< 정답표 >

1.	④	**2.**	③	**3.**	③	**4.**	①	**5.**	⑤
6.	③	**7.**	⑤	**8.**	①	**9.**	①	**10.**	②
11.	②	**12.**	②	**13.**	③	**14.**	①	**15.**	④
16.	⑤	**17.**	③	**18.**	⑤	**19.**	②	**20.**	③
21.	③	**22.**	24	**23.**	12	**24.**	3	**25.**	120
26.	18	**27.**	9	**28.**	27	**29.**	40	**30.**	80

1 [출제의도] 벡터의 합을 계산한다.

$$\vec{a}+\vec{b}=(-1,\,2)+(2,\,-3)$$
$$=(-1+2,\,2+(-3))=(1,\,-1)$$

2 [출제의도] 좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리를 계산한다.

원점 O와 평면 $x+y+z+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0+0+0+3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}$$

3 [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 계산한다.

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

따라서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{3}{10}+\frac{2}{5}-0=\frac{7}{10}$$

4 [출제의도] 정적분의 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_0^1 xe^x\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$$
$$=(e-0)-\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=e-(e-1)=1$$

5 [출제의도] 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 계산한다.

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(\overline{X})=\dfrac{5}{6}$ 이고 $\mathrm{E}(X)=a+2b$ 이므로

$$a+2b=\frac{5}{6}$$

6 [출제의도] 구의 성질을 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.

점 C는 구 위의 한 점이므로 삼각형 ABC는

$\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}\times\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{30}$$
$$=3\sqrt{5}$$

7 [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 점과 직선 사이의 거리를 구한다.

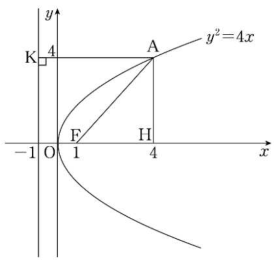
점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 D와 직선 BC 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{DH}}$의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{CD}}=1$이므로

$$\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\angle\mathrm{DCH})$$
$$=\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

따라서 구하는 거리는 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

8 [출제의도] 포물선의 정의를 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.



포물선 $y^2=4x$의 초점은 $\mathrm{F}(1,0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$

점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 K라고 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AK}}=\overline{\mathrm{AF}}=5$이므로 $\overline{\mathrm{FH}}=3$

직각삼각형 AFH에서

$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AF}}^2-\overline{\mathrm{FH}}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

따라서 삼각형 AFH의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FH}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$$

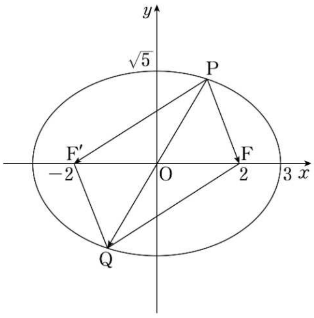
9 [출제의도] 정규분포를 이해하여 확률을 구한다.

1인당 수하물 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(15,4^2)$을 따른다. 이때, 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(15,1^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge17)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{17-15}{1}\right)=\mathrm{P}(Z\ge2)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)$$
$$=0.5-0.4772=0.0228$$

10 **[출제의도] 타원의 성질을 이용하여 벡터의 크기의 최댓값을 구하는 문제를 해결한다.**

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에서 장축의 길이는 6



$\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}=\overrightarrow{PQ}$라 할 때, 점 Q는 타원 위의 점이다.
따라서 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 타원의 장축의 길이와 같다.
따라서 $|\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}|$의 최댓값은 $2\times3=6$

11 **[출제의도] 조건부확률을 이해하여 산책로를 따라 이동할 확률을 구한다.**

사건 X가 일어날 확률 $P(X)$는

(i) ㉡을 지나는 경우

표에 의하여 확률은 $\frac{1}{3}$

(ii) ㉣을 지나는 경우

㉣을 지나기 위해서는 ㉠을 지나야 하므로

표에 의하여 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(iii) ㉤을 지나는 경우

(ii)와 같은 방법으로 $\frac{1}{6}$

(i), (ii), (iii)에 의해서

$P(X)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

두 사건 X, Y가 동시에 일어날 확률 $P(X\cap Y)$는

$P(X\cap Y)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 $P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{1}{2}$

