수열은 함수의 일종입니다
수열은 **정의역이 자연수로 제한된 함수**이죠

무슨 말이냐?
가령 수열 $\{a_n\}$이

$$a_n = 4n - 1$$

로 정의되어 있다면, 이는

$$f(x) = 4x - 1$$

로 정의된 **함수** $f(x)$**의**
정의역을 자연수로 제한시킨 것과 같다는 것이죠

수식으로 써보면

$$a_n = f(n) = 4n - 1$$

이렇게 a_n**은** n**을 변수로 하는 함수로서 생각할 수 있다**는 겁니다
(수열이 함수라는 발상은 뭐 새로운 게 아니라 교과서 찾아보면 있음)

제가 이번 칼럼에서 주로 다루고 싶은 수열은 **등차수열**입니다
여러분들도 알다시피 **등차수열의 일반항**은 아래와 같이 나타납니다

$$a_n = a + (n-1)d$$

근데 제가 앞에서 뭐라 그랬죠?
a_n**을** n**을 변수로 하는 함수로 생각할 수** 있다고 했죠?

아무래도 다들 x를 변수로 쓰는게 익숙하실테니까

감이 팍 오게 n자리에다가 x를 넣어서 다시 써보겠습니다

$$f(x)=a+(x-1)d$$

여기서 a랑 d가 상수죠

여러분들이 고1때 일차함수 공부를 제대로 했으면
이 함수가 뭘 나타내는지 보이실 겁니다
네, $(1,a)$**를 지나고 기울기가** d**인 일차함수**죠?

문자로 보면 감이 잘 안 올수 있으니까
숫자를 넣어서 예를 하나 들어보죠
첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열을 생각해봅시다
이 수열은 첫째항부터 차례대로 써보면

$$3,5,7,9,11,\ \cdots$$

인 수열이고, **일반항**을 써보면

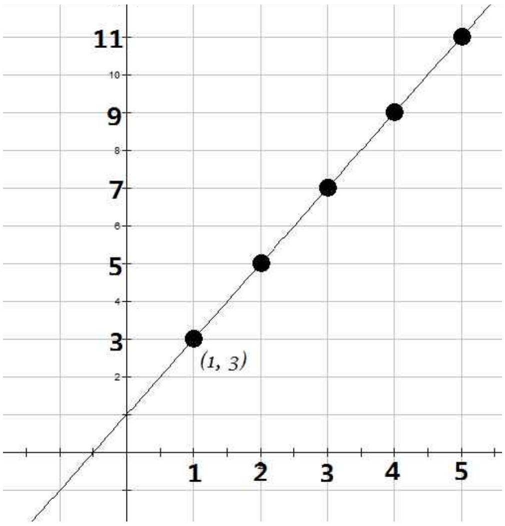
$$a_n=3+(n-1)2$$

입니다

위에서 했던 것처럼 n자리에 x를 넣어보면

$$f(x)=3+(x-1)2$$

인데요, 이대로 그래프를 그려보면 아래와 같습니다



초항 $a_1 = 3$이므로 $(1, 3)$을 지나고

공차가 2이므로 **기울기가 2**인 1차 그래프가 그려지죠

그리고 여기서 x**값이 자연수인 점들만 취한 것**이

수열 $\{a_n\}$이 되겠습니다

정리해보면 이렇습니다

$$a_n = a + (n-1)d$$

로 정의된 등차수열 $\{a_n\}$은

1. **일차함수**이며

2. 이때 **공차** d**가 기울기**가 됩니다

(기울기란 것이 x값 증가량과 함수값 증가량의 비율이란 점에서

n이 하나 커질 때 항의 값이 d만큼 커진다는 점에서

공차가 기울기에 대응하는 것이 당연하다고 할 수 있겠습니다)

등차수열을 일차함수로 생각하면
등차수열이라는 개념이 보다 직관적으로 와닿을 수 있습니다
등차수열이 하나로 결정되는 조건에 대해 이야기를 해보죠

일차함수가 하나로 결정되는 조건은 아래와 같습니다
① 점 2개가 주어지거나
② 점 1개와 기울기가 주어지거나
이건 그림을 그려보면서 생각해보면 당연하다는 것을 알 수 있습니다

역시 등차수열도 결정되는 조건이 위와 같습니다
① 항 2개가 주어지거나
② 항 1개와 공차가 주어지거나
항이 주어진다는 것은
등차수열로 그려지는 직선 위의 좌표 하나를 알려준다는 말이니까요
가령 셋째항의 값이 $a_3 = 5$ 로 주어지면
이 등차수열이 그리는 직선은 $(3, 5)$를 지나겠죠
(실제로 교과서에 이 두 경우에 대한 예제가 있습니다)

