

성명		수험 번호						—			
----	--	-------	--	--	--	--	--	---	--	--	--

안녕하세요. 스바냐입니다.

예고했던 대로 수능 수학과 수능완성에 대한
소소하지만 알찬 내용의 칼럼을 들고 왔습니다!

올해 수능완성에서
눈에 띄는 어떤 문항 유형 하나에 대한 정리입니다.

저도 수업 듣고 EBS 뜯어보고 있네요ㅠㅠ
 둔 무시했던 지난 날들을 반성하며
 이 자료를 정리해가지고 왔습니다.

문항 구성은

수능, 평가원 기출문제 3문항

2017 수능완성 1문항

2020 수능완성 3문항

마지막으로

제가 만든 변형문항 1문항

+

각 문항에 대한 손글씨 풀이 or 스바냐의 코멘트

요로코롬 구성되어 있습니다:)

이 정도로 정리 썩~ 해보시면
이 유형에 대해서 정돈도 되실 것이고
EBS 연계교재 문항을 어떤 눈으로 봐야 할지도
대략 감을 잡으실 꺼라고 봅니다.

2 2020 수능완성에서 수능으로

[2006학년도 수능 수학(가형) 미분과 적분 30번]

30. 양수 a 에 대하여 폐구간 $[-a, a]$ 에서 함수

$$f(x) = \frac{x-5}{(x-5)^2+36}$$

의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때, $M+m=0$ 이 되도록 하는 a 의 최소값을 구하시오. [4점]

[2011학년도 9월 평가원 수학(가형) 공통 16번]

16. 함수 $f(x) = -3x^4 + 4(a-1)x^3 + 6ax^2$ ($a > 0$)과 실수 t 에 대하여, $x \leq t$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a 의 최댓값은?

[4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[2010학년도 수능 수학(가형) 24번]

24. 삼차함수 $f(x) = x^3 - 3x - 1$ 이 있다. 실수 t ($t \geq -1$)에 대하여 $-1 \leq x \leq t$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라고 하자.

$$\int_{-1}^1 g(t) dt = \frac{q}{p} \text{ 일 때, } p+q \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2020 수능완성에서 수능으로

3

[2017 수능완성 실전모의고사 1회 30번]

30

6050-0418

실수 t 에 대하여 닫힌 구간 $[t, t+\pi]$ 에서 함수 $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \sin x$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자.
 $\int_0^{2\pi} g(t) dt = \frac{a+b\sqrt{3}\pi}{4}$ 일 때, ab 의 값을 구하시오.
 (단, a, b 는 정수이다.) [4점]

[2020 수능완성 실전모의고사 1회 21번]

21

9050-0382

두 실수 a, t 와 함수 $f(x) = \frac{(x-a)x}{x^2+1}$ 에 대하여 닫힌 구간 $[t-3, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 두 함수 $f(x), g(t)$ 에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

- ㄱ. $a=0$ 이면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(-x) = -f'(x)$ 이다.
- ㄴ. $a=\sqrt{3}$ 이면 함수 $f(x)$ 는 열린 구간 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 에서 증가한다.
- ㄷ. $-\frac{\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ 이면 모든 실수 t 에 대하여 $g(t) \geq \frac{1}{2}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2020 수능완성 실전모의고사 2회 21번]

21

▶ 9050-0412

함수 $f(x)=(x+a)e^{bx}$ 과 실수 t 에 대하여 닫힌 구간 $[t-2, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $M(t)$ 라 할 때, 함수 $y=M(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $M(t)=0$ 의 해는 $t=0$ 뿐이다.
 (나) 함수 $M(t)$ 의 최댓값이 존재하고 최솟값은 존재하지 않는다.
 (다) 방정식 $M'(t)=0$ 의 해는 $4 \leq t \leq 7$ 인 모든 실수 t 이다.

