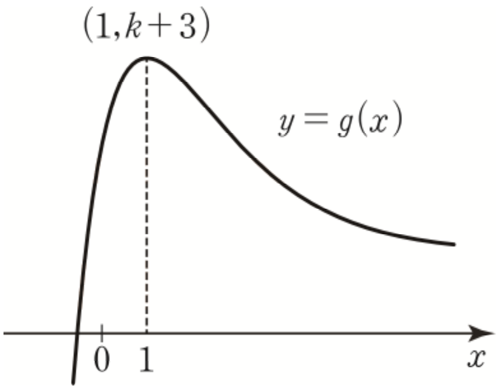


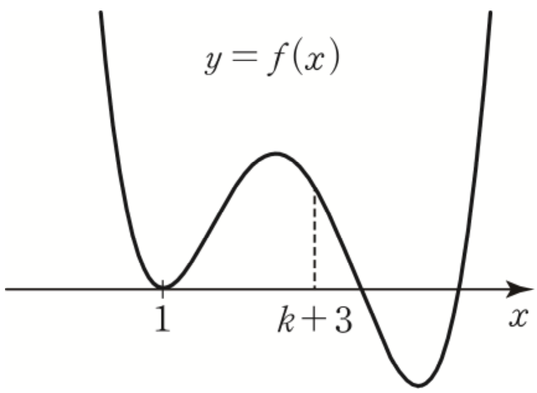


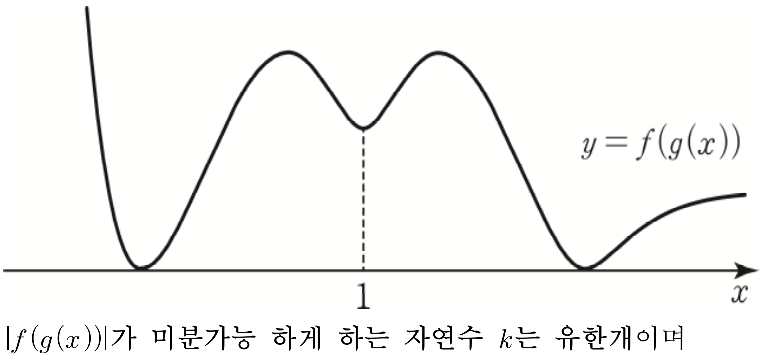


$|f(g(x))|$를 미분가능 하게 하는 자연수 k는 없으므로 (다) 조건을 위반한다.

$k+3$이 $f(x)$의 두 번째로 큰 근보다 작거나 같을 때는….







$|f(g(x))|$가 미분가능 하게 하는 자연수 k는 유한개이며
이것이 4개가 되기 위해서는 $k=1,2,3,4$이고 $f(x)$의 다른 한 근은 7이다.
조건 (나)에 의해 $f(x)$의 제일 큰 근은 8이상 10이하의 자연수이다.

$f(x)=(x-1)^2(x-7)(x-8)$일 때, $f(0)=56$이다.
$f(x)=(x-1)^2(x-7)(x-9)$일 때, $f(0)=63$이다.
$f(x)=(x-1)^2(x-7)(x-10)$일 때, $f(0)=70$이다.

4. 결론적으로 $f(0)$의 최솟값은 7이고 $f(0)$의 최댓값은 70이므로 **답은 77이다!!**

문제 Comment

따져야 할 **사차함수 $f(x)$의 그래프 개형들이 많고, 답이 꼭 특수한 사차함수 개형일 때 나오지 않아** 더욱 까다로운 문제였다.

가능한 사차함수 개형들을 먼저 빠짐없이 그려보고 조건을 만족시키지 못하는 개형들은 제거하면서 문제를 풀어야 했었다. 이렇지 않으면 빠뜨리는 그래프 개형들이 생기고, 이 중 답과 연관이 있는 개형이 있다면 아쉽게도 문제를 틀리게 된다.

최종적 계산 단계에서 다항식 정리도 최대한 깔끔히 해주자. 이를 잘못하면 계산이 너무 많아져 실수가 잦아진다.

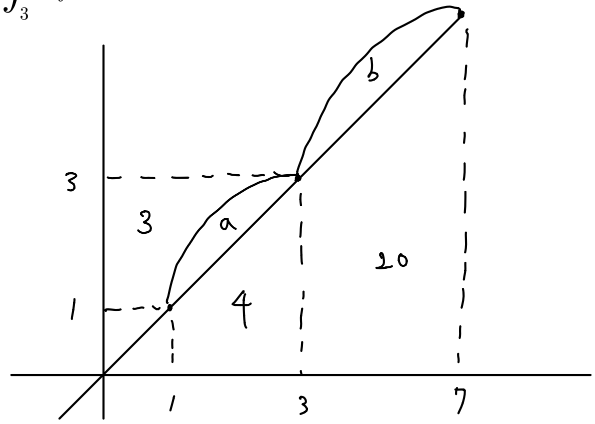
Chapter 5 문제

5-1. 17년 3월 교육청 28번

연속함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $f(3)=3$, $f(7)=7$
(나) $x \neq 3$인 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)<0$이다. 위볼
(다) $\int_1^7 f(x)dx=27$, $\int_1^3 g(x)dx=3$

$12\int_3^7 \lvert f(x)-x\rvert dx$의 값을 구하시오. [4점]



$a+b=3$

$a=1$, $b=2$

$12\times 2=24$

24

5-2. 18학년도 10월 교육청 21번

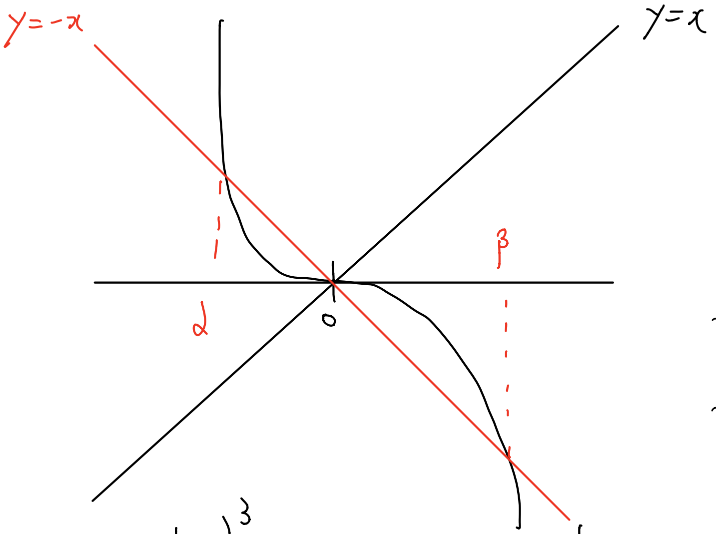
기함수

함수 $f(x)=-\dfrac{kx^3}{x^2+1}$ $(k>1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 α, 가장 큰 값을 β라 하자. 함수 $y=f(x-2\beta)+2\alpha$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $f'(\beta)=2g'(\alpha)$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

$f'(\alpha)=2g'(\alpha)$

① $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$ ③ $\dfrac{4+2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{5}$

2



$\alpha=-\beta$

$g(f(x-2\beta)+2\alpha)=x$

$f(g(x)-2\beta)+2\alpha=x$

$f'(g(x)-2\beta)\,g'(x)=1$

$f'(g(\alpha)+2\alpha)\,g'(\alpha)=1$

$f'(\alpha)\,g'(\alpha)=1$

$f'(\alpha)=2g'(\alpha)$

$f(g(\alpha)-2\beta)=-\alpha$

$g(\alpha)+2\alpha=\alpha$

$g(\alpha)=-\alpha$

$f'^2(\alpha)=2$

$f'(\alpha)=-\sqrt{2}$

$\dfrac{k\alpha^3}{\alpha^2+1}=\alpha$ $k=1+\dfrac{1}{\alpha^2}$

5-3. 18년 10월 교육청 30번

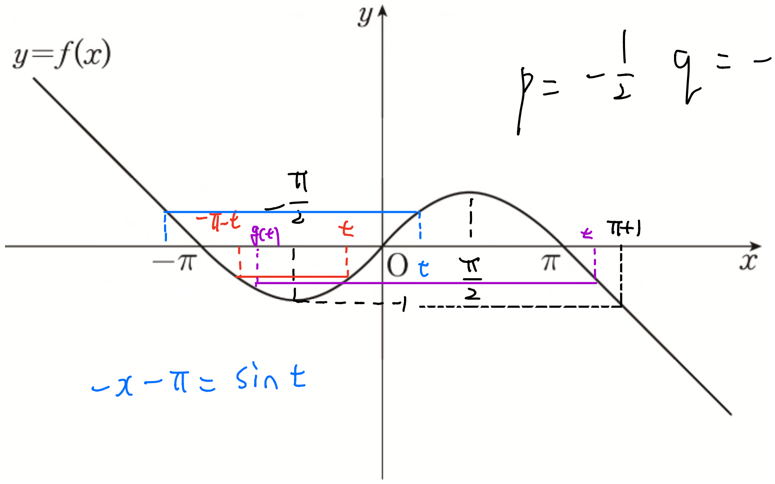
함수

$$f(x)=\begin{cases}-x-\pi & (x<-\pi)\\ \sin x & (-\pi\le x\le\pi)\\ -x+\pi & (x>\pi)\end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 부등식 $f(x)\le f(t)$를 만족시키는 실수 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 예를 들어, $g(\pi)=-\pi$이다. 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속일 때,

$$\int_{-\pi}^{\alpha} g(t)dt=-\frac{7}{4}\pi^2+p\pi+q = -\frac{7}{4}\pi^2-2-\frac{\pi}{2}-1$$

이다. $100\times|p+q|$의 값을 구하시오. (단, p,q는 유리수이다.) [4점]



$p=-\frac{1}{2}$ $q=-3$

$100\times\frac{7}{2}=350$

350

$t<-\frac{\pi}{2}$ t

$-\frac{\pi}{2}<t<0$ $-\pi-t$

$0<t<\pi$ $-\pi-\sin t$

$\pi<t<\pi+1$ $\pi-t=\sin g(t)$

$\pi+1<t$

$\alpha=\pi+1$

$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{3}{8}\pi^2$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\pi-t\,dt=-\frac{3}{8}\pi^2$

$\int_{0}^{\pi} -\pi-\sin t\,dt=-\pi^2-2$

$\int_{\pi}^{\pi+1} g(t)\,dt$

부분적분을 이용한 역함수 적분

$\|$

$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} t\,p'(t)\,dt$

$=-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt=-\left[t\sin t+\cos t\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}$

$=-\frac{\pi}{2}-1$

$\pi-\sin g(t)=t$

$\pi-\sin t=p(t)$

$p(g(t))=t$

5-4. 17학년도 수능 나형 30번

실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식

$$4f'(x)+12x-18=(f' \circ g)(x)$$

가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점]

5−5. 19학년도 6월 평가원 나형 29번

함수

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2 + \dfrac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

5-4 17학년도 수능 나형 30번

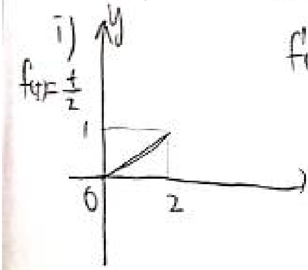
개인적으로 제일 어려운 문제가 아니었나 싶다. 우선 가능한 역함수가 2개임을 찾아내는 것도 힘들었고, 각 경우에서 x값을 기준으로 $0\le x\le 1$인 게 아닌, $0\le y\le 1$ 이라는 것을 이용해서 $0\le x\le 2$임을 찾아내는 것도 꽤나 힘들다. 발상 하나하나가 발상적이지만 동시에 역함수에 대한 정의를 잘 이해하고 있으면 교과서 베이스로도 따라갈 수 있는 상당히 고급 문제다. 어디 한번 접근해 보자.

$f(x)=x^3-3x^2+6x+k$에서, $f'(x)=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3\ge 3>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

$4f'(x)+12x-18=4(3x^2-6x+6)+12x-18=12x^2-12x+6=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6=3(g(x)-1)^2+3$

에서, $(g(x)-1)^2=4x^2-4x+1=(2x-1)^2$임을 알 수 있다. $\therefore g(x)-1=2x-1$ 또는 $g(x)-1=1-2x$

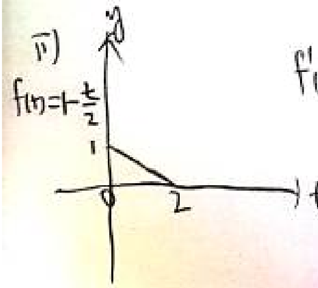
이므로 i) $g(x)=2x$인 경우와 ii) $g(x)=2-2x$인 경우를 나눌 수 있다. $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로 양변에 f를 합성 시 i)의 경우는 $x=f(2x)$에서 $f(t)=\frac{t}{2}$ (단, $t=2x$에서, $0\le t\le 2$), ii)의 경우는 $x=f(2-2x)$에서 $f(t)=1-\frac{t}{2}$ (단, $t=2-2x$에서, $0\le t\le 2$)임을 이용해 $f(t)$의 개형과 직접 비교하여 m과 M을 찾을 수 있다.



$f'(t)=3(t-1)^2+3>\frac{1}{2}$에서, $[0,1]$인 t의 범위에서는 $t=0$에서 $y=f(t)$와 $y=\frac{t}{2}$와의 교점이 생길 시 k값이 최대, $t=2$에서 $y=f(t)$와 $y=\frac{t}{2}$와의 교점이 생길 시 k값이 최소임을 알 수 있다. (그 사이에서는 $0<t<2$일 때 교점이 생김)

$\therefore f(0)=k\le 0$, $f(2)=k+8\ge 1$에서,

$-7\le k\le 0$임을 알 수 있다.



$f'(t)=3(t-1)^2+3>-\frac{1}{2}$에서, $[0,1]$인 t의 범위에서는 i)과 같은 원리로 $t=0$일 때 k의 최댓값, $t=2$에서 k의 최솟값을 구할 수 있음을 알 수 있다.

$\therefore f(0)=k\le 1$, $f(2)=k+8\ge 0$에서,

$-8\le k\le 1$임을 알 수 있다.

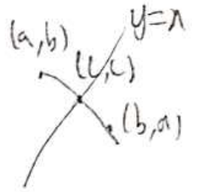
i)과 ii)에 의해, $M=1$, $m=-8$이므로 $m^2+M^2=(-8)^2+1^2=65$임을 알 수 있다.