12 **[출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이해하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.**

표본비율 $\hat{p}=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$이고 표본의 크기는 100이므로 출근 소요 시간이 60분 이상 120분 미만인 직원의 비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\frac{4}{5}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{100}}\le p\le\frac{4}{5}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{100}}$$

$$5000(b-a)=5000\times2\times1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{100}}$$

$$=5000\times2\times1.96\times\frac{4}{100}$$

$$=784$$

13 **[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.**

$f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}=0$에서 $x=\frac{1}{2}$이고 $x=\frac{1}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이다.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1}dt$$

$$=\Big[\ln|t^2-t+1|\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\ln\frac{3}{4}$$

14 **[출제의도] 함수와 그 함수의 역함수의 미분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.**

$f(g(x))=x$, $g(f(x))=x$이므로

$f'(g(x))g'(x)=1$, $g'(f(x))f'(x)=1$

따라서

$$\int_1^3\left\{\frac{f(x)}{f'(g(x))}+\frac{g(x)}{g'(f(x))}\right\}dx$$

$$=\int_1^3\{f(x)g'(x)+g(x)f'(x)\}dx$$

$$=\int_1^3\{f(x)g(x)\}'dx$$

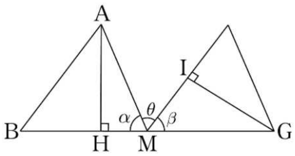
$$=\Big[f(x)g(x)\Big]_1^3$$

$$=f(3)g(3)-f(1)g(1)$$

$f(1)=3$에서 $g(3)=1$, $g(1)=3$에서 $f(3)=1$

따라서 $f(3)g(3)-f(1)g(1)=1\times1-3\times3=-8$

15 **[출제의도] 두 평면의 위치 관계를 이해하여 이면각의 크기를 구한다.**



평면 ACD와 평면 BCD가 이루는 예각을 α, 평면 EDCF와 평면 GDC가 이루는 예각을 β라 하자.
모서리 CD의 중점을 M, 점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 H, 점 G에서 사각형 EDCF에 내린 수선의 발을 I라 하면,

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{HM}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$

$\overline{\mathrm{MG}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{MI}}=1$이므로 $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $\cos\theta=\cos(\pi-\alpha-\beta)=-\cos(\alpha+\beta)$

$$=-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=-\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

16 **[출제의도] 지수방정식을 이용하여 그래프의 성질을 추론한다.**

점 $(2a-p,\ a-q)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$f(p)=q$, $f(2a-p)=a-q$에서

$$\frac{3^{2a-p}}{3^{2a-p}+3}=a-q=a-\boxed{\frac{3^p}{3^p+3}} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이다. ㉠은 실수 p의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$p=0$일 때, $\dfrac{3^{2a}}{3^{2a}+3}=a-\dfrac{1}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉡

이고,

$p=1$일 때, $\dfrac{3^{2a}}{3^{2a}+\boxed{9}}=a-\dfrac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉢

이다. ㉡, ㉢에서 ㉡−㉢을 정리하면

$\dfrac{6\times3^{2a}}{(3^{2a}+3)(3^{2a}+9)}=\dfrac{1}{4}$에서

$(3^{2a}+3)(3^{2a}+9)=24\times3^{2a}$

이므로 $3^{2a}=X\,(X>0)$이라 하면

$(X+3)(X+9)=24X$

$X^2-12X+27=0$

$X=3$ 또는 $X=9$

$3^{2a}=3$ 또는 $3^{2a}=9$

$a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=\boxed{1}$

이다. 이때, ㉢에서 좌변이 양수이므로 $a>\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $a=1$이다.