$f'(0)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이고, $b \neq 0$ 이다.) [4점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$
 ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

[2020 수능완성 실전모의고사 5회 30번]

30

▶ 9050-0511

함수 $f(x)=\frac{x}{2^x}$ 와 실수 t 에 대하여 닫힌 구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 하고, 실수 k 에 대하여 함수 $|g(t)-k|$ 가 미분가능하지 않은 실수 t 의 개수를 $h(k)$ 라 하자. 함수 $h(k)$ 가 불연속이 되는 실수 k 의 값을 α, β ($\alpha < \beta$)라 할 때, $(\ln 2)^2 \int_{-h(\beta)}^{h(\alpha)} g(t) dt = p \ln 2 + q$ 이다. $q-p$ 의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^x} = 0$ 이고, p 와 q 는 유리수, $\ln 2$ 는 무리수이다.) [4점]

[변형문제 made by 스바냐]

30. 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)=f'(x)e^{f(x)}$ 가 있다. 실수 t 와 양수 k 에 대하여 닫힌구간 $[t,t+k]$ 에서 함수 $|g(x)|$ 의 최댓값을 $M_k(t)$ 라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $M_2'(t)=0$ 의 해는 $-\alpha \leq t \leq \alpha$ 인 모든 실수 t 이다.
- (나) 함수 $M_k(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 k 의 최솟값은 $\sqrt{f(0)}$ 이다.

$\int_0^2 |g(x)|dx=ae^2(e+b)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

(단, a,b 는 정수이다.) [4점]

뒤이어 손글씨 해설 or 스바냐의 코멘트가 이어집니다!

[[빠른 정답]]

- 11
- 17
- ①
- 24
- ④
- ③
- 4
- 1

[2006학년도 수능 수학(가형) 미분과 적분 30번]

30. 양수 a 에 대하여 폐구간 $[-a, a]$ 에서 함수

$$f(x) = \frac{x-5}{(x-5)^2+36}$$

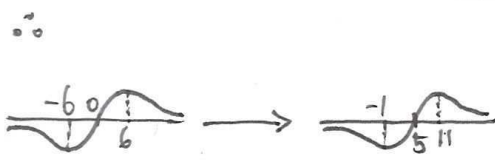
의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때, $M+m=0$ 이 되도록 하는 a 의 최소값을 구하시오. [4점]

Sol)

$$\frac{x}{x^2+36} \xrightarrow{\text{평행이동}} \frac{x-5}{(x-5)^2+36}$$

$$\frac{x}{x^2+36} = \frac{1}{x+\frac{36}{x}} \leq \frac{1}{12}$$

등호는 $x=\frac{36}{x}$ 일때



$$\therefore a \geq 11$$

[2010학년도 수능 수학(가형) 24번]

24. 삼차함수 $f(x) = x^3 - 3x - 1$ 이 있다. 실수 t ($t \geq -1$)에 대하여 $-1 \leq x \leq t$ 에서 $|f(x)|$ 의 최대값을 $g(t)$ 라고 하자.

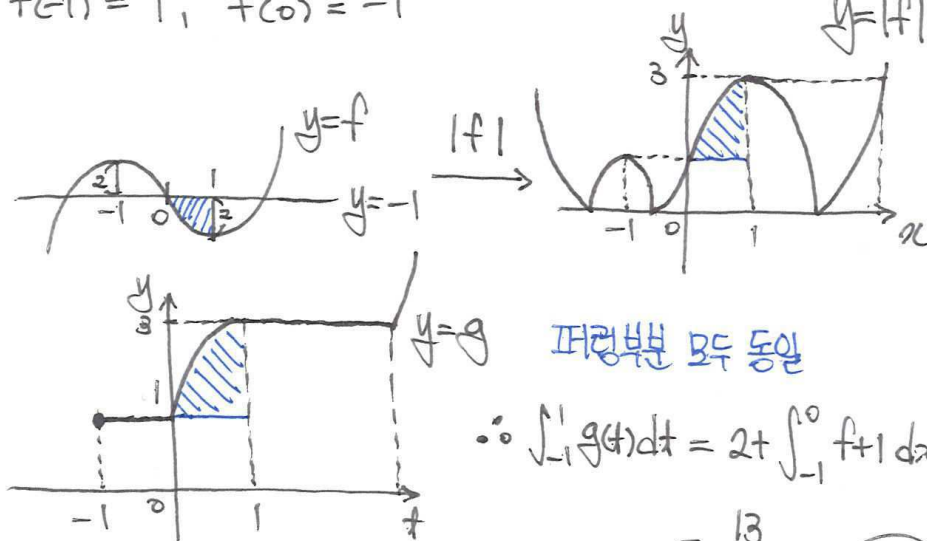
$$\int_{-1}^1 g(t) dt = \frac{q}{p} \text{ 일 때, } p+q \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Sol)