5-5 19학년도 6월 평가원 나형 29번

이 문제가 약간 변형되어 190930이 되었다. 쓰는 발상이 제법 겹치니 다소 간략하게 아이디어 배대만 짚고 곧장 풀이를 전개할 것이다. 각 단계에서 바로 다음 단계로 가는 데에서 '?'이란 생각이 들면 2-9 해설을 참고하자. 정말 똑같은 아이디어로 난이도만 조금 높여서 출제했다.

$f(x)=f^{-1}(x)$의 교점은 i) $f(x)$가 증가할 때 $f(x)=x$와의 교점 뿐이므로 i)의 경우는 $a>1$과 $a<1$인 경우를 나눌 수 있다. 근데 $a>1$, $a<1$인 경우 모두 그래프를 그릴 시 $x=-1$, $x=1$중 한 군데에서는 불연속이 되므로 모순이다. ($a=1$일 경우에는 무한히 만나거나 만나지 않거나 둘 중 하나이다.)

ii) $f(x)$가 감소할 때 $f(x)=x$와의 교점 1개와 $x+y=k$ (k는 상수)와 $f(x)$와의 교점일 경우에만 $f(x)=f^{-1}(x)$를 만족하고, $\alpha<\beta$에서 $f(x)$가 (α,β), (β,α)를 지날 시 $\alpha<\gamma<\beta$에서 $f(\gamma)=\gamma$인 실근 γ이



반드시 한 개 존재하므로 $f(1)=1=c+\frac{5}{2}$에서, $c=-\frac{3}{2}$, $(-1,2)$, $(2,-1)$을 지나므로 $-a+b=2$, $f(x)$가 실수 전체 집합에서 연속이므로 $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}ax+b=f(1)=1=a+b$에서, $b=\frac{3}{2}$, $a=-\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

$\therefore 2a+4b-10c=-1+6+15=20$이다.

Chapter 6 문제

$\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{4}\pi$ π

$(0, 3)$ $(3, 6)$

6−1. 19년 4월 교육청 21번

자연수 n에 대하여 열린 구간 $(3n-3,\ 3n)$에서 함수

$$f(x)=(2x-3n)\sin 2x-(2x^2-6nx+4n^2-1)\cos 2x$$

가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소가 되는 모든 α의 값의 합을 a_n이라 하자.

$\cos a_m = 0$이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값을 l이라 할 때, $\sum_{k=1}^{l+2} a_k$의 값은? [4점]

$$= 7+\sum_{n=1}^{9}\frac{n}{2}\pi = 7+\frac{\pi}{2}\times\frac{9\times 10}{2} = 7+\frac{45}{2}\pi$$

① $7+\frac{45}{2}\pi$ ② $8+\frac{45}{2}\pi$ ③ $7+\frac{47}{2}\pi$ ④ $8+\frac{47}{2}\pi$ ⑤ $7+\frac{49}{2}\pi$

①

$f'(x) = 2\sin 2x + (4x-6n)\cos 2x - (4x-6n)\cos 2x + (4x^2-12nx+8n^2-2)\sin 2x$

$= 4(x^2-3nx+2n^2)\sin 2x = 4(x-2n)(x-n)\sin 2x$

$n=1$ $(0,3)$ $1, 2, \frac{\pi}{2}$

$n=2$ $(3,6)$ $4, \pi, \frac{3}{2}\pi$

$n=3$ $(6,9)$ $2\pi, \frac{5}{2}\pi$ $l=3$

$n=4$ $(9,12)$ $3\pi, \frac{7}{2}\pi$

$n=5$ $(12,15)$ $4\pi, \frac{9}{2}\pi$

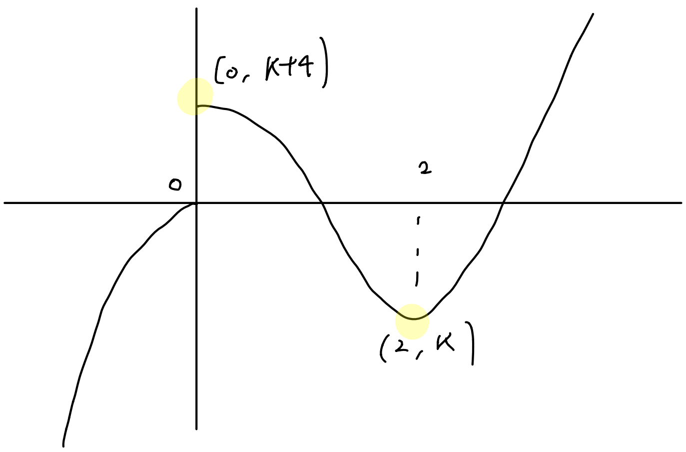
6−2. 15년 4월 교육청 21번

$f'(x) = (x^2-4x+4+2x-4)e^x = (x^2-2x)e^x$

함수 $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2e^x+k & (x\ge 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|-f(x)$가 다음 조건을 만족하도록 하는 정수 k의 개수는? [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다. (나) 함수 $g(x)$는 미분가능하지 않은 점이 2개다.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



①

$g(x) = \begin{cases} -2f(x) & f(x)<0 \\ 0 & f(x)\ge 0 \end{cases}$

$K<0$

$K+4>0$

$\Downarrow$

$-4<K<0$ $-3, -2, -1$

6-3. 05학년도 수능 28번

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $f'(-x)=f'(x)$ ⇒ 우함수

ㄴ. $\lim_{x\to 0} f'(x)=0$ not always

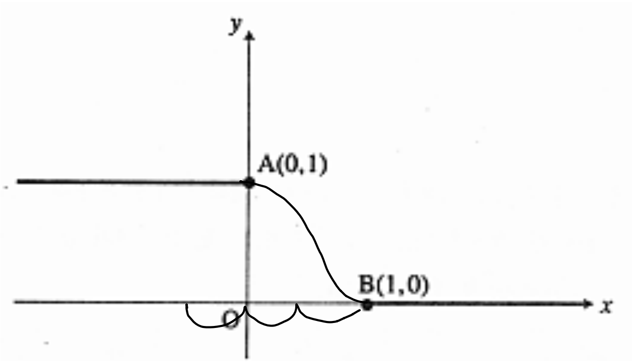
ㄷ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $x=a(a\neq 0)$에서 극댓값을 가지면 $f'(x)$는 $x=-a$에서 극~~솟~~값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1

6-4. 98학년도 수능 인문, 예체능계 29번

다음 그림은 함수 $y=1$ 과 함수 $y=0$ 의 그래프의 일부이다. 두 점 $A(0,1)$, $B(1,0)$ 사이를 $0 \le x \le 1$ 에서 정의된 함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$ 의 그래프를 이용하여 연결하였다. 이렇게 연결된 그래프 전체를 나타내는 함수가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 미분가능하도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하시오. [4 점]



$y = a(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right) = (x-1)^2(2x+1) = 2x^3-3x^2+1$

$\frac{a}{2} = 1$ $a=2$, $b=-3$, $c=0$

13

6-5. 14학년도 수능 A형 21번

좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 21　② 24　③ 27　④ 30　⑤ 33

6-6. 16학년도 수능 A형 21번

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은? [4점]

> (가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
> (나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

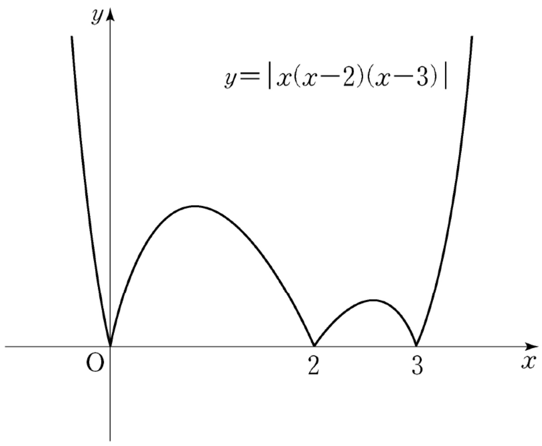
① $\dfrac{1}{15}$ ② $\dfrac{1}{10}$ ③ $\dfrac{2}{15}$ ④ $\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

6−7. 17학년도 9월 평가원 나형 21번

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다. (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $\lvert x(x-2)(x-3)\rvert$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

[4점]



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

6−8. 19학년도 수능 나형 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다. $\qquad g(x)=\dfrac{x(x+3)}{f(x)}$
(나) $g(0)=1$ $=\lim_{x\to 0} g(x)$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

$g(x)$ 연속성이 의심되는 지점은 $f(x)=0$을 만족할 때

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{h(x)} = 1$$

$f(0)=0$

$f(x)=x\,h(x)$

$h(0)=3$

$h(x)=x^2+ax+3$

$f(x)=x(x^2+ax+3)$

$f(1)$ 자연수 ⇓ a는 자연수!

⇓

실근을 가지면 $g(x)$가 연속이 될수없으므로 모든 x에 대해 $x^2+ax+3>0$ 여야 $g(x)$가 연속임!

$a^2-12<0$, $-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

자연수 a 최댓값 $=3$

$$g(2)=\frac{10}{f(2)} \text{ 최소}$$

⇒ $f(2)$ 최대 ⇒ a 최대

$f(x)=x(x^2+3x+3)$

$f(2)=2\times 13=26$

$$g(2)=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$$

6-9. 20학년도 6월 평가원 나형 21번

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

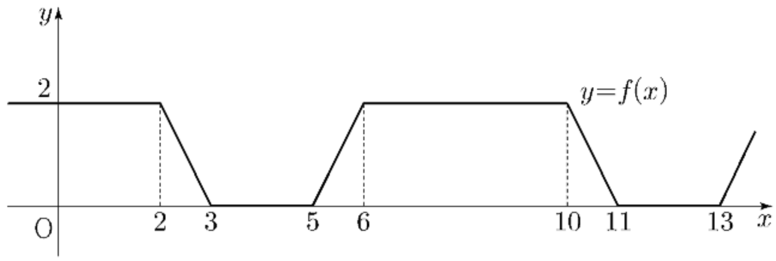
(가) $f(x)=\begin{cases} 2 & (0 \le x < 2) \\ -2x+6 & (2 \le x < 3) \\ 0 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이고 $f(x)=f(x-8)$이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}+n & (x \ne 0) \\ n & (x=0) \end{cases}$$

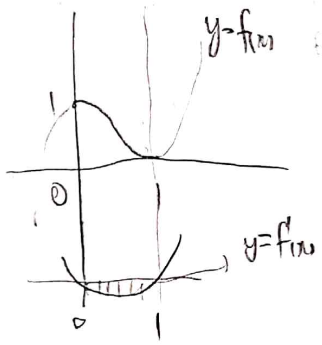
에 대하여 함수 $(f \circ g)(x)$가 상수함수가 되도록 하는 60 이하의 자연수 n의 개수는? [4점]



① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

6-4 98학년도 수능 인문, 예체능계 29번

당시에 이걸 $y=ax^3+bx^2+cx+1$로 봐서 $y'=3ax^2+2bx+c$에서, $\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=-1 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$을 이용해서 구하려고 많은 학생들이 시도했었다. 그러나 지금은 절대다수의 학생들이 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$에서 $f'(0)=f'(1)=0$임을 이용해서 $f'(x)=3ax(x-1)=3ax^2-3ax$에서 $f(x)=ax^3-\frac{3}{2}ax^2+1$이므로 $c=0$, $b=-\frac{3}{2}a$이고, $f(1)=1-\frac{1}{2}a=0$에서 $a=2$임을 알 수 있으므로 $a^2+b^2+c^2=2^2+(-3)^2+0^2=13$이라고 답을 구할 수 있다. 초기 수능문제인 것만큼 단순하고 다항식을 미분해서도 충분히 구할 수 있지만 그래프 개형을 추론하라는 것을 직접적으로 보여준 기념비적인 문제이므로 그래프 개형을 잘 그릴 수 있게 연습하자. 참고로 최소한 a의 값은 다음과 같이 곧장 구할 수 있다.



$$\frac{3a(1)^3}{6}=\frac{a}{2}=1 \rightarrow a=2$$

6-5 14학년도 수능 A형 21번

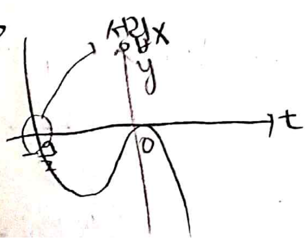
엄밀하게 푸는 거랑 답이 되는 상황 하나를 골라서 푸는 거랑 차이가 크다. 엄연히 공부하는 입장이니 엄밀하게 풀어보자.

일단 (가)에 의해, $f(1)=1+a+b=2 \rightarrow a+b=1$

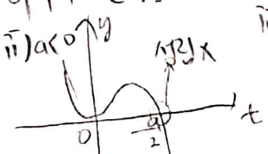
$f'(t)=3t^2+2at+b$에서, 점 P를 구하기 위해 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$에서 $x=0$을 대입해 $P(0, f(t)-tf'(t))=P(0, t^3+at^2+bt-t(3t^2+2at+b))=P(0, -t^2(2t+a))$임을 알 수 있다. 이때, $g(t)=|h(t)|$ 이므로 (나)를 만족하려면 $h(t)=0$인 실근 t에서는 제곱꼴이어야 한다.

$h(t)=-t^2(2t+a)$라 할 때 i) $a>0$, ii) $a<0$, iii) $a=0$일 때로 나눌 수 있다.

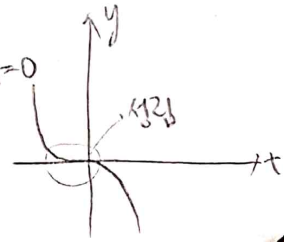
i) $a>0$



ii) $a<0$



iii) $a=0$



$a=0$이므로 $a+b=1$ 에서, $b=1$ 이다.

$\therefore f(x)=x^3+x$ 에서, $f(3)=3^3+3=30$

굳이 '왜 세제곱꼴 이상이어야 해요?' 하면 더 엄밀히 풀 수도 있지만, 그러면 상당히 단계가 많고 이제 문제에서 '기본전제'로 써가며 조건 1로 내는 정도니 여기에 대한 증명은 생략한다. 잠깐 언급만 하자면 $h(t)=0$일 때 세제곱꼴 이상이 아니면 미분할 시 실수 t에서 $h'(t)$가 0이 아니므로 $g(t)$가 불연속이라 모순이다.