그러므로 $g(p)=\dfrac{3^p}{3^p+3}$, $m=9$, $n=1$

따라서 $(m-n)\times g(2)=(9-1)\times\dfrac{3^2}{3^2+3}=6$

17 **[출제의도] 조합을 이해하여 확률을 구한다.**

오각기둥의 10개의 꼭짓점 중 임의로 3개를 택하여 삼각형을 만드는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\times9\times8}{3!}=120$이다.

i) 면 ABCDE에서 1개, 면 FGHIJ에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우
면 ABCDE에서 1개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 5이고, 그 각각의 경우에 대하여 면 FGHIJ에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 3이므로 곱의 법칙에 의하여
$5\times3=15$

ii) 면 FGHIJ에서 1개, 면 ABCDE에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우
면 FGHIJ에서 1개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 5이고, 그 각각의 경우에 대하여 면 ABCDE에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 3이므로 곱의 법칙에 의하여
$5\times3=15$

i), ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $15+15=30$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{30}{120}=\dfrac{1}{4}$이다.

18 **[출제의도] 공간벡터의 내적을 이용하여 극한값을 구하는 문제를 해결한다.**

$\angle\mathrm{OHC}=\theta$라 하고 점 O에서 밑면 ABC에 내린 수선의 발을 G라 하면 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{HG}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{OH}}$ 따라서 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}_k}\right)$$

$$=n|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2+\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HP}_k}=n|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2-\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{HO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HP}_k}$$

$$=n|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2-\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{HO}}||\overrightarrow{\mathrm{HP}_k}|\cos\theta$$

$$=27n-\sum_{k=1}^{n}\frac{(3\sqrt{3})^2k}{3n}=27n-\frac{9}{n}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=27n-\frac{9(n+1)}{2}=\frac{45}{2}n-\frac{9}{2}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{45}{2}-\frac{9}{2n}\right)=\frac{45}{2}$

19 **[출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 증명한다.**

$a=2^{x_1}\times3^{y_1},\ b=2^{x_2}\times3^{y_2},\ c=2^{x_3}\times3^{y_3},\ d=2^{x_4}\times3^{y_4}$

이라 하면

$x_1+x_2+x_3+x_4=n,\ y_1+y_2+y_3+y_4=n$

(단, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$에 대하여 $x_i,\ y_i$는 음이 아닌 정수)

이다. 이때 $a+b+c+d$가 짝수이므로 $a,\ b,\ c,\ d$가 모두 짝수이거나 $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 2개만 짝수이다.

(i) $a,\ b,\ c,\ d$가 모두 짝수인 경우
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$가 모두 자연수이고 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$는 음이 아닌 정수이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
${}_4\mathrm{H}_{\boxed{n-4}}\times{}_4\mathrm{H}_n$ …… ㉠

(ii) $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 2개만 짝수인 경우
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ 중에서 자연수가 2개이고 0이 2개이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는
${}_4\mathrm{C}_2\times\boxed{{}_2\mathrm{H}_{n-2}}$
이다. 이때 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 홀수인 두 수는 1이 될 수 없으므로 순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
${}_4\mathrm{H}_{\boxed{n-2}}$
이다. 따라서 순서쌍
$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
${}_4\mathrm{C}_2\times\boxed{{}_2\mathrm{H}_{n-2}}\times{}_4\mathrm{H}_{\boxed{n-2}}$ …… ㉡

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 ㉠+㉡이다.

따라서 $f(n)=n-4,\ g(n)={}_2\mathrm{H}_{n-2},\ h(n)=n-2$

$f(6)=6-4=2,\ g(7)={}_2\mathrm{H}_5={}_6\mathrm{C}_1=6,\ h(8)=8-2=6$

이므로 $f(6)+g(7)+h(8)=2+6+6=14$이다.