※ 참고 ※
많은 등차수열 문제에서 조건을 위와 같이 주어주기는 하지만
모든 등차수열 문제에서 그런 것은 아닙니다
꼭 위와 같은 조건이 아니더라도
식을 2개 세울 수 있게만 조건이 주어지면
등차수열을 구할 수 있습니다

기출로 예를 들어보면

24. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_5 = 5, \quad a_{15} = 25$$

일 때, a_{20}의 값을 구하시오. [3점]

2019년 수리 나형
6월 문제

위 문제는 **항을 2개 주는 경우**이고

5. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{10} - a_7 = 6$$

일 때, a_4의 값은? [3점]

2019년 수리 나형
수능 문제

이 문제의 경우는 **항을 하나 주고**
공차를 간접적으로 알려주는 경우이죠
$a_{10} - a_7 = 6 = f(10) - f(7)$에서
기울기 = $\dfrac{f(10)-f(7)}{10-7}$ **= 공차 = 2** 라는 것을 바로 구할 수 있죠

사실 위와 같은 문제들은 일반항 공식을 써서 수식으로 풀면
어렵지 않게 풀리는 문제이긴 합니다
하지만 어째서 이 문제가 **조건이 충분히 주어진 문제**인지
이게 **왜 풀릴 수 있는 문제**인지 아는 편이
같은 수식으로 문제를 풀어도 좀 더 **감이 오고**
방향성 있게 문제를 풀 수 있는 것 같습니다
아무런 의미도 모르고 수식만 쫓아가듯이 풀면 길을 잃을 수 있거든요
또 그래야 응용문제를 푸는데도 더 수월합니다

그리고 식 두 개를 **다른 방식**으로 주고
등차수열을 구하는 문제들 예시를 찾아본다면,
어렵지 않게 찾을 수 있습니다.

2019년 9월 나형 13번

13. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = -15, \ |a_3| - a_4 = 0$$

일 때, a_7의 값은? [3점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

2020년 9월 나형 7번

7. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

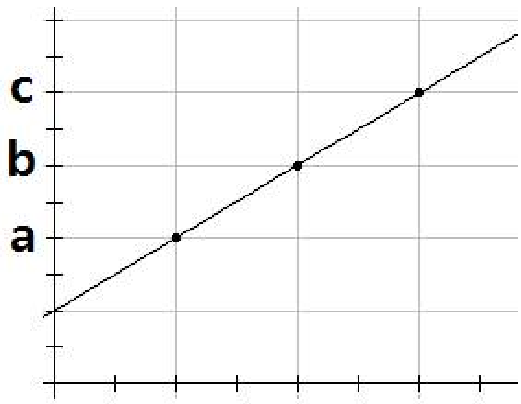
$$a_1 = a_3 + 8, \quad 2a_4 - 3a_6 = 3$$

일 때, $a_k < 0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

등차수열은 **문자 2개로 표현가능**하다는 것,
식 두 개를 주면 등차수열을 구할 수 있다는 것,
요긴하게 쓰이는 사실이니 잘 알아주시면 좋을 것 같습니다.
그리고 그것은 **등차수열이 1차 함수, 직선**이기 때문에 그렇습니다.

다음으로는 **등차중항**에 대한 이야기를 해보죠
등차수열을 일차함수로서 생각하면
등차중항의 개념이 당연함을 **기하학적으로 확인**할 수 있습니다



a, b, c 가 차례로 등차수열을 이루면
그래프로 보면 위와 같이 그려집니다

위 그림을 보면 $b=\dfrac{a+c}{2}$임이 당연함을 느낄 수 있죠

(a, c가 b를 기준으로 **대칭적**으로 있으니

당연히 b가 a, c의 평균값인 $\dfrac{a+c}{2}$가 되는 거죠!)