6-6 16학년도 수능 A형 21번

(가)에 의해, $f(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$로 표현가능하다. (단, $D=\underbrace{a^2-4b\le 0}_{}$이고 $1-a+b\ne 0$)

$\to a^2-4b>0$이면 (가)에 모순

(나)에 의해, $x^2+ax+b=(x-\alpha)^2$ $(3\le\alpha\le5)$ 임이 확정되었으므로 $f(x)=(x+1)(x-\alpha)^2$ 에서,

$f'(x)=(x-\alpha)^2+2(x+1)(x-\alpha)=(x-\alpha)(3x+2-\alpha)$ 이다. $\therefore \dfrac{f'(0)}{f(0)}=\dfrac{\alpha(\alpha-2)}{\alpha^2}=\dfrac{\alpha-2}{\alpha}=1-\dfrac{2}{\alpha}$ 이고,

$3\le\alpha\le5$ 이므로 $\underset{\frac{1}{3}}{\underset{\parallel}{1-\dfrac{2}{3}}}\le\dfrac{f'(0)}{f(0)}\le\underset{\frac{3}{5}}{\underset{\parallel}{1-\dfrac{2}{5}}}$ 에서, $M=\dfrac{3}{5}$, $m=\dfrac{1}{3}$ $\therefore Mm=\dfrac{1}{5}$

6-7 17학년도 9월 평가원 나형 21번

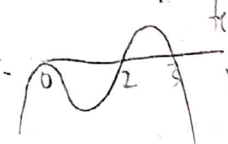
상당히 케이스 분류가 중요한 문제이다. 약간의 센스를 이용해서 3가지에서 2가지로 경우를 줄이자.

$(x(x-2)(x-3))'=(x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2)$ 에서, $x=0\to6$
$x=2\to-2$
$x=3\to3$

(가)에 의해, $f(x)=kx^a(x-2)^b(x-3)^c$ (단, $a\ge1$, $b\ge1$, $c\ge1$ 인 자연수, $k<0$)

i) $(a,b,c)=(2,1,1)$

$f(x)=kx^2(x-2)(x-3)$ 이므로 그래프 개형이 다음과 같다.



솔직히 여기서 바로 거르자. $f(1)$은 음수다. ∴ 최대 목표건 아니다.

이 때 $|x(x-2)(x-3)|$과 비교하면 $x=2$와 $x=3$인 부분에서 k값에 따라 (나)가 만족되기도, 안 되기도 한다. 만약 (나)를 만족하려면, $f(x)\le|x(x-2)(x-3)|$ 이므로 $f'(2)\le2$ ---①
$f'(3)\ge-3$ ---②

$f'(x)=k\{2x(x-2)(x-3)+x^2(x-3)+x^2(x-2)\}$이므로 $\left.\begin{matrix}f'(2)=-4k\le2\\f'(3)=9k\ge-3\end{matrix}\right]$ 에서, $-\frac{1}{3}\le k<0$ 이므로 $f(1)=2k$ 에서 최댓값 존재 X

ii) $(a,b,c)=(1,2,1)$

$f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$, $f'(x)=k\{(x-2)^2(x-3)+2x(x-2)(x-3)+x(x-2)^2\}$ 에서, i)와 같은 원리로

$f(x)\le|x(x-2)(x-3)|$ 에서, $\left.\begin{array}{l} f'(0)=-12k\le 6 \rightarrow k\ge -\frac{1}{2} \\ f'(3)=3k\ge -3 \rightarrow k\ge -1 \end{array}\right] \rightarrow -\frac{1}{2}\le k<0$ 이고,

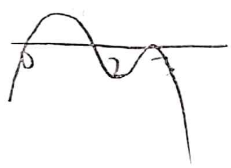
$f(1)=-2k\le 1$ 에서, $f(1)$의 최댓값은 1이다.

iii) $(a,b,c)=(1,1,2)$

$f(x)=kx(x-2)(x-3)^2$, $f'(x)=k\{(x-2)(x-3)^2+x(x-3)^2+2x(x-2)(x-3)\}$ 에서, i), ii)와 같은 원리로

$f(x)\le|x(x-2)(x-3)|$ 에서, $\left.\begin{array}{l} f'(0)=-18k\le 6 \rightarrow k\ge -\frac{1}{3} \\ f'(2)=2k\ge -2 \rightarrow k\ge -1 \end{array}\right] \rightarrow -\frac{1}{3}\le k<0$

$f(1)=-4k\le \frac{4}{3}$ 에서, $f(1)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$이다.



$\therefore$ i), ii), iii)에 의해, $f(1)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$이다.

6-8 19학년도 수능 나형 21번

엄밀하게 풀려면 상당히 까다로운 문제다. 일단 $g(0)$의 값을 조건에서 눈치채야 하는 부분이 있고, $g(-3)$를 주지 않은 것을 통해 간접적으로 추론도 해야 하는 (물론 현장에서는 별 고민없이 바로 판별식으로 풀었겠지만) 아주 정교한 문제이다. 답만 내는 데 급급해하지 말고 차근차근 풀어보자.

$g(x)$가 뭔지 모르므로 삼차함수임을 아는 $f(x)$로 나누어 $g(x)$를 파악하려 시도해야 한다.

$g(x)=\frac{x(x+3)}{f(x)}$ (단, $f(x)\neq 0$인 실수 x에 한함) $\rightarrow$ $g(x)$가 실수 전체에서 연속이라 했으니 $f(x)$의 인수 중 $(x+3)$은 있으면 안 된다. (있을시 $g(x)$ 연속에 모순)

(나)에 의해 $g(0)$의 값이 존재하고 $g(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{f(x)}=1=g(0)$에서

$f(x)=x(x^2+ax+b)$임을 알 수 있고, $b=3$임을 알 수 있다.

x^2+ax+b에서 $a^2-4b>0$일 경우 (단, $9-3a+b\neq 0$) $x^2+ax+b=0$인 실근 α_1, α_2에서 $g(x)$가 정의가 안

되어 모순.

$\therefore$ x^2+ax+b의 판별식 D에서 $D=a^2-4b<0$ 이고, $b=3$이므로 $-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$.

$f(1)=1+a+b=4+a$에서, $f(1)$의 자연수이므로 a는 -3이상 정수

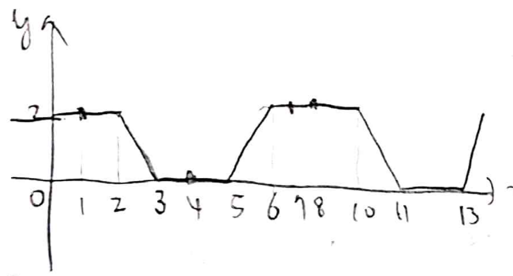
$\therefore$ $g(2)=\frac{5}{7+2a}$에서, 가능한 a는 $-3,-2,-1,0,1,2,3$이므로 $g(2)$의 최솟값은 $a=3$일 때의 값인 $\frac{5}{13}$이다.

6-9 20학년도 6월 평가원 나형 21번

잘 보면 되게 쉽게 풀리고, 대칭과 주기성을 못 보면 일일이 그려 노가다로 풀었을 법한 문제이다.
한번 풀어보자.

$g(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}+n & (x\neq0)\\ n & (x=0)\end{cases}$ 에서, $x>0$이면 $\frac{|x|}{x}=1$, $x<0$이면 $\frac{|x|}{x}=-1$ 이므로 $g(x)=n+1$ or n or $n-1$ 이다.

$f(g(x))$가 상수함수이므로 $f(g(x))=2$ 또는 0임을 알 수 있다. n을 키워보며 실험해보자.



$n=1 \to$ 성립
$n=2 \to f(2)\neq f(3)$ 성립 x
$n=3 \to f(2)\neq f(3)$ 성립 x
$n=4 \to$ 성립
$n=5 \to f(5)\neq f(6)$ 성립 x
$n=6 \to f(5)\neq f(6)$ 성립 x
$n=7 \to$ 성립
$n=8 \to$ 성립
$n=9$를 대입하려할 때,

$f(x)=f(x-8)$이라는 (나)조건이 떠올랐으면 $n=9$일 때는 $n=1$인 상황과 같음을 알 수 있으므로

$n=1\sim8$
$n=9\sim16$
$n=17\sim24$
⋮

등으로 구간을 나눌 수 있음을 알 수 있다. 각 구간마다 성립하는 자연수 n의 개수는 4개이므로 $n=49\sim56$까지인 총 7개의 구간에서 자연수 n이 28개 있음을 찾고, $n=57\sim64$인 구간에서 $n=60$까지 따지면 되므로 $f(x)=f(x-8)$에서, 이를 $n=1\sim8$인 구간 중 $n=4$인 구간까지로 볼 수 있어서 $n=57\sim64$인 구간에서는 2개가 가능함을 찾을 수 있다.

$\therefore$ 60이하의 자연수 n의 개수는 $28+2=30$(개)이다.

Chapter 7 문제

7-1. 12학년도 9월 평가원 20번

구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [4점]

> (가) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 1$
>
> (나) $\cos x \int_0^x f(t)dt = \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ $\left(단, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$
>
> $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 넣어도 얻는게 없음.

① $\frac{1}{5}$　　② $\frac{1}{4}$　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 1

④

$$-\sin x \int_0^x f(t)dt + \cos x f(x) = \cos x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt - \sin x f(x)$$

$x=\frac{\pi}{4}$ 대입

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt + \frac{\sqrt{2}}{2} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt - \frac{\sqrt{2}}{2} f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

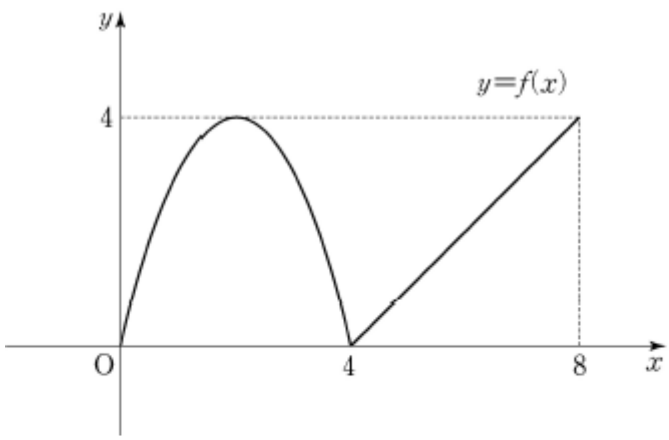
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

7-2. 17학년도 9월 평가원 나형 29번

구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a\,(0 \le a \le 4)$에 대하여 $\displaystyle\int_{a}^{a+4} f(x)dx$의 최솟값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



7-3. 19학년도 9월 평가원 나형 21번

사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$ 에 대하여 $x \geq 0$ 에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$ 에서 $g(x)=c_1$ (c_1 은 상수)
(나) $1<x<5$ 에서 $g(x)$ 는 감소한다.
(다) $x>5$ 에서 $g(x)=c_2$ (c_2 는 상수)

$f(\sqrt{2})$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

7-2 17학년도 9월 평가원 나형 29번

이과는 바로 $\int_a^{a+4} f(x)dx$를 a에 대해 미분해서 쉽게 풀 것이다. 근데 나형 교육과정에서는 바로 a에 대해 미분이 불가하다. (나형에서는 위아래 다 변수인 것은 교육과정 외이다... 라고 '알려져' 있다)

근데, 교육과정 안에서 '가능하다.' 한번 보자. ↱ 이게 '발상적이다' 생각되면 $\int_4^{a+4} f(x)dx - \int_4^{a} f(x)dx$라 하자.

$h(a)=\int_a^{a+4} f(x)dx$라 하자. $h(a) = \int_0^{a+4} f(x)dx - \int_0^{a} f(x)dx$에서, $h'(a) = f(a+4) - f(a)$이다.

$0 \le a \le 4$이므로 $\underset{h(a)\text{가 극값을 가질 때}}{\wedge}$ $-a(a-4) = (a+4)-4 = a$이므로 $a^2-3a=0$에서, $a=0$ 또는 $a=3$이다.

$0<a<3$일 때 $f(a+4)-f(a)<0$이므로 $h(a)$는 감소, $a>3$일 때 $f(a+4)-f(a)>0$이므로 $h(a)$는 증가하므로 $0\le a \le 4$에서 $a=3$일 때 최소인 게 확실하다. ∴ $a=3$일 때 $h(a)$ $= \int_3^7 f(x)dx = \int_3^4 f(x)dx + \int_4^7 f(x)dx$이고, 여기에서 넓이를 구할 때도 단순 계산으로 풀지 말고 우리가 아는 식을 최대한 써먹자.

$S_1 = 1\times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$S_2 = \frac{|-1|(4-3)^3}{6} = \frac{1}{6}$

$S_3 = 3\times 3\times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

$\therefore (S_1+S_2)+S_3 = \int_3^4 f(x)dx + \int_4^7 f(x)dx = \int_3^7 f(x)dx = \frac{37}{6}$에서, $p+q=43$이다.

7-3 19학년도 9월 평가원 나형 21번

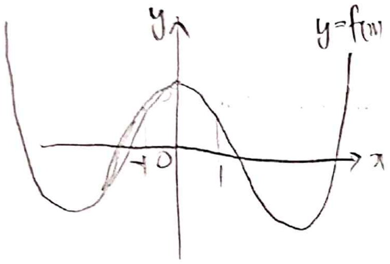
본인이 집어넣었을 때 생각과 별개로 푸는 학생들을 괴롭힌 문제다... 아마 수식으로 표현해서 $g(x)$를 그래프 없이 바로 풀려 했으면 상당히 복잡했을 것이다. 하지만 문제 조건에서 무한수인 $f(x)$를 주었고 '$x\ge 0$에서 정의된'이란 조건까지 줘가며 그래프로 풀어달라고 부탁을 하고 있다. 어디 한번 의도에 맞게 풀어보자.

우선 $f(x)-|f(x)|$에 주목해보자.
i) $f(x)\ge 0 \rightarrow f(x)-|f(x)| = f(x)-f(x)=0$
ii) $f(x)<0 \rightarrow f(x)-|f(x)| = f(x)-(-f(x)) = 2f(x)<0$

즉, $g(x)$는 감소함수이다.