20 **[출제의도] 함수의 그래프의 개형을 추측하여 문제를 해결한다.**

점 P의 좌표를 (x, y)라 할 때

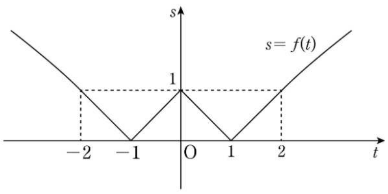
$$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x-t)^2+y^2=(x-t)^2+x^2-1$$
$$=2x^2-2tx+t^2-1=2\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{t^2}{2}-1$$

$x^2=y^2+1\geq 1$이므로 $|x|\geq 1$

$|x|\geq 1$이므로 $\frac{t}{2}$의 값에 따라 $\overline{\mathrm{AP}}^2$의 최솟값이 달라진다. 즉, 각 경우에 따라 $f(t)$의 값을 구하면

$$f(t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{t^2}{2}-1} & (|t|\geq 2)\\ |t+1| & (-2<t\leq 0)\\ |t-1| & (0<t<2)\end{cases}$$

그러므로 $s=f(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. $f(t)$에서 $t=0$을 대입하면 $f(0)=1$ (참)

ㄴ. 직선 $s=\frac{1}{3}$과 곡선 $s=f(t)$의 교점의 개수는 4이다. (참)

ㄷ.

$$\lim_{t\to -2-}\frac{f(t)-f(-2)}{t-(-2)}=\lim_{t\to -2-}\frac{\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}-1}{t+2}$$
$$=\lim_{t\to -2-}\frac{t^2-4}{(t+2)\sqrt{2}\left(\sqrt{t^2-2}+\sqrt{2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to -2-}\frac{t-2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{t^2-2}+\sqrt{2}\right)}=-1$$
$$\lim_{t\to -2+}\frac{f(t)-f(-2)}{t-(-2)}=\lim_{t\to -2+}\frac{|t+1|-1}{t+2}$$
$$=\lim_{t\to -2+}\frac{-(t+1)-1}{(t+2)}=-1$$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=-2$에서 미분가능하다.

같은 방법을 이용하면 함수 $f(t)$는 $t=2$에서도 미분가능하다는 사실을 알 수 있다.

그러므로 함수 $f(t)$가 미분가능하지 않은 t의 값은 $-1,\ 0,\ 1$이므로 그 개수는 3이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21 **[출제의도] 미분의 성질을 이용하여 그래프의 개형을 추론한다.**

ㄱ. $g(-x)=\frac{\sin f(-x)}{-x}=\frac{\sin f(x)}{-x}=-g(x)$

이므로 모든 양의 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 미분가능하므로

조건 (다)에서 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이고,

조건 (가)에서 $f'(x)=-f'(-x)$이므로

$f'(0)=0$이다.

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin f(x)}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}\right)$$
$$=1\times f'(0)=0\ \text{(참)}$$

ㄷ. $g(\alpha)=\frac{\sin f(\alpha)}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}>0$이고,

$\lim_{x\to 0}g(x)=0$이므로 $0<x<\alpha$에서

함수 $g(x)$가 증가하는 구간이 있다.

$g'(x)=\frac{xf'(x)\cos f(x)-\sin f(x)}{x^2}$에서

$g'(\alpha)=\frac{\alpha f'(\alpha)\cos f(\alpha)-\sin f(\alpha)}{\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha^2}<0$

그러므로 함수 $g(x)$는 구간 $(0, \alpha)$에서 $\frac{1}{\alpha}$보다 큰 극댓값을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x)=\frac{1}{\alpha}$은 $0<x\leq\alpha$에서 적어도 2개의 서로 다른 실근을 갖는다.

$g(-x)=-g(x)$이므로 방정식 $g(x)=-\frac{1}{\alpha}$은 구간 $-\alpha\leq x<0$에서 적어도 2개의 서로 다른 실근을 가지므로 방정식 $|g(x)|=\frac{1}{\alpha}$은 적어도 4개의 서로 다른 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22 **[출제의도] 순열의 수를 계산한다.**

4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_4=4!=24$

23 **[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.**

$f'(x)=4e^{3x-3}\times 3=12e^{3x-3}$이므로 $f'(1)=12$

24 **[출제의도] 역함수의 미분법을 이해하여 미분계수를 구한다.**

함수 $f(x)=e^{x-1}$에서 $e^{x-1}=1$일 때 $x=1$

즉, $g(1)=1$이다.