위 그림과 같은 느낌으로 등차중항이 자명함을 느끼면

15. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은? [4점]

2017년 수리 나형
수능 문제

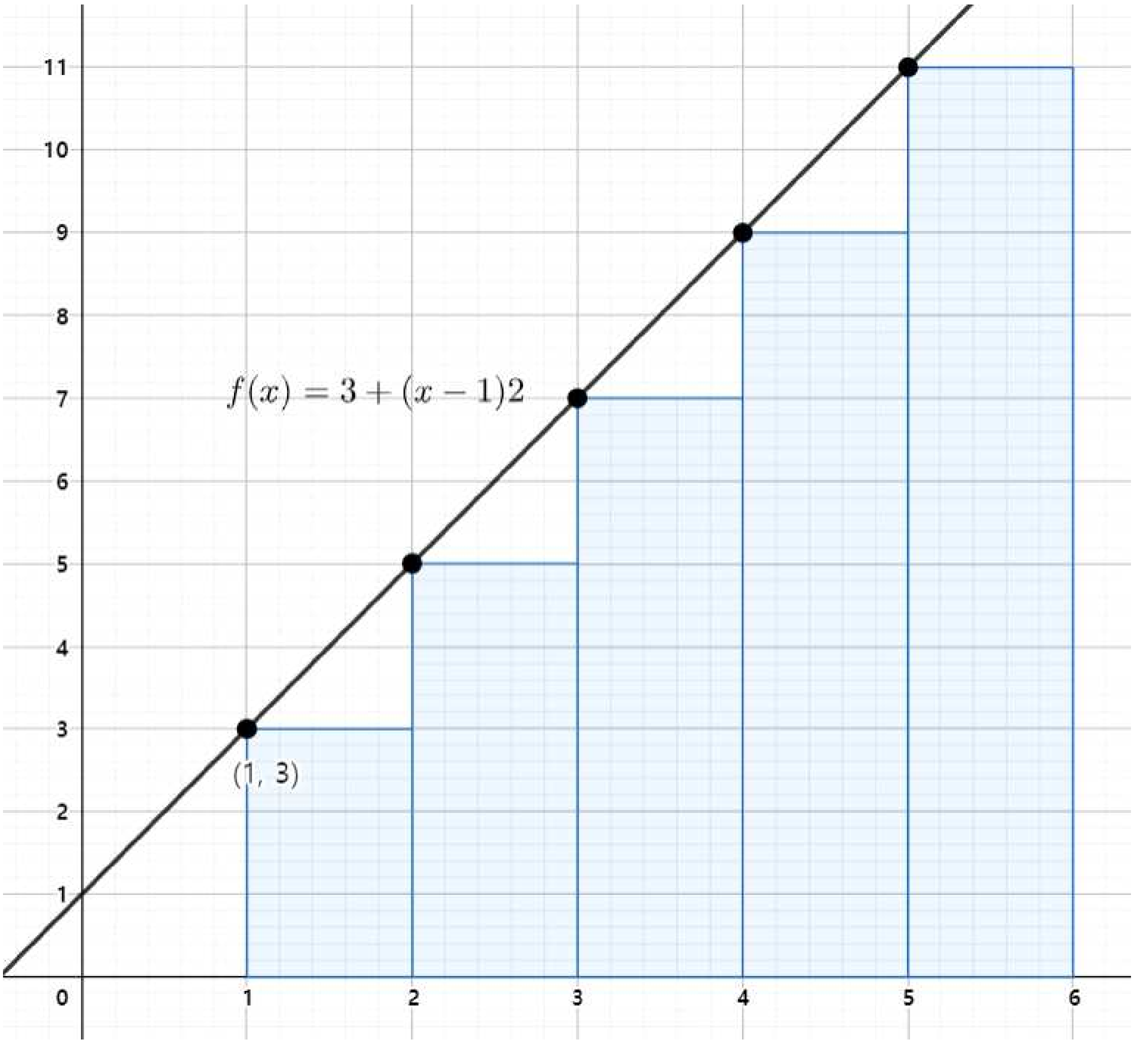
(가) $a_6+a_8=0$
(나) $\lvert a_6\rvert=\lvert a_7\rvert+3$

이런 문제를 봤을 때

$a_7=0$임과, a_6이 음수라는 것을

위 그림과 같이 머릿속에 직선을 그려보면 느낌으로 금방 알 수 있습니다.

다음으로는 **등차수열 합 공식**을 보죠.
등차수열의 합을 기하학적으로 아래와 같이 이해할 수 있습니다.



교과과정에서 소개하는 등차수열의 합 공식은 아래 두 개입니다.