또한, $x=0$에서 정의되므로 $x=0$을 대입하면, $g(0)=0$이므로 (가)와 연결시키면 $C_1=0$임을 바로 알 수 있다. 여기까지 알아내고 난 뒤에 '왜' 굳이 $x\geq 0$으로 정의해놓고는 $\int_{-x}^{2x}$ 꼴로 $g(x)$를 주었는지 생각해봐야 하고, 이를 $f(x)$가 우함수인 것과 어떻게 이어야 할지에 대해 고민해봐야 한다.

(나)에 의해 $f(x)<0$인 구간이 존재해야 하고, $0<x<1$에서는 $f(x)>0$임을 추론가능하므로 $f(x)$ 개형은 다음과 같이 확정된다. $\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$에서, $2x$가 $-x$보다 x가 커짐에 따라



$f(x)=0$인 지점에 먼저 도달함을 알 수 있으므로 $2x$를 기준으로 살펴보자. (가)와 (나)의 경계에서 $2x=2$이므로 $f(x)=0$을 만족하는 실근이 $x=2$임을 알 수 있다. $2x>2$에서는 $f(2x)<0$이므로 이것만으로도 $g(x)$는 감소한다. 그런데, $x>5$에서는 $g(x)=C_3$으로 상수함수가 된다고 한다. 왜일까? 그야 단순하다. $f(2x)$든 $f(-x)$든 모두 0보다 크거나 같기 때문이다. $f(-x)$가 양수인지 판단하는 시점에서는 이미 $f(2x)$가 양수이므로 (나)와 (다)의 경계에서 $-x=-5$이다. $\therefore f(-5)=0$.

$f(2)=0$이고, $f(x)$는 우함수이므로 $f(-2)=f(-5)=0$임을 아니 $f(x)=(x^2-4)(x^2-25)$로 표현 가능하다.

$\therefore f(\sqrt{2})=(-2)(-23)=46$이다.

여담으로 C_3를 직접 찾아보려 계산하다보면 정말 멘탈이 나갈거다. 어마무시하게 더럽다. 이는 평가원에서도 C_3를 구하는 학생이 없겠지하고 냈다 보는게 맞는 듯하다.

9-25 18학년도 수능 나형 30번

다들 이게 호흡이 길어 힘들다고 하는데, 의외로 그와 반비례하여 각 과정을 거칠 때 써야 하는 발상의 난이도는 171130(나형)에 비해 훨씬 낮아 같은 실력일 시 이 문제가 더 풀 만할거다. 다만 이 문제에서 유일한 흠은 계산이 상당히 지저분해 보여 학생들이 지레 겁을 먹기 쉬운 구조라는 거다. 물론 문제 풀이 막바지에 더러운 수가 깔끔히 싹 사라지는 것을 보면 이게 괜히 수능문제인게 아니라는 생각이 들 정도로 좋은 문제임을 알 수 있을거다. 하나씩 차근차근 풀이보자.

(가)에서 먼저 $0\leq x<1$이라는 범위를 줬으니 해당 범위에서 생각해보면, $f(0)=0$, $f(1)=1$이고 $0\leq x<1$에서 $f(x)>x$이다.

Chapter 8 문제

8-1. 13학년도 수능 12번

연속함수 $f(x)$가

$$f(x) = e^{x^2} + \underbrace{\int_0^1 t f(t)\,dt}_{k}$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 x f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① $e-2$　　② $\frac{e-1}{2}$　　③ $\frac{e}{2}$　　④ $e-1$　　⑤ $\frac{e+1}{2}$

$$k = \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot 2te^{t^2} + kt\,dt \qquad 4$$

$$k = \left[\frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{k}{2}t^2\right]_0^1$$

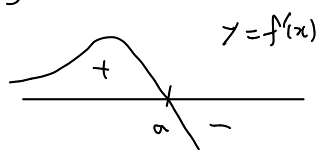
$$k = \frac{1}{2}e + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{k}{2} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \qquad k=e-1$$

8-2. 15학년도 수능 28번

양수 a에 대하여 함수 $f(x) = \int_0^x (a-t)e^t dt$의 최댓값이 32이다. 곡선 $y = 3e^x$과 두 직선 $x = a$, $y = 3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

$f(0)=0$　　$f'(x) = (a-x)e^x$

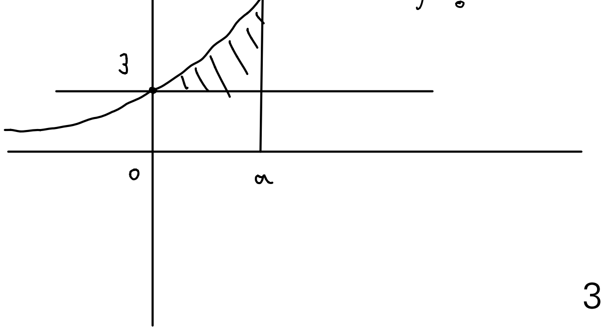


96

$$f(a) = \int_0^a (a-t)e^t\,dt = 32$$

$$= \int_0^a xe^{a-x}\,dx = -xe^{a-x}\Big|_0^a + \int_0^a e^{a-x}\,dx$$

$$= -a + \left[-e^{a-x}\right]_0^a = e^a - a - 1$$



$$\int_0^a 3(e^x - 1)\,dx$$

$$= 3\left[e^x - x\right]_0^a = 3(e^a - a - 1)$$

$$= 3\times 32 = 96$$

8−3. 14학년도 9월 평가원 21번

자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=e^{t} \\ y=(2t^2+nt+n)e^{t} \end{cases}$$

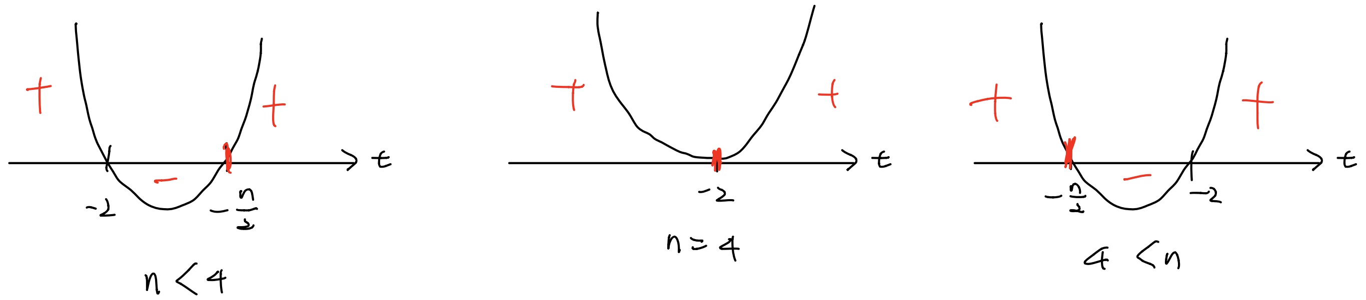
$\dfrac{b_n}{a_n} = 2t^2+nt+n$

이고, $x \ge e^{-\frac{n}{2}}$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a_n$에서 최솟값 b_n을 갖는다. $\dfrac{b_3}{a_3}+\dfrac{b_4}{a_4}+\dfrac{b_5}{a_5}+\dfrac{b_6}{a_6}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{23}{2}$ ② 12 ③ $\dfrac{25}{2}$ ④ 13 ⑤ $\dfrac{27}{2}$

2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2t^2+(n+4)t+2n)\,e^{t}}{e^{t}} = (2t+n)(t+2)$$



최솟값 $t=-\frac{n}{2}$ 일때 최솟값 $t=-\frac{n}{2}$ 일때 최솟값 $t=-2$ 일때

$\dfrac{b_n}{a_n} = 2\times\dfrac{n^2}{4} - \dfrac{n^2}{2} + n = n$

$\dfrac{b_n}{a_n} = 8-n$

$3+4+3+2 = 12$

8-4. 05학년도 9월 평가원 29번

단면의 넓이가 120 (m^2) 로 일정한 원통형의 물탱크에 물이 5 (m) 까지 차있다. 이 물탱크의 바닥 중앙에 있는 넓이 $\frac{1}{5}$(m^2) 인 구멍으로 물이 빠지고 있다. 물탱크의 바닥으로부터 수면까지의 높이가 y(m) 일 때, 빠져나가는 물의 속력 v(m/초) 는 $v = \sqrt{20y}$ 로 주어진다고 하자. 다음은 이 식을 이용해서 물의 높이가 5 (m) 에서 $\frac{5}{4}$ (m) 로 줄어들 때까지 걸리는 시간을 계산한 것이다.

<풀이>

v 와 y 가 시간에 따라 변하므로 v 와 y 의 관계식 $v = \sqrt{20y}$ 를 t 에 관하여 미분하여 v 와 y 의 시간에 따른 변화율 사이의 관계식을 구하면

$$\frac{dv}{dt} = \frac{10}{\sqrt{20y}} \frac{dy}{dt} = \frac{10}{v} \frac{dy}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

한편, 물탱크에 있는 물의 양의 순간변화율은 그 순간 빠져나가는 물의 양과 부호만 다르므로

$120\frac{dy}{dt} = -\frac{V}{5}$ $\boxed{\text{(가)}}$ $\cdots\cdots\cdots$ (2)

(2)식에서 얻은 $\frac{dy}{dt}$ 를 (1) 식에 대입하여 정리하면

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{60}$$

따라서 구하는 시간은 $\boxed{\text{(나)}}$ (초)이다.

위의 풀이에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은? [4점]

	(가)	(나)
①	$120\frac{dy}{dt} = -\frac{v}{5}$	240
②	$120\frac{dy}{dt} = -\frac{v}{5}$	300
③	$120\frac{dy}{dt} = -\frac{v}{10}$	180
④	$120\frac{dy}{dt} = -\frac{v}{10}$	240
⑤	$120\frac{dy}{dt} = -\frac{v}{10}$	300

$\frac{dV}{dt} = \frac{10}{V} \times -\frac{V}{600} = -\frac{1}{60}$

$V_4 = \sqrt{20 \times \frac{5}{4}} = 5 \qquad V_1 = \sqrt{20 \times 5} = 10$

$V = -\frac{t}{60} + 10 \qquad t = 300$

2

8−5. 18년 3월 교육청 30번

함수

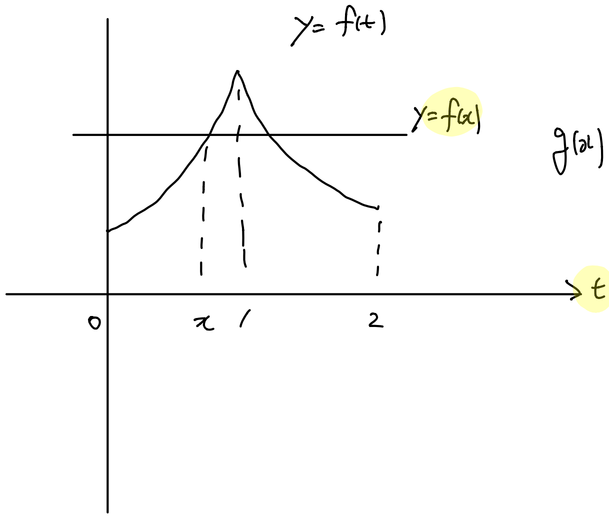
$$f(x)=\begin{cases} e^{x} & (0\le x<1)\\ e^{2-x} & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

에 대하여 열린 구간 (0, 2)에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|\,dt \qquad g(0)=0$$

의 극댓값과 극솟값의 차는 $ae+b\sqrt[3]{e^2}$이다. $(ab)^2$의 값을 구하시오. [4점] (단, a, b는 유리수이다.)

36



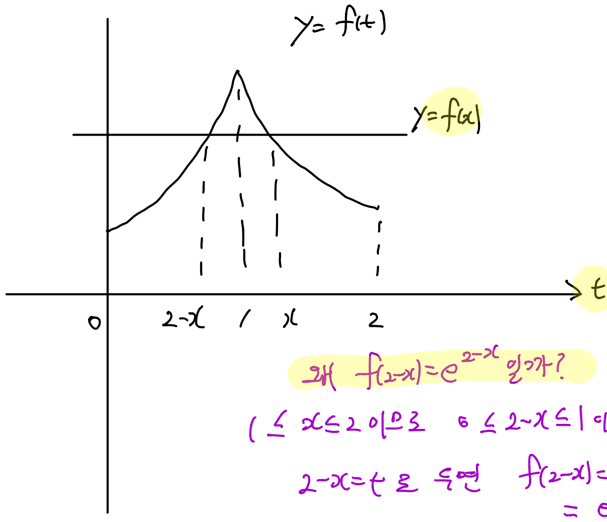
$0\le x\le 1$

$$g(x)=\int_0^x f(x)-f(t)\,dt$$

$1\le x\le 2$

$$g(x)=\int_0^{2-x} f(x)-f(t)\,dt+\int_{2-x}^{x} f(t)-f(x)\,dt$$

$$(2-x)f(x)-\int_0^{2-x} f(t)\,dt+\int_{2-x}^{x} f(t)\,dt-(2x-2)f(x)$$



$0\le x\le 1$

$$g'(x)=xf'(x)=xe^{x}$$

$1\le x\le 2$

$$g'(x)=\cancel{-f(x)}+(2-x)f'(x)+f(2-x)+\cancel{f(x)}+f(2-x)$$

$$-2f(x)-(2x-2)f'(x)$$

$$=2f(2-x)-2f(x)+(4-3x)f'(x)$$

$$=2e^{2-x}-2e^{2-x}-(4-3x)e^{2-x}$$

$$=(3x-4)e^{2-x}$$

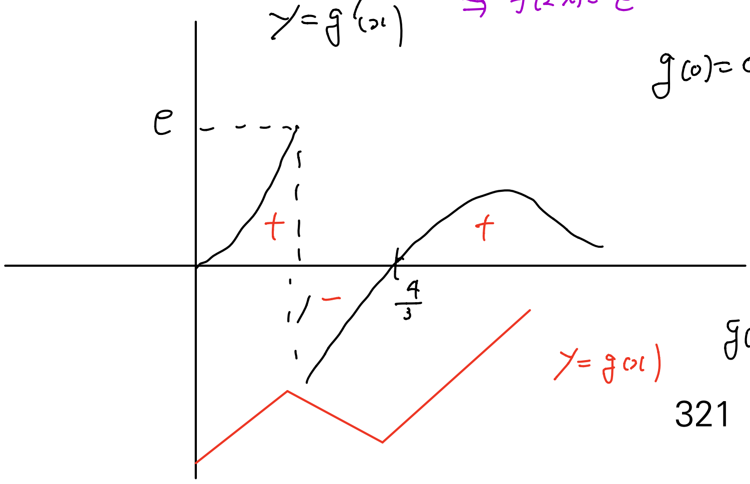
왜 $f(2-x)=e^{2-x}$ 일까?