따라서 $f'(x)=e^{x-1}$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-2h)}{h}$$

$$=3g'(1)=\frac{3}{f'(1)}=\frac{3}{e^{1-1}}=3$$

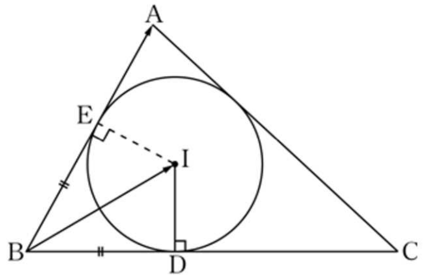
25 **[출제의도] 벡터의 성질을 이해하여 내적을 구한다.**

점 I에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하면

$\overline{BE}=\overline{BD}=8$이므로

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BI}|\cos(\angle EBI)$$

$$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BE}|=15\times8=120$$



26 **[출제의도] 경우의 수를 이용하여 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.**

조건 (나)에서 $f(2n)<f(n)<f(3n)$이므로

$n=1$일 때, $f(2)<f(1)<f(3)$

$n=2$일 때, $f(4)<f(2)<f(6)$

$f(4)<f(2)<f(1)<f(3)$ 이고 $f(2)<f(6)$이므로

6개의 숫자 중 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(6)$에 대응될 5개를 선택하면 $f(5)$에 대응될 나머지 한 수와 5개의 수 중 $f(4)$, $f(2)$에 대응될 수가 정해진다.

$f(4)$, $f(2)$에 대응될 두 수를 제외한 나머지 세 수 중 $f(6)$에 대응될 수를 선택하면 $f(1)$과 $f(3)$에 대응되는 수도 정해진다.

구하는 경우의 수는 6개의 숫자 중 5개를 선택하는 경우의 수 ${}_6C_5$와 $f(4)$, $f(2)$에 대응될 두 수를 제외한 나머지 세 수 중 $f(6)$에 대응되는 수를 선택하는 경우의 수 3의 곱과 같다.

따라서 ${}_6C_5\times3=18$

27 **[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.**

삼각형 BPQ와 삼각형 BCQ는 서로 합동이므로

$\angle QBC=\frac{\theta}{2}$이고 $\overline{PQ}=\overline{QC}=3\tan\frac{\theta}{2}$

직각삼각형 RPQ에서 $\angle RQP=\theta$이므로

$\overline{PR}=\overline{PQ}\tan\theta=3\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PR}$$

$$=\frac{1}{2}\times3\tan\frac{\theta}{2}\times3\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta=\frac{9}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta$$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{8f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{36\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^3}=9$

28 **[출제의도] 벡터의 내적을 이용하여 문제를 해결한다.**

원 C_2의 중심을 O_2라 하면,

$$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PO_2}+\overrightarrow{O_2Q})$$

$$=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO_2}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$$

점 P가 원점에, 선분 AB가 y축 위에 오도록 정사각형 ABCD와 두 원 C_1, C_2를 좌표평면 위에 놓으면 두 점 O_2, C의 좌표는 각각 $(3,\ 2)$, $(4,\ -1)$이다.

그러므로 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO_2}=(4,\ -1)\cdot(3,\ 2)=12-2=10$

$\overrightarrow{PC}$와 $\overrightarrow{O_2Q}$가 이루는 각을 θ라 하면

$$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}=|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{O_2Q}|\cos\theta$$

$=\sqrt{17}\times1\times\cos\theta\le\sqrt{17}$에서

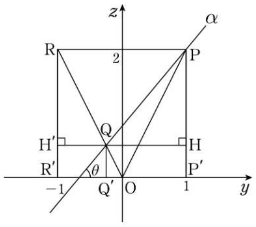
$\theta=0$일 때, $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값은 $\sqrt{17}$

그러므로 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은 $10+\sqrt{17}$

따라서 $a+b=10+17=27$

29 **[출제의도] 평면과 원뿔이 만나서 이루는 도형을 추측하여 좌표를 구한다.**

원뿔을 yz평면으로 자른 단면은 yz평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(0,\ 1,\ 2)$, $\mathrm{R}(0,\ -1,\ 2)$와 원점 O를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 OPR이다.