$$f = x^3 - 3x - 1, f' = 3(x^2 - 1)$$

$$f(-1) = 1, f(0) = -1$$



퍼런부분 모두 동일

$$\therefore \int_{-1}^1 g(t) dt = 2 + \int_{-1}^0 f+1 dx = \frac{13}{4}$$

수능은 역시 수능을 멋있게 배웁니다. 추가된 point는 절대값, 정적분이 있는데요. 06.수능 #30의 ㉠에서 대칭 이동까지 언급한 것은 요 문항을 염두에 두었기 때문! 보시다시피 적분 연산이 상당히 깔끔해집니다. 이를 열심히 배웠던 것이 바로 17.수완 문항! 수능은 이런 문항에서 단순 연산에 의미를 두지 않습니다. 진짜 계산 능력 확인이 목적이려면 복잡으로 계산을 묻습니다.

[2011학년도 9월 평가원 수학(가형) 공통 16번]

16. 함수 $f(x) = -3x^4 + 4(a-1)x^3 + 6ax^2$ ($a > 0$)과 실수 t 에 대하여, $x \leq t$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a 의 최댓값은?

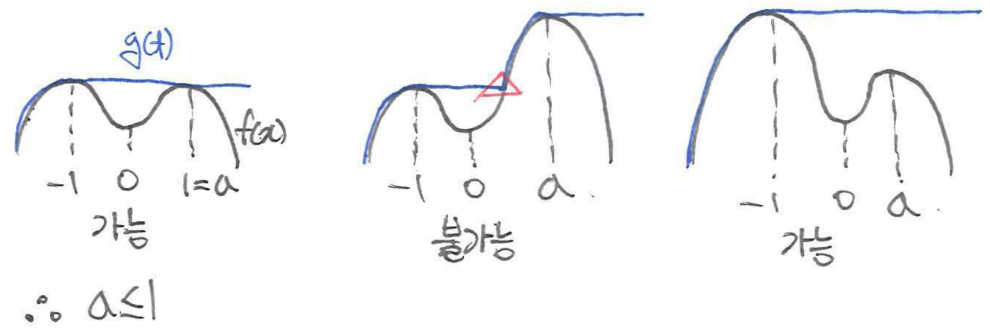
[4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol)

$$f = -3x^4 + 4(a-1)x^3 + 6ax^2 \quad (a > 0)$$

$$f' = -12x^3 + 12(a-1)x^2 + 12ax = -12x(x-a)(x+1)$$



$$\therefore a \leq 1$$

이렇게 9평에 등장한 문항입니다. 추가된 point는 미분 가능성이네요. 게다가 함수도 결정 난될 ($\because a$)

개념으로 볼 때 여기서 한 번쯤 점검해보고 갈 것은

' $a \leq 1$ '과 ' $g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다'가 필요충분 관계라는 것입니다.

최근 미분가능성 문제를 다루면서 (특히 합성함수, 18.6평#21, 19.6평#21)

미분불가능은 쉽지만, 미분가능의 충분 조건은

의외로 난관에 봉착하는 경우가 있음을 보고

'미분가능함'을 보여야 하는 문항은 한 번 정도 그 관계가 필요인지, 충분인지 따져보고 지나가는 것이 좋을 것 같습니다.

[개벼운 정리 time] 플다 보면 이 유형은...

① 최댓값 함수의 그래프 그려야 함.

② 그러면 원래 함수 그래프도 필요.