$1\le x\le 2$ 이므로 $0\le 2-x\le 1$ 이다.

$2-x=t$ 로 두면 $f(2-x)=f(t)$ $\{0\le t\le 1\}$ $=e^{t}$

$\Rightarrow f(2-x)=e^{2-x}$

$g(0)=0$



극대 $g(1)$, 극소 $g\left(\frac{4}{3}\right)$

$g(1)=1$

$$g(x)\begin{cases} 0\le x\le 1 & (x-1)e^{x}+1\\ 1\le x\le 2 & (-3x+1)e^{2-x}+2e+1\end{cases}$$

$g\left(\frac{4}{3}\right)=-3e^{\frac{2}{3}}+2e+1$

$$-g\left(\tfrac{4}{3}\right)+g(1)=-3e^{\frac{2}{3}}+2e$$

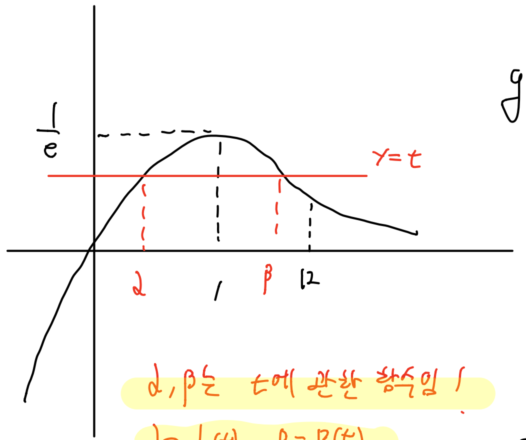
8−6. 19년도 사관학교 30번 t의 구간

함수 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$에 대하여 구간 $\left[\dfrac{12}{e^{12}},\infty\right)$에서 정의된 함수

$=xe^{-x}$

$$g(t)=\int_0^{12}|f(x)-t|dx$$

가 $t=k$에서 극솟값을 갖는다. 방정식 $f(x)=k$의 실근의 최솟값을 a라 할 때, $g'(1)+\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right)$의 값을 구하시오. [4점]



α, β는 t에 관한 함수임!

$\alpha=h(t),\ \beta=p(t)$

$g(t)=\begin{cases} \dfrac{12}{e^{12}}<t<\dfrac{1}{e} & \displaystyle\int_0^{h(t)} t-f(x)\,dx+\int_{h(t)}^{p(t)} f(x)-t\,dx+\int_{p(t)}^{12} t-f(x)\,dx \\ \dfrac{1}{e}<t & \displaystyle\int_0^{12} t-f(x)\,dx \end{cases}$

$f(h(t))=t$

$f(p(t))=t$

$t\,h(t)-\displaystyle\int_0^{h(t)} f(x)\,dx+\int_{h(t)}^{p(t)} f(x)\,dx-t\big(p(t)-h(t)\big)+t\big(12-p(t)\big)-\int_{p(t)}^{12} f(x)\,dx$

$g'(t)=\begin{cases} \dfrac{12}{e^{12}}<t<\dfrac{1}{e} & h(t)+\cancel{th'(t)}-\cancel{th'(t)}+\cancel{tp'(t)}-\cancel{th'(t)}-p(t)+h(t)-\cancel{tp'(t)}+\cancel{th'(t)}+12-p(t)-\cancel{tp'(t)}+\cancel{tp'(t)}=12+2h(t)-2p(t) \\ t>\dfrac{1}{e} & 12 \end{cases}$

$g'(k)=0 \Rightarrow 12+2h(k)-2p(k)=0$

핵심 point

$\boxed{\begin{array}{l} h(k)=a \Leftarrow f(a)=k \\ p(k)=6+a \Rightarrow f(a+6)=k \end{array}}$

$(a+6)e^{-a-6}=k$

$ae^{-a}=k$

$\left(1+\frac{6}{a}\right)e^{-6}=1$

$1+\frac{6}{a}=e^6$

$\ln\left(1+\frac{6}{a}\right)=6$

$g'(1)=12$

$12+6=18$

18

Chapter 9 문제

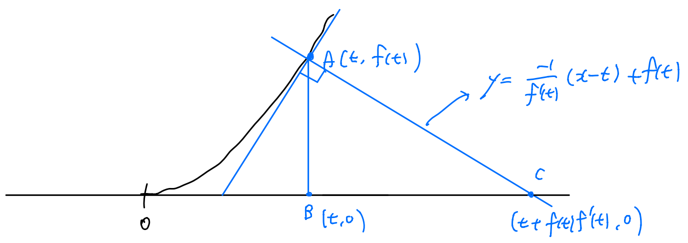
9−1. 18학년도 9월 평가원 18번

증가 함수

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, f(t))\ (t>0)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. 모든 양수 t에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^{t})$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

$f(1)=0$

① $e-2$ ② e ③ $e+2$ ④ $e+4$ ⑤ $e+6$



적분상수 잊지말자

$$\frac{1}{3}f^3(t)=\frac{1}{3}e^{3t}-e^{2t}+e^{t}+C_1$$

$$f^3(t)=e^{3t}-3e^{2t}+3e^{t}-1$$

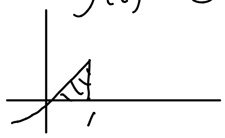
$$f^3(t)=(e^{t}-1)^3$$

①

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}f^2(t)f'(t)=\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^{t})$$

치환적분꼴

$$f(t)=e^{t}-1 \quad (f'(t)>0)$$



$$\int_0^1 e^{t}-1\,dt=\left[e^{t}-t\right]_0^1=e-2$$

9−2. 18년 7월 교육청 20번

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)=\int_1^x \frac{f(t^2+1)}{t}dt$
>
> $g(1)=0$, $g'(x)=\frac{f(x^2+1)}{x}$
>
> $g(x)$는 미분하기 쉬운 형태
>
> (나) $\int_2^5 f(x)dx=16$

$g(2)=3$일 때, $\int_1^2 xg(x)dx$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

①

$$\int_1^2 xg(x)\,dx=\frac{1}{2}x^2g(x)\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 x^2g'(x)\,dx$$

$$=6-4=2$$

$$\frac{1}{2}\int_1^2 2x f(x^2+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^5 f(t)\,dt=8$$

9−3. 17년 10월 교육청 16번

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \neq 0$인 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2 f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\frac{1}{3} f^3(x) = \ln(x^2+1) + C$
(나) $f(0) = 0$ $C=0$

$\{f(1)\}^3$의 값은? [4점]

① 2ln2 ② 3ln2 ③ $1+2\ln 2$ ④ 4ln2 ⑤ $1+3\ln 2$

$\frac{1}{3} f^3(1) = \ln 2$

②

9−4. 05년 10월 교육청 26번

정적분 $\int_0^1 2x e^{x^2} dx$ 의 값은?(단, e 는 자연로그의 밑) [3점]

①

① $e-1$ ② e ③ $e+1$ ④ e^2-1 ⑤ e^2

바로

$[e^{x^2}]_0^1 = e-1$

9−5. 17년 3월 교육청 4번

$\int_1^{e^2} \dfrac{(\ln x)^3}{x} dx$ 의 값은? [3점]

① 2ln2 ② 2 ③ 4ln2 ④ 4 ⑤ 6ln2

바로

$\left[\frac{1}{4}(\ln x)^4\right]_1^{e^2} = 4$

④

9−6. 16년 10월 교육청 23번

함수 $f(x) = 8x^2 + 1$ 에 대하여 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f'(\sin x)\cos x\, dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\Big[f(\sin x) \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = f(1) - f(\tfrac{1}{2})$$

$$= 9 - 3 = 6$$

6

9−7. 17년 3월 교육청 16번

연속함수 $f(x)$가

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 12,\ \int_{0}^{1} xf(x)dx = \int_{0}^{-1} xf(x)dx$$

$\int_{-1}^{1} xf(x)\, dx = 0$

를 만족시킨다. $\int_{-1}^{x} f(t)dt = F(x)$라 할 때, $\int_{-1}^{1} F(x)dx$의 값은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$F(-1) = 0$

$F'(x) = f(x)$

F(x)는 미분하기 쉬움.

$\int_{-1}^{1} 1 \cdot F(x)\, dx$

$= xF(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} xf(x)\, dx$

$= F(1) - F(-1) = F(1) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 12$

4

9−8. 17년 3월 교육청 21번   현역때 재수생하며 맞춘문제. 근데 시간 관리 실패로 주관식 말아먹음.
따라서 막히면 일단 skip.

구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수

$F(x) = \int_0^x f(t)dt \ (0 \le x \le 1)$ $F(0) = 0$ $F'(x) = f(x)$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $F(x) = f(x) - x$
(나) $\int_0^1 F(x)dx = e - \frac{5}{2}$ $\int_0^1 f(x) - x \, dx = e - \frac{5}{2}$ $F(1) - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2}$

$F(1) = e - 2$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $F(1) = e$ $F(1) = e - 2$

ㄴ. $\int_0^1 xF(x)dx = \frac{1}{6}$

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2 dx = \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$\int_0^1 x(f(x) - x)\,dx = \int_0^1 xF'(x)dx - \frac{1}{3}$ 4

$= xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx - \frac{1}{3} = F(1) - \int_0^1 f(x) - x\,dx - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\int_0^1 F(x)(F'(x) - x)\,dx = \frac{1}{2}F(x)^2\Big|_0^1 - \int_0^1 xF(x)\,dx$

$= \frac{1}{2}(e-2)^2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6}$

9−9. 14학년도 9월 평가원 30번

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x \le 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$ $g(t) = \begin{cases} f(\ln t) & (1 \le t \le e) \\ g(\frac{t}{e}) + 5 & (e \le t \le e^2) \end{cases}$

$e^x = t$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)dx = 6e^2 + 4$이다. $\int_1^e f(\ln x)dx = ae + b$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 정수이다.) [4점]

$\int_1^e g(x)\,dx = A$ $1 + 16 = 17$ 17

$\int_1^e g(x)\,dx + \int_e^{e^2} g(x)\,dx = (e+1)\int_1^e g(x)\,dx + 5(e^2 - e) = (e+1)A + 5(e^2 - e)$

$= 6e^2 + 4$

$\int_e^{e^2} g(\frac{t}{e}) + 5\,dt = e\int_1^e g(x)\,dx + 5(e^2 - e)$ $(e+1)A = e^2 + 5e + 4$

$A = e + 4$

식으로 $f(x) = -f(-x)$

9−10. 14학년도 수능 21번

연속함수 $y = f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$f(x) = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_1^{x+1} f(t)dt$이다. $f(1) = 1$일 때, $\pi^2 \displaystyle\int_0^1 xf(x+1)dx$의 값은? [4점]

① $2(\pi - 2)$ ② $2\pi - 3$ ③ $2(\pi - 1)$ ④ $2\pi - 1$ ⑤ 2π

1

$f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{\pi}{2} f(x+1)$

f(x)는 미분하기 쉬운 형태구먼!

$x=-1$ 대입

부분적분 하기 쉬운 형태구먼,

$2\pi \int_0^1 xf(x)\,dx$

$= 2\pi\left(xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx \right)$

$= 2\pi\left(f(1) - \int_0^1 f(x)\,dx \right) = 2\pi\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$

$= 2\pi - 4$

$-1 = f(-1) = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$

9−11. 14년 4월 교육청 15번

$\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \frac{a + \ln x}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \sin x)\cos x\, dx$가 성립할 때, 상수 a의 값은? [4점]

2

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\left[\frac{1}{2}(1+\sin x)^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$

$a = -1$

$\left[a\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{e^2}^{e^3} = a + \frac{5}{2}$

9−12. 12년 3월 교육청 15번

열린 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x) = 1 + \{f(x)\}^2$ (나) $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ $f''(x) = 2f(x)f'(x)$ 사실 적분하고 아무런 관계 없는 문제네 ㅋㅋㅋ

함수 $g(x) = \ln f'(x)$에 대하여 $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$의 값은? [3점]

$f'(x) > 0$

3

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

$g'(x) = \dfrac{f''(x)}{f'(x)} = \dfrac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

9−13. 10학년도 9월 평가원 28번

함수 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^6}dt$ 에 대하여 상수 a가 $f(a)=\frac{1}{2}$ 을 만족시킬 때, $\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}dx$ 의 값은? [3점]

2

① $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$ ② $\sqrt{e}-1$ ③ 1 ④ $\frac{\sqrt{e}+1}{2}$ ⑤ $\sqrt{e}+1$

$f(0)=0$

$f'(x)=\frac{1}{1+x^6}$

$\int_0^a e^{f(x)}f'(x)\,dx = \left[e^{f(x)}\right]_0^a$

$= e^{f(a)}-e^{f(0)} = \sqrt{e}-1$

9−14. 07학년도 수능 27번

1보다 큰 실수 a에 대하여 $f(a)=\int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$라 할 때, $f(a^4)$과 같은 것은? [3점]

2

① $4f(a)$ ② $8f(a)$ ③ $12f(a)$ ④ $16f(a)$ ⑤ $20f(a)$

$\ln x = t$

$\int_0^{\ln a}\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\ln a} = \frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}$

$f(a^4)=\frac{2}{3}(4\ln a)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}\times 8$

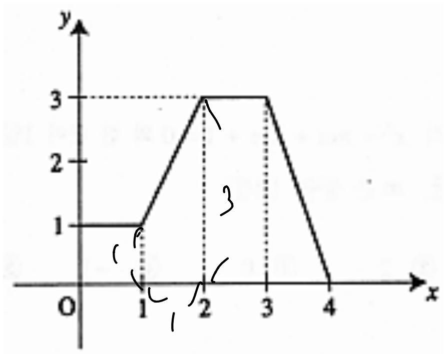
9−15. 98학년도 수능 13번

다음 그림은 $0 \le x \le 4$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 정적분 $\int_0^1 f(2x+1)dx$의 값은? [2점]

