이번에 시행된 9월 모의고사 수리나형 30번 문항은 아래와 같습니다.

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 점 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

[4점]

먼저 문제에서 최종적으로 구해야 되는게 무엇인지 알아보고,
풀이의 큰 줄거리를 잡아봅시다.

문제에서 최종적으로 구해야 하는 건 $f(4k)$입니다.
그리고 f는 4차함수입니다.
따라서 이 문제 풀이의 큰 줄거리는
① 4차함수 $f(x)$와
② k를 구해서
③ $f(4k)$를 구하는
스토리일 것입니다.

처음 딱 봤을 때 이 문제는 어려워 보입니다.
이 문제는 왜 어려워 보일까요?
왜 어려워 보이는지 얘기하기 전에,
많은 수학문제 풀이에 이용되는 대원칙을 적어보겠습니다.

미지수의 값을 구하려면, 미지수의 개수만큼 식을 세워야 한다.

위 사실은 많이들 익숙하실테니 따로 설명은 하지 않겠습니다.

원칙적으로 4차함수가 하나로 결정되려면 식이 5개 필요합니다.

왜냐하면 4차함수를 표현할 때 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$와 같이 미지수 5개가 쓰이기 때문이죠.

거기에다가 문제에서는 k까지 나오니까 식이 총 6개가 있어야 할 것입니다.

그런데 이 문제에서 주어진 조건이 얼핏 보면 6개가 안 되어 보입니다.

①

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

② 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 ③

등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 점 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$에서 만난다.

④ $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

문제를 푸는데 필요한 식 개수보다 문제에서 주어진 식 개수가 적어 보이고,
그렇기 때문에 이 문제가 풀 수 없는 문제,
또는 풀기 어려운 문제처럼 느껴지는 것입니다.
일반적으로 사람이 어떤 문제의 난이도를 평가할 때,
문제를 해결하는데 필요한 자원보다 내게 주어진 자원이 적어 보이면 어렵다고 평가하기 때문이죠.
머릿속에서 이렇게 정리를 해서 생각하지는 않지만,
무의식중에 문제를 보고 이런 생각이 들기 때문에 문제가 어렵게 느껴지는 것입니다.
실제로 수학문제가 어렵게 느껴지는 많은 경우는 이러한 케이스입니다.

따라서 이 문제가 구체적인 중간과정은 모르겠지만 풀리는 문제일 것이라는 확신을 가지기 위해서는,
문제의 조건이 문제를 풀기에 충분하다는 것을 확인하면 될 것입니다.

그리고 문제의 조건에서 문제가 풀리는데 필요한 정보를 뽑아내는 과정,
그 과정이 풀이라는 이야기에서 핵심이 되는 중심사건이고,
그 연결과정의 열쇠는 수학개념이 될 것입니다.
그리고 그 과정을 잘 할 수 있는가를 평가하고 싶은 것이 이 문제의 출제의도가 될 것입니다.
그렇기에 이 문제의 출제의도를 분석한다는 것은,
이 문제 조건에서 어떠한 개념을 어떠한 방식으로 이용해서 풀이에 필요한 정보를 뽑아내는지,
그래서 어떤 과정으로 이 문제가 풀 수 있는 문제가 되는지,
그 과정을 살펴보는 것일 겁니다.
이제부터 살펴보도록 하죠.

제가 생각했을 때,
이 문제를 어렵게 만드는 핵심적인 부분은 ②번 조건에 있습니다.
등차수열이라는 조건을 어떻게 써먹는지가 생소해 보이기 때문에,
이 문제가 어렵게 느껴지는 것이죠.
이 문제에서 등차수열 조건을 어떻게 쓰고 있는지 구체적인 방법은 조금 후에 설명하도록 하고,
저 등차수열이라는 조건으로 인해 왜 이 문제가 풀릴 수밖에 없는 문제인지 설명해보도록 하겠습니다.

등차수열 개념에서 핵심적인 부분 중 하나는,
등차수열은 문자 2개로 표현할 수 있다는 점입니다.
예를 들어 숫자 3개가 차례로 등차수열을 이룬다고 하면 우리는 흔히
$a-d,\ a,\ a+d$ 같은 식으로 문자 2개를 이용해서 표현합니다.