그래프 그릴 때 생각 순서는 각자 다를 수 있지만

극한(점근선), 대칭성, 대입 $\rightarrow$ 미분

요정으로 생각하는 것이 좋을 것 같습니다:)

2020 수능완성에서 수능으로

7

[2017 수능완성 실전모의고사 1회 30번]

30

6050-0418

실수 t 에 대하여 닫힌 구간 $[t, t+\pi]$ 에서 함수

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \sin x \text{의 최댓값을 } g(t) \text{라 하자.}$$

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = \frac{a+b\sqrt{3}\pi}{4} \text{ 일 때, } ab \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, a, b 는 정수이다.) [4점]

SOL)

$$f = \frac{1}{2} \sin 2x + \sin x, \quad f' = \cos 2x + \cos x \\ = 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

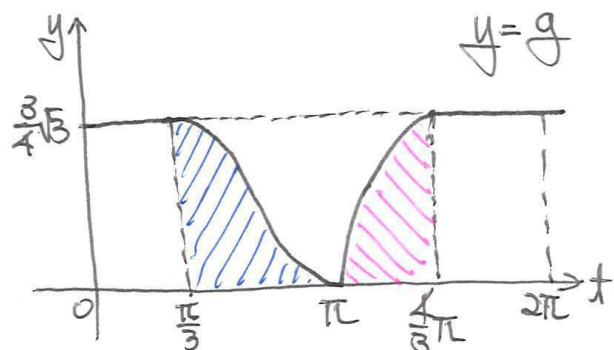
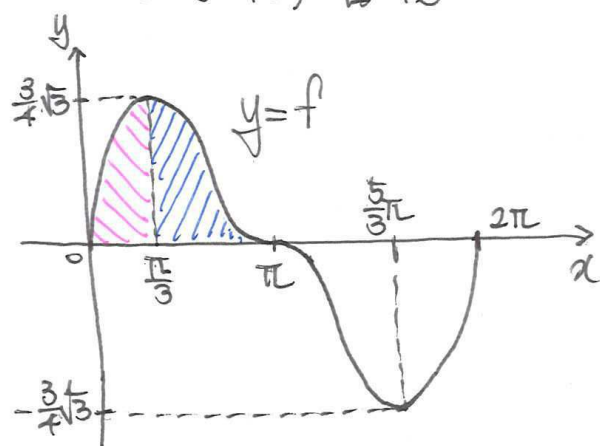
$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ or } 1 \text{ 일 때 } f' = 0$$

$$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{4}\sqrt{3}, \quad f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$$

$$\sin 2x \text{ 주기 } \pi, \quad \sin x \text{ 주기 } 2\pi$$

$$f(2\pi-x) = \frac{1}{2} \sin(4\pi-2x) + \sin(2\pi-x) \\ = -f(x)$$

$\therefore f$ 는 $(\pi, 0)$ 점대칭



$$\therefore \int_0^{2\pi} g(t) dt = \frac{3}{4}\sqrt{3}\pi + \int_0^\pi f(x) dx = \frac{8+3\sqrt{3}\pi}{4}$$

24.

[2020 수능완성 실전모의고사 1회 21번]

21

9050-0382

두 실수 a, t 와 함수 $f(x) = \frac{(x-a)x}{x^2+1}$ 에 대하여 닫힌 구간

$[t-3, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 두 함수 $f(x), g(t)$ 에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

- ㄱ. $a=0$ 이면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(-x) = -f'(x)$ 이다.
- ㄴ. $a=\sqrt{3}$ 이면 함수 $f(x)$ 는 열린 구간 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 에서 증가한다.
- ㄷ. $-\frac{\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ 이면 모든 실수 t 에 대하여 $g(t) \geq \frac{1}{2}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