$\parallel$

$\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,dx$

$=\frac{1}{2}(2+3)=\frac{5}{2}$



4

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

9-16. 15년 10월 교육청 27번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) $\int_0^1 (x-1)f'(x+1)\,dx = -4$ $\quad \int_1^2 (t-2)\,f'(t)\,dt = -4$

$\int_1^2 f(x)dx$ 의 값을 구하시오. (단, $f'(x)$는 연속함수이다.) [4점]

$t f(t)\Big|_1^2 - \int_1^2 f(t)\,dt - 2\left(f(2)-f(1)\right) = -4$

6

$= f(1) - \int_1^2 f(t)\,dt = -4$

9-17. 15년 4월 교육청 17번

자연수 n에 대하여 함수 $f(n)=\int_1^n x^3 e^{x^2} dx$라 할 때, $\frac{f(5)}{f(3)}$의 값은? [4점]

$x \cdot x^2$

3

① e^{14} ② $2e^{16}$ ③ $3e^{16}$ ④ $4e^{18}$ ⑤ $5e^{18}$

$\frac{1}{2}\int_1^n 2x\, x^2 e^{x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_1^{n^2} te^t\,dt = \frac{1}{2}\left[(t-1)e^t\right]_1^{n^2}$

$= \frac{1}{2}(n^2-1)e^{n^2}$

$\frac{f(5)}{f(3)} = \frac{24\,e^{25}}{8\,e^9}$

$= 3e^{16}$

9-18. 14년 7월 교육청 9번

$x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$
(나) $f(x)+xf'(x)=x\cos x$ $\quad xf(x) = x\sin x + \cos x$

곱의 미분꼴

$f(\pi)$의 값은? [3점]

$\pi f(\pi) = -1$

① $-\frac{2}{\pi}$ ② $-\frac{1}{\pi}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{\pi}$ ⑤ $\frac{2}{\pi}$

2

9-19. 12년 7월 교육청 6번

양의 실수를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=x$, $h(x)=\ln x$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $g(x)$가 있다. 이때, $g(e)$의 값은? [3점]

(가) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=h(x)$ (나) $g(1)=-1$

$f(x)g(x) = x\ln x - x + C$

$g(1) = -1+C$　　$C=0$

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

3

$g(x) = \ln x - 1$

9-20. 03학년도 수능 8번

함수 $f(x)$는 연속함수이고 모든 실수 x에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(x)-2\int_0^x e^t f(t)dt=1$$

$f(0)=1$

이때, $f''(0)$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이고, $f''(x)$는 $f(x)$의 이계도함수이다.) [3점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

$f'(x) - 2e^x f(x) = 0$　　$f'(0) = 2$

3

$f''(x) - 2e^x f(x) - 2e^x f'(x) = 0$

$f''(0) - 2 - 4 = 0$

9-21. 18학년도 수능 15번　이거 ebs 연계임 ㅋㅋㅋ

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt = \int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}dt =$$

일 때, $(f\circ f)(a)=\ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은? [4점]

$\left[\ln(e^t+1)\right]_0^x =$

① ln11　② ln13　③ ln15　④ ln17　⑤ ln19

$\ln(e^x+1) - \ln 2$

$f(a)=b$　$f(b)=\ln 5$　$b = 2\ln 3$

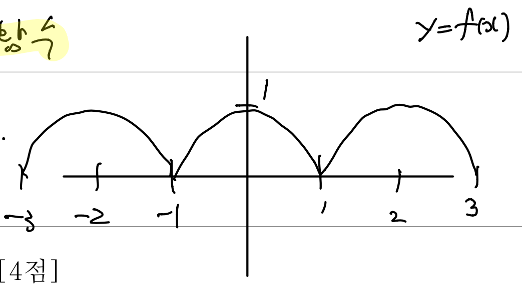
4

$f(a) = 3\ln 2$　$\ln(e^a+1) = \ln 18$

$a = \ln 17$

9−22. 14학년도 평가원 예비시행 21번

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. 기우함수



미분없이 개형 그리기

(가) $-1 \le x < 1$일 때 $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx = 4\int_0^1 f(x)dx$

ㄴ. $1 < x < 2$일 때, $f'(x) > 0$이다.

ㄷ. $\displaystyle\int_1^3 x|f'(x)|dx = 4$ * 이거 외운대로 $\int_{-1}^{1} x|f'(x)|\,dx$ 로 바꾸기 X

$f(x)$는 주기가 2인 우기함수 맞지만 x는 아님

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5

$\int_1^2 xf'(x)\,dx - \int_2^3 xf'(x)\,dx$

$xf(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)\,dx - xf(x)\Big|_2^3 + \int_2^3 f(x)\,dx$

$= 2f(2) - f(1) - 3f(3) + 2f(2) = 4$

9−23. 05학년도 9월 평가원 27번

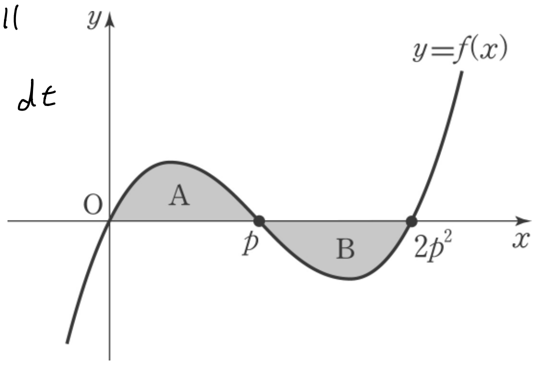
연속함수 $f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다. 이 곡선과 x 축으로 둘러싸인 두 부분 A ,B 의 넓이가 각각 α, β 일 때, 정적분 $\displaystyle\int_0^p 4xf(2x^2)dx$ 의 값은? (단, $p > \dfrac{1}{2}$) [4점]

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}\int_0^{2p^2} f(t)\,dt$

$= \frac{1}{4}(\alpha - \beta)$

11



5

① $\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ② $\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$ ③ $\alpha+\beta$ ④ $\dfrac{1}{4}(\alpha+\beta)$ ⑤ $\dfrac{1}{4}(\alpha-\beta)$

9−24. 20학년도 6월 평가원 20번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)>0$

(나) $\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=0$ $\qquad f(0)=1$

미분

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$라 할 때, $f(1)+\{F(1)\}^2=1$이다.

$F(0)=0 \quad F'(x)=f(x)$

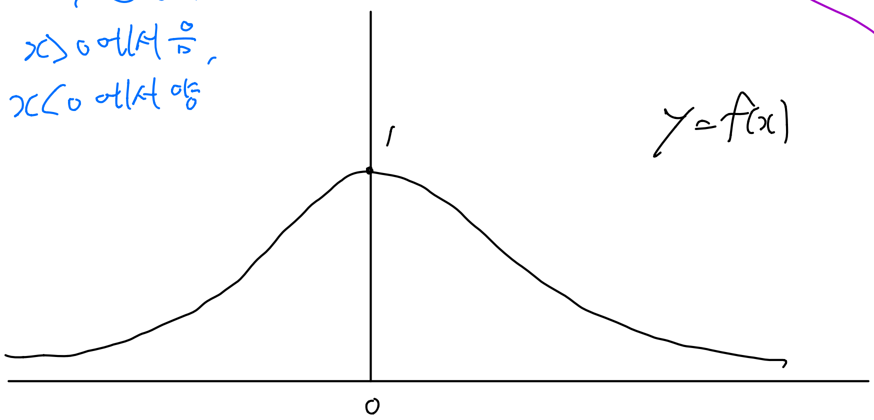
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$x>0$ 에서 양, $x<0$ 에서 음

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)\,dt=0 \qquad f'(0)=0$$

5

$x>0$에서 음, $x<0$에서 양



$f'(x)+2F'(x)F(x)=0$

$f(x)+F^2(x)=1$

$f(0)+F^2(0)=1 \quad C=1$

9−25. 18학년도 수능 나형 30번

이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
(나) $n \le x < n+1$일 때, $g(x)=\dfrac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$ 이다. (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 $k\ (k \ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

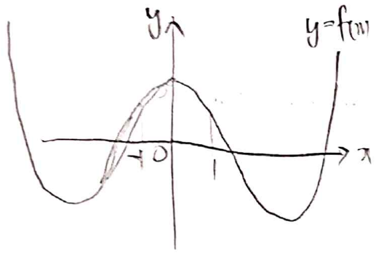
$$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\displaystyle\int_0^n h(x)\,dx$라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2a_n-n^2\right)=\frac{241}{768}$이다. k의 값을 구하시오.

[4점]

또한, $x=0$에서 정의되므로 $x=0$을 대입하면, $g(0)=0$이므로 (가)와 연결지으면 $C_1=0$임을 바로 알 수 있다. 여기까지 알아내고 난 뒤에 '왜' 굳이 $x\geq 0$으로 정의해놓고는 $\int_{-x}^{2x}$ 꼴로 $g(x)$를 주었는지 생각해봐야 하고, 이를 $f(x)$가 우함수인 것과 어떻게 이어야 할지에 대해 고민해봐야 한다.

(나)에 의해 $f(x)<0$인 구간이 존재해야 하고, $0<x<1$에서는 $f(x)>0$임을 추론 가능하므로 $f(x)$ 개형은 다음과 같이 확정된다. $\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$에서, $2x$가 $-x$보다 x가 커짐에 따라



$f(x)=0$인 지점에 먼저 도달함을 알 수 있으므로 $2x$를 기준으로 살펴보자. (가)와 (나)의 경계에서 $2x=2$이므로 $f(x)=0$을 만족하는 실근이 $x=2$임을 알 수 있다. $2x>2$에서는 $f(2x)<0$이므로 이것만으로도 $g(x)$는 감소한다. 그런데, $x>5$에서는 $g(x)=C_3$으로 상수함수가 된다고 한다. 왜일까? 그야 단순하다. $f(2x)$든 $f(-x)$든 모두 0보다 크거나 같기 때문이다. $f(-x)$가 양수인지 판단하는 지점에서는 이미 $f(2x)$가 양수이므로 (나)와 (다)의 경계에서 $-x=-5$이다. $\therefore f(-5)=0$.

$f(2)=0$이고, $f(x)$는 우함수이므로 $f(-2)=f(-5)=0$임을 아니 $f(x)=(x^2-4)(x^2-25)$로 표현 가능하다.

$\therefore f(\sqrt{2})=(-2)(-23)=46$이다.

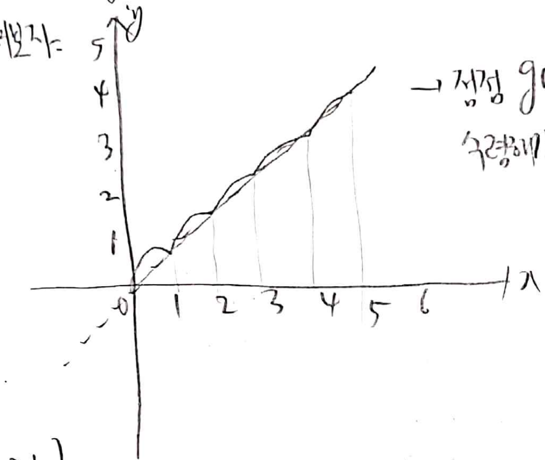
여담으로 C_3를 직접 찾아보려 계산하다보면 정말 멘탈이 나갈거다. 어마무시하게 더럽다. 이는 평가원에서도 C_3를 구하는 학생이 없겠지하고 냈다 보는게 맞는 듯하다.

9-25 18학년도 수능 나형 30번

다들 이게 호흡이 길어 힘들다고 하는데, 의외로 그와 반비례하여 각 과정을 거칠 때 써야 하는 발상의 난이도는 171130(나형)에 비해 훨씬 낮아 같은 실력일 시 이 문제가 더 풀 만할거다. 다만 이 문제에서 유일한 흠은 계산이 상당히 지저분해 보여 학생들이 지레 겁을 먹기 쉬운 구조라는 거다. 물론 문제 풀이 막바지에 더러운 수가 깔끔히 싹 사라지는 것을 보면 이게 괜히 수능문제인게 아니라는 생각이 들 정도로 좋은 문제임을 알 수 있을거다. 하나씩 차근차근 풀어보자.

(가)에서 먼저 $0\leq x<1$이라는 범위를 줬으니 해당 범위에서 생각해보면, $f(0)=0$, $f(1)=1$이고 $0\leq x<1$에서 $f(x)>x$이다.

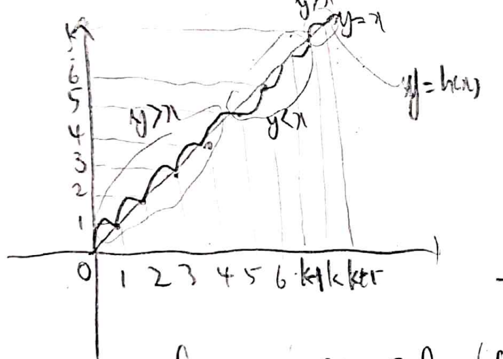
(나)를 보니, $0 \le x < 1$에서의 $g(x) - x^2$를 $n \le x < n+1$일 때 (n, n) 평행이동하고 $\frac{1}{2^n}$배한 후에 x를 더한다는 것을 알 수 있다. 여기서 $g(x)$가 $y=x$와 관련이 있다는 것이 명확해진다. 일단 알아낸 바를 통해 $g(x)$를 그려보자.



→ 점점 $g(x)$는 $y=x$에 수렴해가는 것처럼 보인다.

