

2020학년도 수시모집 논술전형

논술고사 문제지 (자연계열)

[논술고사 시간 : 2시간]

복기/해설 작성자	김 기 대
-----------	-------

【 수험생 유의사항 】

1. 본 문항은 공식자료가 아닌 복기자료입니다. 레츠 시립!
2. 난이도 : 올해 모의논술보단 쉽고, 예년과 비슷함
3. 예상 합격컷 : 400점 만점 기준 300점 이상 (과별로 상이합니다.)

김기대 T 수능 후 논술 예정

1. 한양대 Final + (예정: 경북대 Final)

수업일자 : 11/16 (토) ~ 시험 전날 (예정, 10월 말 오르비 공지)

대상학생 : 논술 노베이스도 들을 수 있는 기출기반+출제예상소재 위주 수업. (단, 의대지원자 수강 X)

2. 인하대 Final + (예정: 아주대 Final)

수업일자 : 11/23 (토) ~ 시험 전날 (예정, 10월 말 확정)

대상학생 : 논술 노베이스도 들을 수 있는 기출기반+출제예상소재 위주 수업. (단, 의대지원자 수강 X)

장소 : 한티역, 강남역 중 어딘가



서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL



서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

made by 김기대

[문제 1] (총 100점)

자연수 n 에 대하여 $x+y+z=n+2$ 인 순서쌍 (x, y, z) 의 전체 집합은

$$\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m)\}$$

이다. 이 때 $\sum_{k=1}^m (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)$ 을 n 에 대하여 인수분해된 식으로 나타내어라.

[문제 1] 현장답안

$x_p = q$ (단, p 와 q 는 자연수) 이면 $y_p + z_p = n - q + 2$ 를 만족시켜야 하므로 $x_p = q$ 인 순서쌍 (x_p, y_p, z_p) 의 개수는 ${}_2H_{n-q} = n - q + 1$ 임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \sum_{k=1}^m (x_k^2) &= \sum_{q=1}^n q^2 (n - q + 1) = (n+1) \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} \end{aligned}$$

이다. 같은 논리로 $\sum_{k=1}^m (y_k^2) = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} = \sum_{k=1}^m (z_k^2)$ 이므로 $\sum_{k=1}^m (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{4}$ 이다.

[문제 1] 답안 point, 접근법

풀이시간보다도 답안을 어떻게 쓸지 고민(ex. 첨자를 어떻게 두고, 이 상황을 어떻게 설명할지) 하는 시간이 더 오래걸렸을 수 있는 문제이다.

또한 이 문제와 같이 n 이 미지수인 확통문제는

$n=1, 2, 3$ 을 최종 결과식에 넣어보면서 실제 노가다로 구한 값과 같은지 확인해보고 최종답안작성을 하는 것을 추천한다.

[문제 2] (100점)

초점이 F인 포물선 $y = \frac{1}{4}x^2$ 위의 제 1사분면 임의의 점을 P라 하고 $\theta = \angle OFP$ 라 하자.

두 선분 FO, FP와 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $S'(\frac{\pi}{3})$ 의 값을 구하여라.

[문제 2] 논술답안

$S'(\frac{\pi}{3})$ 을 구하고 있으므로, 일반성을 잃지 않고 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 라 하자.

점 P의 좌표를 $(a, \frac{1}{4}a^2)$ (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $0 < a < 2$)라 두고 이 점에서 x축과 y축에 내린 점을 각각 H_1, H_2 라 하자.

그러면 직각삼각형 FPH_2 에서 $\tan\theta = \frac{a}{1 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{4a}{4 - a^2} \dots \textcircled{1}$ 임을 알 수 있다.