선분 OR와 평면 α의 교점을 Q라 하자.

두 점 P, Q를 xy평면에 내린 정사영을 각각 P', Q'이라 할 때 도형 S의 xy평면 위로의 정사영의 장축의 길이는 선분 $\mathrm{P'Q'}$의 길이와 같다. 즉, $\overline{\mathrm{P'Q'}}=\frac{5}{4}$

점 Q에서 선분 $\mathrm{PP'}$, $\mathrm{RR'}$에 내린 수선의 발을 각각 H, $\mathrm{H'}$이라 하고 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overline{\mathrm{RH'}}=\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{QH}}\tan\theta=\overline{\mathrm{Q'P'}}\tan\theta=\frac{5}{4}\tan\theta$

$\overline{\mathrm{QH'}}=\overline{\mathrm{P'R'}}-\overline{\mathrm{P'Q'}}=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$

삼각형 $\mathrm{RR'O}$와 삼각형 $\mathrm{RH'Q}$는 닮음이므로

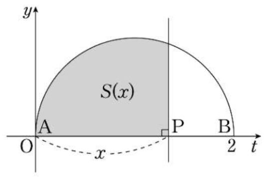
$\frac{\overline{\mathrm{RR'}}}{\overline{\mathrm{OR'}}}=\frac{\overline{\mathrm{RH'}}}{\overline{\mathrm{QH'}}}$에서

$\frac{\overline{\mathrm{RR'}}}{\overline{\mathrm{OR'}}}=2$이고 $\frac{\overline{\mathrm{RH'}}}{\overline{\mathrm{QH'}}}=\frac{\frac{5}{4}\tan\theta}{\frac{3}{4}}=\frac{5\tan\theta}{3}$이므로 $\tan\theta=\frac{6}{5}$

평면 α가 z축과 만나서 생기는 좌표가 $(0,\ 0,\ k)$이므로 $\tan\theta=\frac{2-k}{1}=\frac{6}{5}$

따라서 $k=\frac{4}{5}$이므로 $50k=40$

30 **[출제의도] 함수를 구하여 정적분과 관련된 문제를 해결한다.**



$S(x)=\int_0^x \sqrt{1-(t-1)^2}\,dt$이므로 $S'(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$

$f(\theta)=S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)$라 하면

$f'(\theta)=S'(1+\sin\theta)\cos\theta+S'(1+\cos\theta)\sin\theta$

$\quad=\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta+\sqrt{1-\cos^2\theta}\cos\theta$

$\quad=|\cos\theta|\cos\theta+|\sin\theta|\sin\theta$

(i) $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$일 때,

$f'(\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로 $f(\theta)=\theta+C_1$ (C_1은 적분상수)

$f(0)=S(1)-S(2)=-\frac{\pi}{4}$이므로 $C_1=-\frac{\pi}{4}$

따라서 $f(\theta)=\theta-\frac{\pi}{4}$

(ii) $\frac{\pi}{2}\le\theta<\pi$일 때,

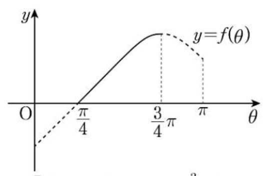
$f'(\theta)=-\cos^2\theta+\sin^2\theta=-\cos2\theta$이므로

$f(\theta)=-\frac{1}{2}\sin2\theta+C_2$ (C_2는 적분상수)

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=S(2)-S(1)=\frac{\pi}{4}$이므로 $C_2=\frac{\pi}{4}$

따라서 $f(\theta)=-\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{\pi}{4}$

(i), (ii)에 의해 $y=f(\theta)$의 구간 $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right]$에서의 그래프는 그림의 실선 부분이다.



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f(\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(-\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{2}\theta^2-\frac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{4}\cos2\theta+\frac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{32}\pi^2$$

따라서 $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{3}{32}$이므로 $\frac{30p}{q}=80$