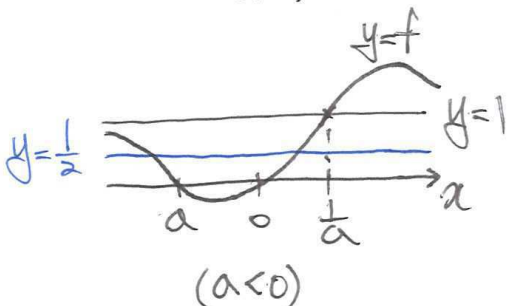
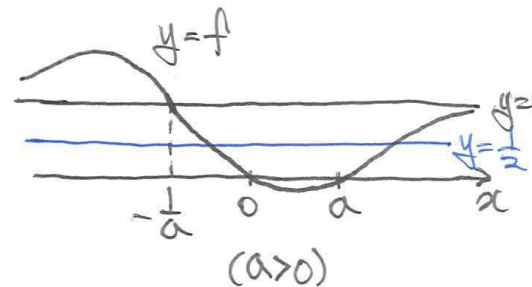
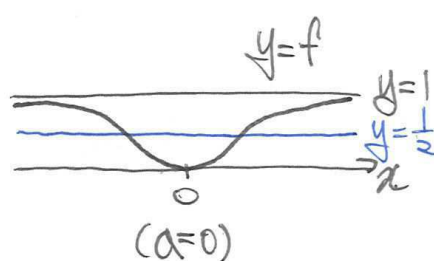
SOL)

$$\text{ㄱ. } f = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad f(x) = f(-x), \quad f'(x) = -f'(-x) \quad (\text{참})$$

$$\text{ㄴ. } f = \frac{x(x-\sqrt{3})}{x^2+1} \quad \text{Graph of } y=f(x) \text{ showing a local maximum at } x=\sqrt{3} \text{ and a local minimum at } x=-\sqrt{3}.$$

$$\text{ㄷ. } f = \frac{x^2-ax}{x^2+1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$f(0) = f(a) = 0, \quad f(x) = 1, \quad x^2-ax = x^2+1, \quad x = -\frac{1}{a}$$



$$f(x) = \frac{1}{2}, \quad 2(x^2-ax) = x^2+1 \\ x^2-2ax-1=0 \\ x = a \pm \sqrt{a^2+1}$$

$$\therefore 2\sqrt{a^2+1} \leq 3, \quad -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (\text{참})$$

ㄱ, ㄴ은 몰겠지! ㄴ은 좀 허망했습니다...

잠시 ㄷ이 필요/충분 관계인가? 생각해봅시다.

EBS 해설지를 보면 '모든 실수 t 에 대하여 $g(t) \geq \frac{1}{2}$ 이 되기 위해서는 $a-b \leq 3$ 이어야 한다. (중략) 즉, $-\frac{\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ 이면 모든 실수 t 에 (생략)

중략 이전까지는 필요조건 ($a-b \leq 3$)처럼 말하다가 중략 이후에는 충분조건 ($-\frac{\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$)임이 참이라고 합니다.

Ar... EBS logic X망... 온 애니고 ^^

사실 필요충분조건이기 때문에 그렇습니다. :)

사실 별 의미는 없으나
생각하는 연습 정도로 해본 것!

[2020 수능완성 실전모의고사 2회 21번]

21

▶ 9050-0412

함수 $f(x) = (x+a)e^{bx}$ 과 실수 t 에 대하여 닫힌 구간 $[t-2, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $M(t)$ 라 할 때, 함수 $y=M(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $M(t)=0$ 의 해는 $t=0$ 뿐이다.
 (나) 함수 $M(t)$ 의 최댓값이 존재하고 최솟값은 존재하지 않는다.
 (다) 방정식 $M'(t)=0$ 의 해는 $4 \leq t \leq 7$ 인 모든 실수 t 이다.

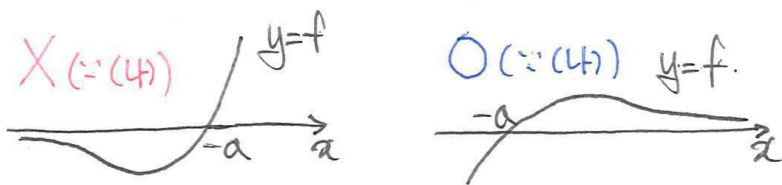
$f'(0)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이고, $b \neq 0$ 이다.) [4점]

- ① $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{7}{4}$

- ② $\frac{3}{4}$
 ⑤ $\frac{9}{4}$

- ③ $\frac{5}{4}$

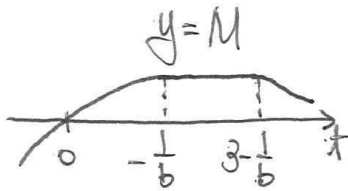
Sol.)