① 식에 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 을 대입하면 $\sqrt{3} = \frac{4a}{4 - a^2} \Leftrightarrow \sqrt{3}a^2 + 4a - 4\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}a - 2)(a + 2\sqrt{3}) = 0$ 이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때 $a = \frac{2}{\sqrt{3}} \dots \textcircled{2}$ 이다. ($\because 0 < a < 2$)

또한 ① 식의 양변을 미분하면 $\sec^2\theta \frac{d\theta}{da} = \frac{4(4 - a^2) - 4a(-2a)}{(4 - a^2)^2} = \frac{16 + 4a^2}{(4 - a^2)^2}$ 이므로 이 식에 $\theta = \frac{\pi}{3}$, $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 를 대입하면 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때 $\frac{d\theta}{da} \Big|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4} \dots \textcircled{3}$ 이다.

한편, $S(\theta)$ 는 사다리꼴 OH_1PH_2 의 넓이에서 $\int_0^a \frac{1}{4}x^2 dx \left(= \frac{1}{12}a^3 \right)$ 만큼을 뺀 것으로 구할 수 있고,

사다리꼴 OH_1PH_2 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times a \times \left(1 + \frac{1}{4}a^2 \right) = \frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{2}a$ 이므로 $S(\theta) = \frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{12}a^3 = \frac{1}{24}a^3 + \frac{1}{2}a$

이다. 이 식을 양변 미분하면 $S'(\theta) \times \frac{d\theta}{da} = \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{2}$ 이고, 이 식에 $\theta = \frac{\pi}{3}$, $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{d\theta}{da} \Big|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}$

($\because \textcircled{2}, \textcircled{3}$)을 대입하면 $S'(\frac{\pi}{3}) = \frac{8}{9}$ 임을 알 수 있다.

[문제 2] 답안 point

다양한 풀이가 있다. 정답이 $\frac{8}{9}$ 로 나왔다면 대부분 점수를 가져갈만한 문제.

여러분이 여기서 봐야할 것은 풀이의 짜임새이다. $S(\theta)$ 를 먼저 구하는 것이 아니고, $S(\theta)$ 를 구하기 위해 필요한 값들을 정립해둔 후 구하려는 값을 추후에 정리한 풀이인데, $S(\theta)$ 를 구해보고, $S'(\frac{\pi}{3})$ 를 구하기 위해 필요한 값을 추후에 구해가는 실제풀이와는 차이가 있다.

즉, 논술은 본인이 푼 풀이를 채점자에게 이쁘게, 어떻게 전달할까 고민해야하는 과정이 필요하기 때문에 어려운 시험인 것이다. (물론 문제도 어렵지만)

[문제 3] (100점)

자연수 n 에 대하여 구간 $[0, \pi]$ 에 그려진 곡선 $y = e^{-x} \sin(nx)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n 이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값을 구하시오.

<답안 Tip>

곡선 $y = e^{-x} \sin(nx)$ 를 그려주는 과정은 ‘가법계’만 언급해주시기.

본 문제에서 필요한 지식은 이 곡선이 x 축보다 위쪽에 있냐 아래쪽에 있냐에 따라 ‘적분값과 넓이의 관계’가 결정되므로 결국 함수값의 부호 정도만 중요한 문제이므로, 굳이 증감표를 그릴 필요 없다.

[문제 3] 논술답안 (곡선의 모양을 대략 그린 후)

$$\begin{aligned} \text{부분적분법에 의하여 } \int e^{-x} \sin(nx) dx &= -\frac{1}{n} e^{-x} \cos(nx) - \frac{1}{n} \int e^{-x} \cos(nx) dx && \text{이므로} \\ &= -\frac{1}{n} e^{-x} \cos(nx) - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} e^{-x} \sin(nx) + \frac{1}{n} \int e^{-x} \sin(nx) dx \right) \end{aligned}$$

$$\int e^{-x} \sin(nx) dx = \frac{-e^{-x}}{n^2 + 1} (\sin(nx) + n \cos(nx)) \text{이고, 이 함수를 } F(x) \text{라 하겠다. (적분상수는 0으로 두었다.)}$$

자연수 m 에 대하여 구간 $\left[\frac{2m-2}{n} \pi, \frac{2m-1}{n} \pi \right]$ 에서 $e^{-x} \sin(nx) \geq 0$ 이므로 이 구간에서 곡선

$$y = e^{-x} \sin(nx) \text{와 } x \text{축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 } [F(x)]_{\frac{2m-2}{n} \pi}^{\frac{2m-1}{n} \pi} = \frac{n}{n^2 + 1} \left(e^{-\frac{2m-1}{n} \pi} + e^{-\frac{2m-2}{n} \pi} \right) \text{이다.}$$