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x - g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$$

에서 $2x - g(x)$가 무슨 의미일지 생각해보자. $5 \le t < k$인 실수 t에서, $(t, g(t))$와 (t, t)를 생각해볼 때, (t, t)에 대해 $(t, g(t))$를 점대칭하면 $(t, 2t - g(t))$로 간다는 것을 알 수 있다. $g(t) \ge t$이므로 $2t - g(t) \le t$에서, $5 \le x < k$에서 $h(x)$는 $y=x$ 아래에 있는 함수라는 것을 알 수 있다. 이를 대략적으로 그려보면 다음과 같다. $n > k$이면,



$$a_n = \int_0^n h(x)\,dx = \int_0^5 \{h(x) - x\}\,dx + \int_5^k \{h(x) - x\}\,dx$$
$$+ \int_k^n \{h(x) - x\}\,dx + \frac{1}{2} \times n \times n \text{ 에서,}$$

$$a_n - \frac{1}{2}n^2 = \int_0^5 \{h(x) - x\}\,dx + \int_k^n \{h(x) - x\}\,dx$$
$$+ \int_5^k \{h(x) - x\}\,dx \text{ 에서,}$$

$$\lim_{n \to \infty} (2a_n - n^2) = 2\lim_{n \to \infty} \left(\int_0^5 \{h(x) - x\}\,dx + \int_k^n \{h(x) - x\}\,dx + \int_5^k \{h(x) - x\}\,dx \right)$$

이고, 여기서 '왜' $\frac{1}{2^n}$으로 주었는지 생각해야 한다. $k-1 \le x < k$에서 $y < x$인 넓이를 T라 하면 $k \le x < k+1$에서 $y > x$인 넓이는 $\frac{T}{2}$, $k+1 \le x < k+2$에서 $y > x$인 넓이는 $\frac{T}{2^2} = \frac{T}{4}$이므로 $\int_k^n \{h(x) - x\}\,dx + \int_{k-1}^k \{h(x) - x\}\,dx = T - \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} T\right)$에서, $\lim_{n \to \infty} \left(\int_k^n \{h(x) - x\}\,dx + \int_{k-1}^k \{h(x) - x\}\,dx \right) = 0$이다

$\therefore \lim_{n\to\infty}(2a_n - n^2) = 2\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^5 \{h(x)-x\}dx + \int_5^{k-1}\{h(x)-x\}dx\right\} = 2\left(\int_0^5\{h(x)-x\}dx + \int_5^{k-1}\{h(x)-x\}dx\right)$

($\because$ n과 관련된 적분값을 싹다 날려버려 극한값을 쉬우지 않아도 됨) 에서, $\int_0^5\{h(x)-x\}dx$

$= \frac{\left|1-\frac{1}{2}\right|(1-0)^3}{6} + \frac{\left|1-\frac{1}{2}\right|^2(2-1)^3}{6} + \frac{\left|1-\frac{1}{2}\right|^3(3-2)^3}{6} + \frac{\left|1-\frac{1}{2}\right|^4(4-3)^3}{6} + \frac{\left|1-\frac{1}{2}\right|^5(5-4)^3}{6} = \frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}+\frac{1}{192}$.

k의 값을 보니 가장 크게가 큰 값인 $5\le x<6$ 에서의 $-\int_5^6\{h(x)-x\}dx$의 값을 S라 하면, (단, $S>0$) $2\left(\int_0^5\{h(x)-x\}dx + \int_5^{k-1}\{h(x)-x\}dx\right) = 2\left\{\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}+\frac{1}{192}\right) - \left(S+\frac{1}{2}S+\frac{1}{4}S+\cdots\right)\right\}$

$= \frac{241}{768}$ 에서, $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96} - \left(2S+S+\frac{1}{2}S+\cdots\right) = \frac{31}{96} - S\left(2+1+\frac{1}{2}+\cdots\right) = \frac{241}{768}$

$S = \frac{\left|1-\frac{1}{2}\right|^6(6-5)^3}{6} = \frac{1}{384}$ 이므로 $\frac{7}{768} = \frac{1}{384}\left(2+1+\frac{1}{2}+\cdots\right)$ 에서 $\frac{7}{2} = 2+1+\frac{1}{2}$ 이므로 $k-1=8$

$[5,6)$ $[6,7)$ $[7,8)$

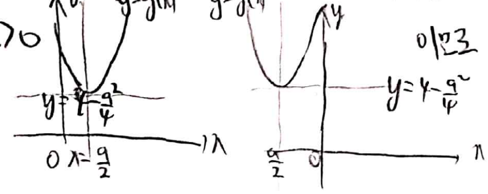
에서, $k=9$ 이다.

그렇게 막 어려운 문제는 아니고 발상도 앞서 말한 바와 같이 발상이 그렇게 힘들지는 않다. 위에 풀이도 엄밀하게 다 단계를 거쳐가느라 복잡하고 어려워보이지, 실제로 현장풀이 대로 적다 보면 10줄 안에 간단하게 정리된다. 얼어갈게 상당한 문제니 각 단계에서 다음 단계로 넘어갈 때 무엇을 봐야 했을지에 대해 유의하며 접근하자.

11-9 02학년도 수능 인문계 21번

$f(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ 이고, $f(g(x)) \ge 0$ 이므로 $g(x) \le -2$ 이거나 $g(x) \ge 3$ 이다. 그러나 $g(x)$가 최고차항계수가 1인 이차함수이므로 모든 실수 x에 대해 $g(x) \le -2$ 이 성립하지 않는다. $\therefore g(x) \ge 3$ 이므로 ① $g(x) = \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + 4 - \frac{a^2}{4} \ge 3$ 에서, $4-\frac{a^2}{4} \ge 3$ 이므로 $-2 \le a \le 2$ 이다.

② 그래프로 보면 i) $a>0$



이므로 $a>0$, $a<0$ 모두 $4-\frac{a^2}{4} \ge 3$

$\therefore -2 \le a \le 2$ 이다.

Chapter 10 문제

10−1. 08학년도 수능 27번

함수 $f(x)=x+\sin x$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(f\circ f)(x)$$

로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 개구간 $(0, \pi)$에서 위로 볼록하다.

ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(0, \pi)$에서 증가한다.

ㄷ. $g'(x)=1$인 실수 x가 개구간 $(0, \pi)$에 존재한다. ⇒ 평균값 정리

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

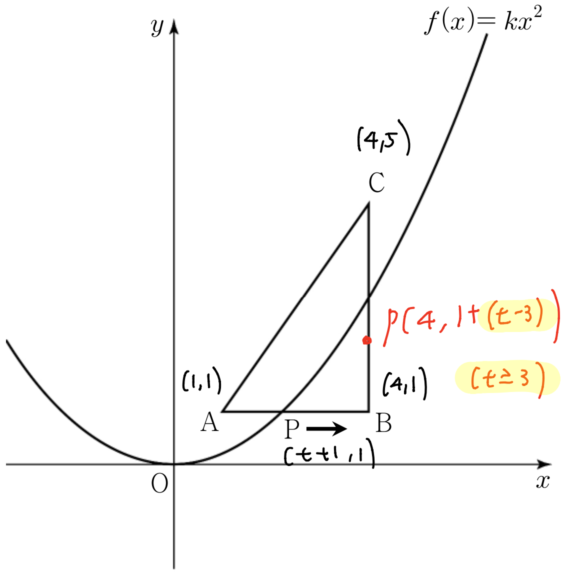
$f'(x)=1+\cos x$ $f''(x)=-\sin x$ 5

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$ $f'(x)\geq 0$

$g(0)=0$, $g(\pi)=\pi$ $1=\dfrac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=g'(c)$

10−2. 17년 4월 교육청 20번

그림과 같이 세 점 A(1, 1), B(4, 1), C(4, 5)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 점 P는 점 A를 출발하여 삼각형 ABC의 변을 따라 점 B를 지나 점 C까지 매초 1의 일정한 속력으로 움직이고 이차함수 $f(x)=kx^2$의 그래프가 점 P를 지난다. t초 후 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 P는 한 번 지나간 점은 다시 지나가지 않는다.) [4점]



$f(4) = t-2 = 16k$

$f(t+1) = 1 = k(t+1)^2$

$k(t+1) = \frac{1}{t+1}$

$f'(x) = 2kx$

$$g(t) = \begin{cases} 2k(t+1) = \frac{2}{t+1} & (0 \le t < 3) \\ 8k = \frac{t}{2} - 1 & (3 \le t < 7) \end{cases}$$

<보 기>

ㄱ. $0 \le t < 3$일 때 점 P의 좌표는 $(t+1,\ 1)$

ㄴ. $g(t) = \frac{2}{t+1}$ $(0 \le t < 3)$ $g(t) = \frac{t}{2} - 1$ $(3 \le t < 7)$

ㄷ. $\int_0^7 g(t)dt = 6 + 4\ln 2$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ...

$$\int_0^3 \frac{2}{t+1}\,dt + \int_3^7 \frac{t}{2} - 1\,dt$$

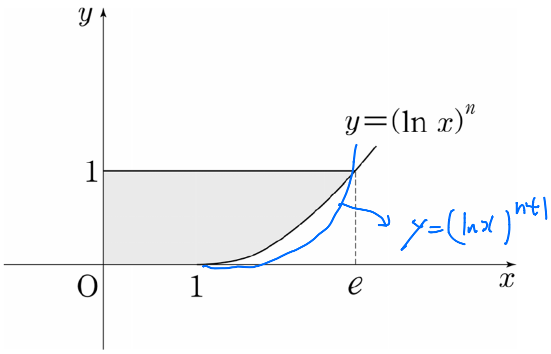
5

$$= \Big[2\ln(t+1)\Big]_0^3 + \Big[\frac{t^2}{4} - t\Big]_3^7$$

$$= 4\ln 2 + 10 - 4 = 6 + 4\ln 2$$

10−3. 12학년도 6월 평가원 18번

2이상의 자연수 n 에 대하여 곡선 $y=(\ln x)^n$ $(x \geq 1)$ 과 x 축, y 축 및 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n 이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $1 \leq x \leq e$ 일 때, $(\ln x)^n \geq (\ln x)^{n+1}$ 이다.

ㄴ. $S_n < S_{n+1}$

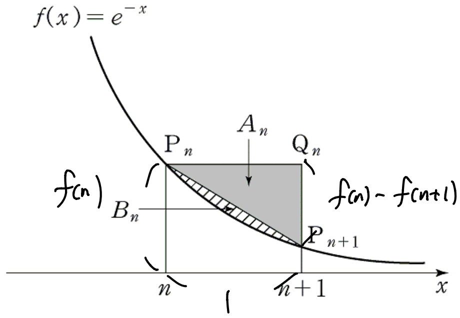
ㄷ. 함수 $f(x)=(\ln x)^n$ $(x \geq 1)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면 $S_n = \int_0^1 g(x)\,dx$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5

10−4. 06학년도 수능 28번

함수 $f(x)=e^{-x}$과 자연수 n에 대하여 점 P_n, Q_n을 각각 $\mathrm{P}_n(n, f(n))$, $\mathrm{Q}_n(n+1, f(n))$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이를 A_n, 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 B_n이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx = f(n) - (A_n + B_n)$

ㄴ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1}{2e}$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \frac{3-e}{2e(e-1)}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5

$$A_n = \frac{1}{2}\{f(n) - f(n+1)\} \qquad \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - f(n+1) = \frac{1}{2} f(1) = \frac{1}{2e}$$

$$e^{-n-1} - e^{-n}$$

$$B_n = f(n) - A_n - \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n - \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

$$= \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} - \frac{1}{2e} + \left[e^{-x}\right]_1^{\infty}$$

$$= \frac{1}{e-1} - \frac{3}{2e} = \frac{3-e}{2e(e-1)}$$

$g(2)=1$

$f(g(x))=x$

$g(f(x))=x$

10−5. 18년 4월 교육청 21번

$\frac{3}{5}<x<4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g'(2)=-\frac{4}{7}$ $g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{f(1)^2}{1-f(1)^3}=\frac{4}{-7}$

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ $g(1)=\frac{1}{3}g(1)^3-\frac{5}{3}$ $g(1)^3-3g(1)-5=0$

ㄷ. $2<g(1)<\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ 사잇값 정리 $g(1)=t$ $t^3-3t-5=0$ $2^3-3\times2-5<0$ $\left(\frac{5}{2}\right)^3-3\times\frac{5}{2}-5>0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f'(g(x))=\frac{1}{g'(x)}=\frac{1-\{g(x)\}^3x^3}{\{g(x)\}^3x^2}$

$\{g(x)\}^3x^2=g'(x)-\{g(x)\}^2g'(x)x^3$

$g'(x)=\{g(x)\}^3x^2+\{g(x)\}^2g'(x)x^3$

곱의 미분꼴! 안보이면 Chap 9 복습!

$g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3+C$, $g(2)=1$

$1=\frac{8}{3}+C$ $C=-\frac{5}{3}$

⑤

10−6. 12학년도 수능 18번

정의역이 $\{x\mid 0\le x\le\pi\}$인 함수 $f(x)=2x\cos x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

<보 기>

ㄱ. $f'(a)=0$이면 $\tan a=\frac{1}{a}$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지는 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right)$에 있다. 사잇값 정리

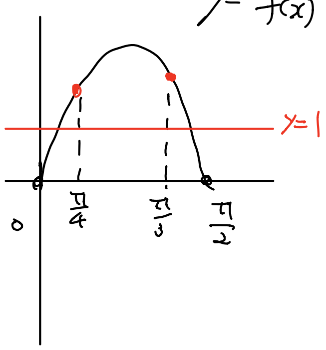
ㄷ. 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi>1$ $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}>1$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi=\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)>0$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{2}{3}\pi\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi<0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$f'(x)=2\cos x-2x\sin x$

$2\cos a-2a\sin a$ $\tan a=\frac{1}{a}$

⑤

치환적분꼴 $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

10−7. 19년 3월 교육청 21번

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x) = xe^{-x^2}$이다. 모든 실수 x에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

(가) $g(x) = \int_1^x f'(t)(x+1-t)dt$

(나) $f(x) = g'(x) - f'(x) = f(x) - f(1) \Rightarrow f(1) = 0, \quad f(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2e}$

<보 기>

ㄱ. $g'(1) = \frac{1}{e}$

ㄴ. $f(1) = g(1) = 0 \Rightarrow h(1) = 0$

~~ㄷ. 어떤 양수 x에 대하여 $g(x) < f(x)$이다.~~ $f(x) - g(x) = h(x)$

$0 < h(x)$

②

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$g(1) = 0$

$$g(x) = x\int_1^x f'(t) + \int_1^x f'(t)\,dt - \int_1^x t f'(t)\,dt$$

$$g'(x) = \int_1^x f'(t) + xf'(x) + f'(x) - xf'(x)$$

$$g'(x) = f(x) + f'(x) - f(1)$$

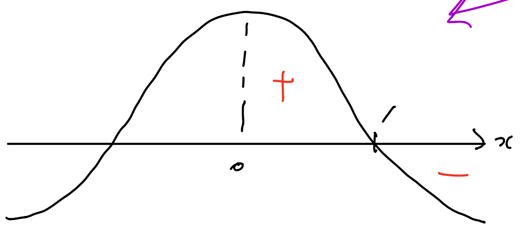
$$g'(1) = 2f(1) + f'(1) = -\frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

$f(1) = 0$

$$f'(x) - g'(x) = h'(x) = -f(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2e}$$

미분없이 개형 바로!