(가)에서 $-a = t+1 = 1$, $a = -1$

$$f = (x-1)e^{bx}, \quad f' = (bx - b + 1)e^{bx} = 0$$

$$x = 1 - \frac{1}{b}$$



(다)에서 $b = -\frac{1}{4}$

$$\therefore f'(0) = \frac{5}{4}$$

요요하게 $M(t)$, $f'(0)$ 가 결정되는 문항...

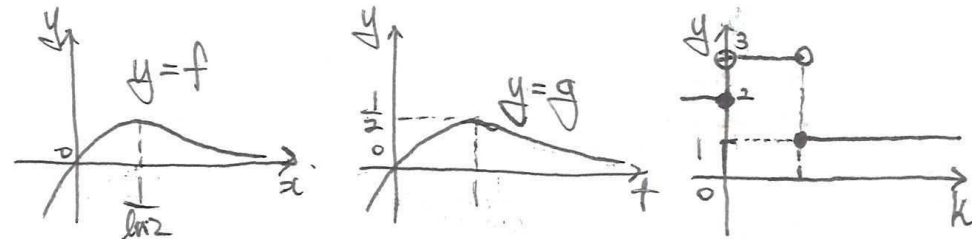
[2020 수능완성 실전모의고사 5회 30번]

30

▶ 9050-0511

함수 $f(x) = \frac{x}{2^x}$ 와 실수 t 에 대하여 닫힌 구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 하고, 실수 k 에 대하여 함수 $|g(t)-k|$ 가 미분가능하지 않은 실수 t 의 개수를 $h(k)$ 라 하자. 함수 $h(k)$ 가 불연속이 되는 실수 k 의 값을 α, β ($\alpha < \beta$)라 할 때, $(\ln 2)^2 \int_{-h(\beta)}^{h(\alpha)} g(t) dt = p \ln 2 + q$ 이다. $q-p$ 의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^x} = 0$ 이고, p 와 q 는 유리수, $\ln 2$ 는 무리수이다.) [4점]

Sol.) 수능 완성 해설지 참조... $f(x)$, $g(t)$, $h(k)$ 만 그려면



$h(k)$ 를 무리하게 우겨 넣은 느낌이 강한 문제...
 어쨌든 풀이불 만능 합니다...

[변형문제 made by 스바나]

30. 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

명확한 치환 ← $g(x) = f'(x)e^{f(x)}$ 가 있다. 실수 t 와 양수 k 에 대하여 $[t, t+k]$ 구간 수능이라면 조금만 더 $[t, t+k]$ 에서 함수 $|g(x)|$ 의 최댓값을 $M_k(t)$ 라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다. 2010, 수능 #24 → 모든 문항과 연계

(가) 방정식 $M_2'(t) = 0$ 의 해는 $-\alpha \leq t \leq \alpha$ 인 모든 실수 t 이다. → 2020, 수능완성 실전 2회 2번 (다) 조건

(나) 함수 $M_k(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 k 의 최솟값은 $\sqrt{f(0)}$ 이다. → 2011, 9평 #16 + 2020, 수능완성 실전 1회 2번 (다) 선지

$\int_0^2 |g(x)| dx = ae^2(e+b)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 정수이다.) [4점] → 단순 계산 X, 수능 대칭성 이용

Sol)