등차수열의 합

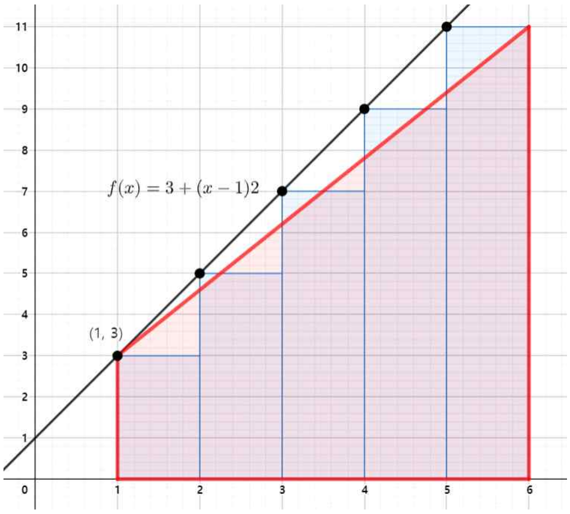
등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $\dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

* $\frac{n(a+l)}{2}$

첫 번째 공식은 사실 아래 **사다리꼴의 넓이**입니다.
그리고 아래 사다리꼴이 등차수열 합 넓이와 같은 건 눈에 보입니다.



* $\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

지금 등차수열을 함수로서 보고 있는데, 이 식도 함수로서 봐서 n을 x로 바꿔쓰고 차수에 따라 정리하면 아래와 같이 써볼 수 있습니다.

$$\frac{d}{2}x^2+(a-\frac{d}{2})x$$

이 식은 **2차식**입니다.
등차수열을 1차함수로 봤을 때 $f(x)=a+(d-1)x$니까
1차항이 d였는데, 얘는 **2차항 계수가** $\frac{d}{2}$죠.

근데 위에서 봤듯이 **합은 넓이**랑 관련있고,
함수에서 **넓이는 적분**이랑 관련이 있습니다.
1차식 적분하면 2차식 되고,
2차항 계수는 피적분함수 1차항 계수의 $1/2$이 됩니다.
우왕 비슷해 신기해 수학의 신비 칭찬해

등차수열 뿐만 아니라 **2차식 합**이나 **3차식 합**도 들여다보면
차수나 최고차항 계수의 변화가 적분과 유사성을 띄고 있음을 관찰할 수 있습니다.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n^2+2n+1)$$

차수 하나 늘어나고, **(차수+1)의 역수가 최고차항 계수**입니다.
우와우와우

이번엔 **수열의 합과 일반항 사이의 관계**를 봅시다.
일반항에서 합을 계산하는게 적분과 연관성이 있으니,
합에서 일반항을 뽑아내는건 미분과 연관성이 있을 것이란 느낌을 잡을 수 있습니다.

실제로 식 형태를 보면

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

뭐 이런 관계인데요, 함수의 느낌을 살려보고자 x로 바꿔보면

$$a(x) = S(x) - S(x-1) = \frac{S(x) - S(x-1)}{x-(x-1)}$$

요렇게 되는데,
이거 잘 들여다보면 **평균변화율**입니다.
미분이 평균변화율의 극한이라는 점을 생각했을 때,
합에서 일반항 뽑아내는 게 미분이랑 관련이 있을 거란 느낌을 조금 더 얻을 수 있습니다.

실제로 $S(x)$**가 2차식인 경우**를 예를 들어서 한번 계산해보면,

$S(x)=ax^2+bx+c$로 놓았을 때

$$S(x)-S(x-1)=ax^2+bx+c-[a(x-1)^2+b(x-1)+c]$$
$$=2ax+a+b$$

가 됩니다. 그런데

$S'(x)=2ax+b$ 인데,

차수랑 최고차항 계수는 같은 것을 확인할 수 있습니다.

상수항도 b는 겹치고요.

실제로 합이 2차식일 때 일반항이 등차수열이려면 어떡해야 되냐 뭐 이런거 묻는 경우가 있기도 하고,

합과 일반항 사이의 차수와 최고차항 계수 관계를 알아놓으면 유용할 상황이 종종 있습니다.

흥미가 있으신 분은 $S(x)$를 **임의의 n차식**으로 놓고 해보셔도 좋을 것 같습니다.

이과수학을 하시는 분은, $S(x)=ar^{x-1}$인 경우에

$$S(x)-S(x-1)=ar^{x-1}-ar^{x-2}=a(r-1)r^{x-2}$$

가 되는 것이,

지수함수의 미분을 생각했을 때 우연이 아니라는 것을 눈치챌 수 있습니다.

이번 9월 나형 30번도 그렇고,

수열을 함수로서 이해하면 도움이 되는 경우가 종종 있습니다

꼭 실용성을 떠나서 다른 관점으로 수열을 바라보니 나름 재미도 있는 것 같고 막 이해에 도움이 되는 것 같고 막 그렇지 않나요 아님 말고

아무튼 도움이 되셨길 바랍니다

이만 총총