마찬가지로 구간 $\left[\frac{2m-1}{n} \pi, \frac{2m}{n} \pi \right]$ 에서 $e^{-x} \sin(nx) \leq 0$ 이므로 이 구간에서 곡선 $y = e^{-x} \sin(nx)$ 와 x 축으로

$$\text{둘러싸인 부분의 넓이는 } [-F(x)]_{\frac{2m-1}{n} \pi}^{\frac{2m}{n} \pi} = \frac{n}{n^2 + 1} \left(e^{-\frac{2m}{n} \pi} + e^{-\frac{2m-1}{n} \pi} \right) \text{이다.}$$

즉, S_n 은 첫 번째 항이 $\frac{n}{n^2 + 1} \left(e^{-\frac{1}{n} \pi} + 1 \right)$ 이고 공비가 $e^{-\frac{1}{n} \pi}$ 인 등비수열의 부분합임을 알 수 있다.

$$\text{따라서 } S_n = \frac{\frac{n}{n^2 + 1} \left(e^{-\frac{1}{n} \pi} + 1 \right) \left(1 - \left(e^{-\frac{1}{n} \pi} \right)^n \right)}{1 - \left(e^{-\frac{1}{n} \pi} \right)} = \frac{n^2}{\pi(n^2 + 1)} \times \frac{\frac{1}{n} \pi}{e^{\frac{1}{n} \pi} - 1} \times \left(e^{\frac{1}{n} \pi} + 1 \right) \times (1 - e^{-\pi}) \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{\pi} (1 - e^{-\pi}) \text{이다. } (\because n \rightarrow \infty \text{일 때 } \frac{n^2}{n^2 + 1} \rightarrow 1, \frac{\frac{1}{n} \pi}{e^{\frac{1}{n} \pi} - 1} \rightarrow 1, e^{\frac{1}{n} \pi} \rightarrow 1 \text{ 이므로})$$

[문제 3] 답안 point

문제 3, 4번이 모두 ‘논술세계’에선 자주 등장한 문제였는데, 1년 동안 각잡고 논술을 준비한 학생들이었다면 이번 시험이 매우 반가운 시험이었을지 모르겠다.

다만 많이 풀어봤다고 해도 실수할만한 포인트는 존재했다.

마지막 $n \rightarrow \infty$ 과정에서 등비수열의 합공식을 $n \rightarrow \infty$ 니까 $\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ 이 아닌 $\frac{a_1}{1-r}$ 을 쓴 학생들이 꽤 있을텐데, 이런 경우 정답이 다르게 나온다. 이런 실수를 하지 않도록 주의하자.

문제 4번은 복기만 하고 이번년도 해설을 마무리짓도록 하겠다.

너무나도 수고했고, 수능 후 논술 (한양대 인하대 Final 확정, 경북대 아주대 Final 예정)에서 보자!

[문제 4] (100점)

(a) 한 변의 길이가 2인 정오각형의 한 대각선의 길이를 구하시오.

정답 : $\sqrt{5}+1$

간단접근 : 삼각형 내부에서 여러 이등변삼각형들과 닮음을 사용하면 되는 문제.

(b) 대각선 AC, AD로 두 삼각형 ABC, AED를 접어서 두 선분 AB, AE를 겹치도록 할 때, 두 점 B, E가 겹친 점을 P라 하자. 두 평면 PAC와 PAD의 이면각을 θ 라 할 때, $\cos\theta = a+b\sqrt{5}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.)

정답 : $a=0, b=\frac{1}{5}$

간단접근 : 두 점 C, D 에서 두 평면의 교선인 PA의 연장선에 수선의 발을 내리면 겹침을 활용한 후 두배 각 공식과 (a)에서 구한 $\cos 72^\circ$ 를 활용하여 정답내기.