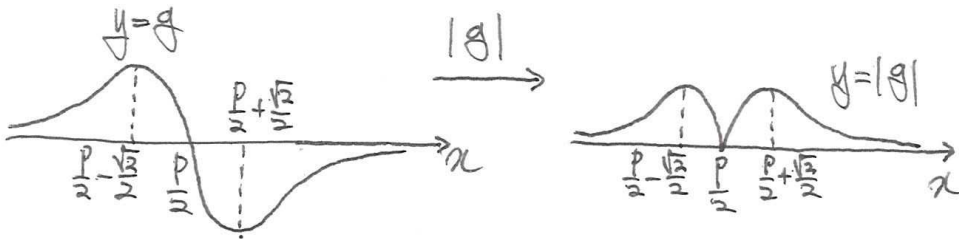
$$f = -x^2 + px + q, \quad f' = -2x + p$$

$$g = (-2x + p)e^{-x^2 + px + q}$$

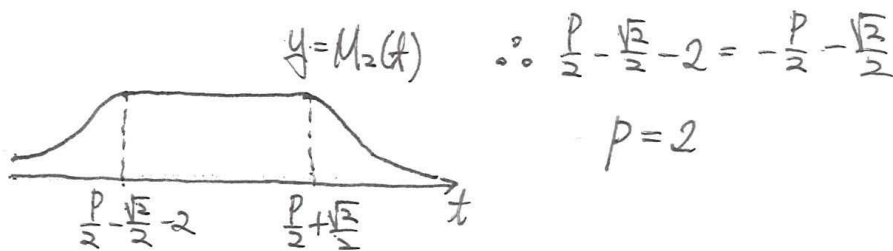
$$g' = (4x^2 - 4px + p^2 - 2)e^{-x^2 + px + q}$$

$$= (2x - p - \sqrt{2})(2x - p + \sqrt{2})e^{-x^2 + px + q}$$

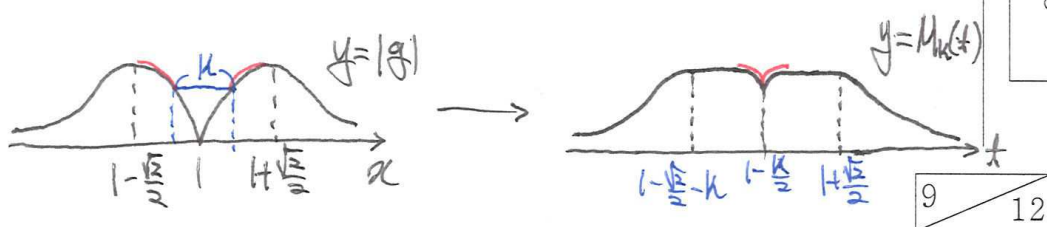
$y = g$ 는 $(\frac{p}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이므로 $y = g, y = |g|$ 의 그래프는 다음과 같다.



(가)에서 $k=2$ 이므로 $y = M_2(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$y = M_2(t)$ 의 그래프를 그리면서 알 수 있듯이 구간의 길이인 k 가 $\sqrt{2}$ 보다 작을 경우 반드시 미분불가능점이 존재한다.



따라서 (나)에서 $\sqrt{f(0)} = \sqrt{2}$, $q = 2$ 이다.

$$\int_0^2 |g(x)| dx = 2 \int_0^1 f(x) e^{f(x)} dx$$

$$= 2 \int_{f(0)}^{f(1)} e^x dx$$

$$= 2 \int_2^3 e^x dx = 2e^2(e-1)$$

$$\therefore a = 2, b = -1, a+b = 1$$

말도 안되는 제 착오에 의해 문항 오류가 발생한 점 사과드립니다...

당초 'heavy하지 않게, 최대한 앞서 언급한 point를 엮어야지.'라는 생각에 매몰되어 미분 연산이 틀린 것도 못 알아챘네요 π, π

문항에 대해 코멘트를 하라면,

g' 식에서 $(2x - p - \sqrt{2})(2x - p + \sqrt{2})$ 가 바로 정리되지 않더라도
촉부터 잡고 (가)를 보면 $g' = 0$ 을 찾으려가게 되면서 크게 어렵진 않을 겁니다.
또한, 원래 제작 취지에 맞게 (가)조건을 2020 수능완성에서
끌어와 수정했습니다.

난이도가 기대에 못 미친다면... 어쩔 수 없습니다. π, π
가볍게 점검, 숙지하는 용도의 문항으로 봐주시면 되겠습니다 :)

* 확인 사항

○ 이 유형에 대한 정리가 잘되었는지 확인하시오.