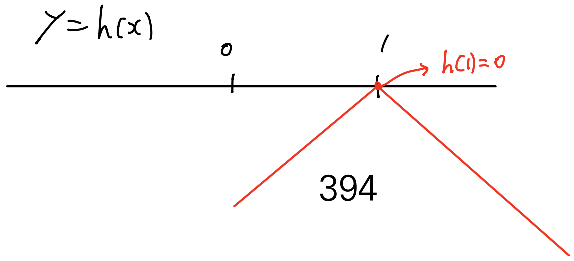
$y = -f(x) = h'(x)$



$x > 0$ 에서

$h(x) < 0$

$y = h(x)$



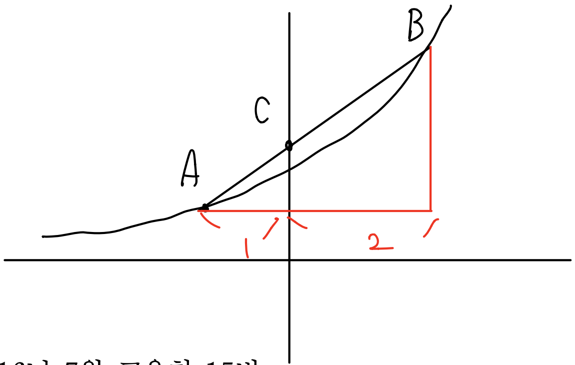
Chapter 11 문제

11−1. 15년 3월 교육청 A형 10번

지수함수 $y=3^x$의 그래프 위의 한 점 A의 y좌표가 $\frac{1}{3}$이다. 이 그래프 위의 한 점 B에 대하여 선분 AB를 1:2로 내분하는 점 C가 y축 위에 있을 때, 점 B의 y좌표는? [3점]

① 3 ② $3\sqrt[3]{3}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt[3]{9}$ ⑤ 9

⑤



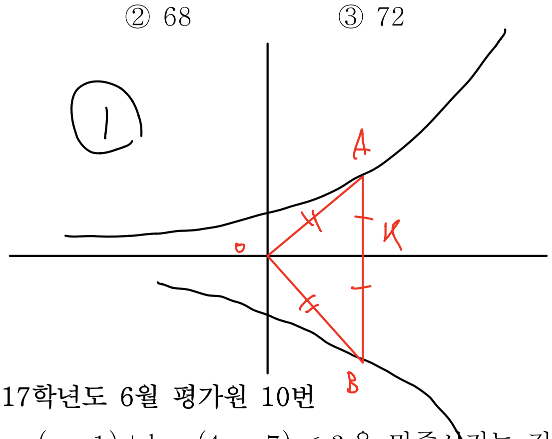
B(2, 9)

11−2. 16년 7월 교육청 15번

두 곡선 $y=2^x$, $y=-4^{x-2}$이 y축과 평행한 한 직선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{OA}=\overline{OB}$일 때, 삼각형 AOB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 8

①



$2^K = 2^{2K-4}$

$K=4$

$\frac{1}{2}\times 4\times 32=64$

11−3. 17학년도 6월 평가원 10번

부등식 $\log_3(x-1)+\log_3(4x-7)\le 3$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x>1$, $x>\frac{7}{4}$

1.75

$\frac{7}{4}<x\le 4$

③

$(x-1)(4x-7)\le 27$

2, 3, 4

$4x^2-11x-20\le 0$

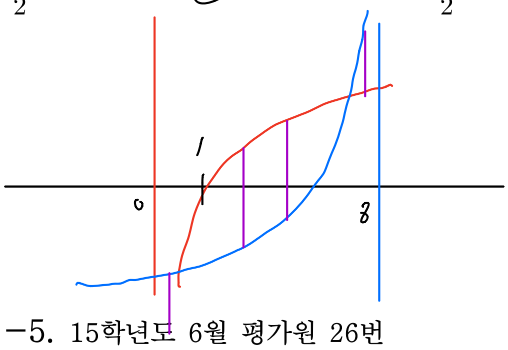
$(x-4)(4x+5)\le 0$ $-\frac{5}{4}\le x\le 4$

11−4. 19학년도 6월 평가원 14번

직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$) [4점]

2

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$



$\log_2 k + \log_2(8-k) = 2$

$\log_2(8-k) + \log_2 k = -2$

$4\times\frac{1}{4}=1$

$k(8-k)=4$

$k^2-8k+4=0$

$k(8-k)=\frac{1}{4}$

$k^2-8k+\frac{1}{4}=0$

11−5. 15학년도 6월 평가원 26번

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)\ln x^4 = 4f(x)\ln x \quad (x>0)$$

이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ -e)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e,\ -4e)$에서의 접선이 서로 수직일 때, $100f'(e)$의 값을 구하시오. [4점]

50

$f'(e)\times g'(e)=-1$

$g'(x)=4f'(x)\ln x+\frac{4f(x)}{x}$

$g'(e)=4f'(e)+\frac{4f(e)}{e}$

$=4f'(e)-4$

$4\{f'(e)\}^2-4f'(e)+1=0$

$f'(e)=\frac{1}{2}$

11−6. 10년 10월 교육청 나형 10번

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 다음 조건을 만족시킨다.

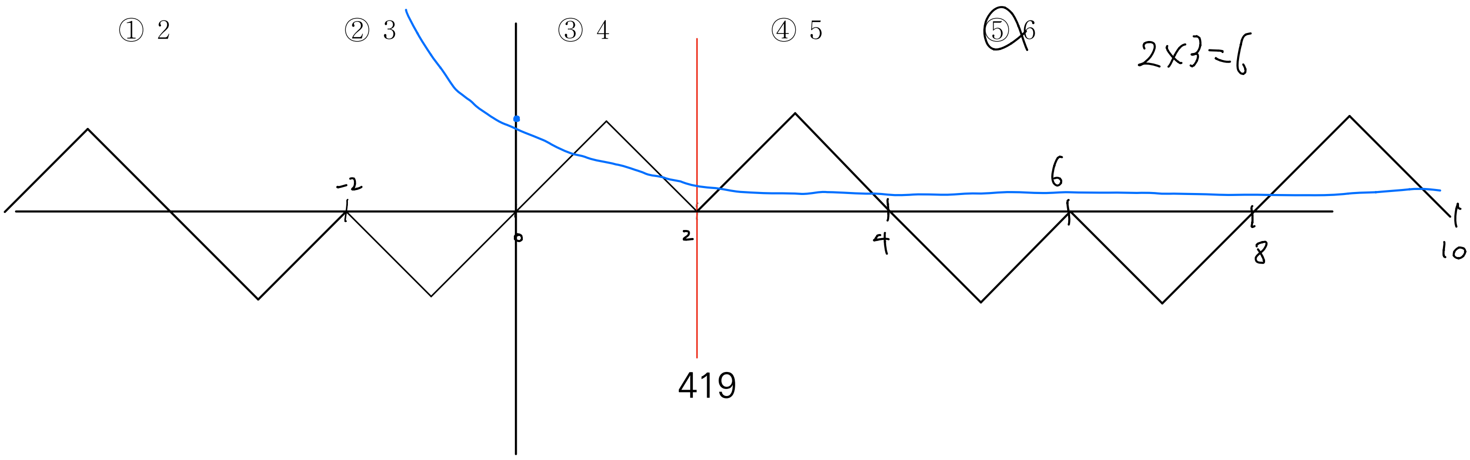
(가) $-2\leq x\leq 0$일 때, $f(x)=\lvert x+1\rvert-1$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$ ⇒ 기함수
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$ ⇒ $x=2$ 대칭

$-10\leq x\leq 10$에서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프의 교점의 개수는? [4점]

5

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

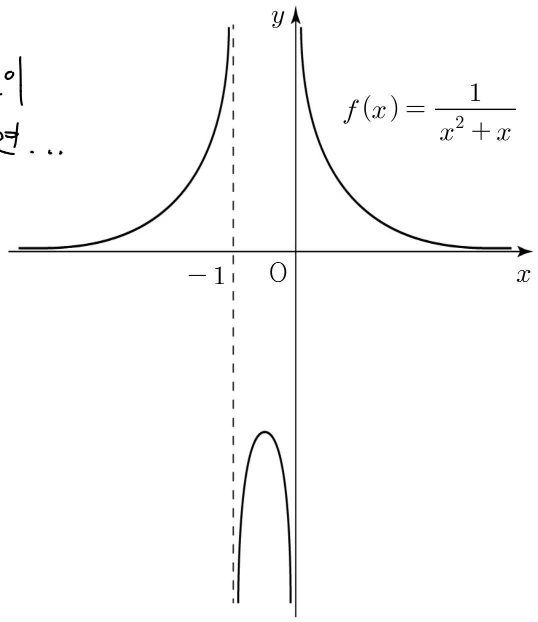
$2\times3=6$



11−7. 16년 7월 교육청 14번

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$의 그래프는 그림과 같다.

기출 파봤더라면
이정도는 미분 없이
개형 바로 그렸으면...



x

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$의 값은? [4점]

4

① $\ln\frac{9}{8}$ ② $\ln\frac{5}{4}$ ③ $\ln\frac{11}{8}$ ④ $\ln\frac{3}{2}$ ⑤ $\ln\frac{13}{8}$

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\,dx = \left[\ln\frac{x}{x+1}\right]_1^3 =$$

$$\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{2} = \ln\frac{3}{2}$$

11−8. 20학년도 6월 평가원 16번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)\cos x}{e^x} \qquad -f(\pi)=e^{\pi}g(\pi)$$

라 하자. $g'(\pi)=e^{\pi}g(\pi)$일 때, $\dfrac{f'(\pi)}{f(\pi)}$의 값은? (단, $f(\pi)\neq 0$) [4점]

4

① $e^{-2\pi}$ ② 1 ③ $e^{-\pi}+1$ ④ $e^{\pi}+1$ ⑤ $e^{2\pi}$

$$\frac{-(g'(\pi)+g(\pi))e^{\pi}}{f(\pi)} = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)}$$

$$g(x)e^{x} = f(x)\cos x$$

$$g'(x)e^{x}+g(x)e^{x} = f'(x)\cos x - f(x)\sin x$$

$$1+\frac{g'(\pi)}{g(\pi)} = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)}$$

$$(g'(\pi)+g(\pi))e^{\pi} = -f'(\pi)$$

11-9. 02학년도 수능 인문계 21번

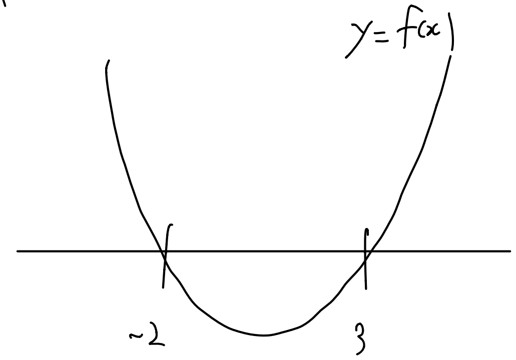
함수 $f(x)=x^2-x-6$, $g(x)=x^2-ax+4$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)\geq 0$이 되는 실수 a의 범위는? (단, $f\circ g$는 g와 f의 합성함수이다.) [3점]

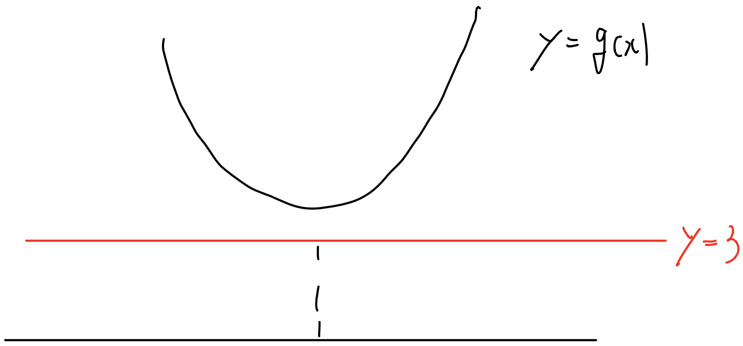
① $a\leq -1,\ a\geq 1$ ② $-1\leq a\leq 1$ ③ $a\leq -2,\ a\geq 2$

④ $-2\leq a\leq 2$ ⑤ $-4\leq a\leq 4$

$f(x)=(x-3)(x+2)$

4





$g\left(\frac{a}{2}\right)\geq 3$

$\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+4\geq 3$

$1\geq \frac{a^2}{4}$

$2\geq a\geq -2$

빠른 정답

Chapter 1

1	③	**2**	①	**3**	20	**4**	11	**5**	②
6	①	**7**	①	**8**	③	**9**	④	**10**	①
11	③	**12**	25	**13**	④	**14**	20	**15**	③
16	17	**17**	4	**18**	50	**19**	30	**20**	25
21	8	**22**	16	**23**	②	**24**	⑤	**25**	④
26	④	**27**	⑤	**28**	40	**29**	65		

Chapter 2

1	②	**2**	④	**3**	⑤	**4**	②	**5**	243
6	10	**7**	200	**8**	③	**9**	40	**10**	⑤

Chapter 3

1	④	**2**	④	**3**	⑤	**4**	③	**5**	③
6	③	**7**	④	**8**	11	**9**	③	**10**	34
11	71	**12**	6	**13**	12	**14**	④	**15**	128
16	21	**17**	50	**18**	②	**19**	32	**20**	5
21	19								

Chapter 4

1	③	**2**	①	**3**	③	**4**	②	**5**	②
6	77								

Chapter 5

1	24	**2**	②	**3**	350	**4**	65	**5**	20

Chapter 6

1	①	2	①	3	①	4	13	5	④
6	②	7	②	8	①	9	①		

Chapter 7

1	④	2	43	3	④				

Chapter 8

1	④	2	96	3	②	4	②	5	36
6	18								

Chapter 9

1	①	2	①	3	②	4	①	5	④
6	6	7	④	8	④	9	17	10	①
11	②	12	③	13	②	14	②	15	④
16	6	17	③	18	②	19	③	20	③
21	④	22	⑤	23	⑤	24	⑤	25	9

Chapter 10

1	⑤	2	⑤	3	⑤	4	⑤	5	⑤
6	⑤	7	②						

Chapter 11

1	⑤	2	①	3	③	4	②	5	50
6	⑤	7	④	8	④	9	④		