이 문제 ①, **②번 조건에서는 f에 대한 총 5개의 정보**를 주고 있습니다.
1. 최고차항의 계수가 1이다
2. $f(-1)$
3. $f(0)$
4. $f(1)$
5. $f(2)$

이렇게 5개요.
앞서 언급했듯이 4차함수는 정보가 5개 주어지면 구할 수 있습니다.
따라서 2,3,4,5번의 값을 그냥 숫자로 알려줬다면,
연립방정식을 세워서 4차함수가 뭔지 바로 구할 수 있었을 것입니다.
그런데 2,3,4,5번 정보는 등차수열로 줬어요.
그리고 앞서 얘기했듯이 등차수열은 **문자 2개**로 표현가능합니다.
따라서 ①, ②번 조건을 활용하면,
4차함수 $f(x)$를 문자 2개로 표현할 수 있게 됩니다.

$f(x)$를 문자 2개로 표현하고 난 나머지는 어려울 것 없는 과정입니다.
문제 나머지 발문에서 k가 등장해서 문자가 총 3개가 되는데,
③번 조건과 ④번 조건에서
1. $(1, f(1))$에서의 접선이 $(k, 0)$을 지난다.
2. $(2, f(2))$에서의 접선이 $(k, 0)$을 지난다.
3. $f(2k)=20$

라는 사실을 통해 **식을 3개 세울 수 있고,**
나머지는 기계적인 연립과정입니다.

따라서 이 문제는,
①, ②번 조건을 이용해서 $f(x)$를 문자 2개로 표현만 하면 풀리는 문제이고,
그 부분이 이 문제에서 어려운 부분일 것입니다.

자 그래서 목표는

$f(x)$를 문자 2개를 이용해서 표현하자!

방법은?

사실 열심히 연립하면 됩니다 ㅎㅎ

등차수열을 **1차함수**로 보는 관점을 이용한 풀이도 있고 여기저기서 소개하고 있던데, 이유가 있어서 그 풀이에 대한 이야기는 나중에 하기로 하고,

지금은 열심히 연립해서 풀어보겠습니다.

최고사항 계수가 1이라고 했으니,

$$f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

으로 놓아봅시다.

이 때 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 차례로 등차수열을 이룬다고 했으니,

적당히 각각 $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$로 놓아봅시다. 이제 정리해서 연립해보면

$f(-1) = 1 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = a - d$ ⋯①

$f(0) = a_0 = a$ ⋯②

$f(1) = 1 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = a + d$ ⋯③

$f(2) = 16 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = a + 2d$ ⋯④

② $\Rightarrow$ $a_0 = a$

①+③ $\Rightarrow$ $2 + 2a_2 + 2a_0 = 2a$

$\therefore$ $a_2 = -1$

③−① $\Rightarrow$ $2a_3 + 2a_1 = 2d$

$\therefore$ $a_3 + a_1 = d$

위의 결과들을 ④에 대입하면

$16 + 6a_3 + 2(a_3 + a_1) - 4 + a = a + 2d$

$\therefore$ $12 + 6a_3 = 0$

$a_3 = -2$

$\therefore$ $a_1 = 2 + d$

따라서

$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + (2+d)x + a$

이 과정이 해결됐다고 가정하고 문제 발문을 바꿔봅시다.

> 30. 사차함수 $f(x)=x^4-2x^3-x^2+(2+d)x+a$가 있다. 이 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,f(-1))$에서의 접선과 점 $(2,f(2))$에서의 접선이 점 $(k,0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오.

만약 이런 문제가 나왔다면 **이건 평범한 3점 또는 4점 문제**였을 것입니다.
이런 유형의 문제를 푸는 과정이 연습을 통해 자동화되어있다면,
이 문제는 앞의 과정만 무사히 마치면 끝나는 문제입니다.

이처럼 **어려운 4점 문항**이란, 대개
분해해보면 여러 개념이 직렬로 연결되어있는 식으로 구성되어 있고,
킬러문항이라면 그 중 한 개념을 활용하는 방식을 생소하게 내는 정도입니다.
따라서 킬러문항을 잘 풀려면 **생소한 부분에만 집중력을 모을 수 있게,**
나머지 상투적인 유형들이 연습을 통해 자동화되어 있어야 합니다.

이렇게 보면 별로 어려울 것 없어 보이는 이 문제가
왜 오답률 97%가 나왔을까요?
위의 과정을 보면 사실 별것 없는 일차 연립방정식 연립과정인데 말이죠.
그 이유는

$f(x)$를 문자 2개를 이용해서 표현하자!

라는 중간 목표가 생소했기 때문입니다.
이런 목표가 없으면, 문자가 6개인 식 4개를 연립하는 쪽으로 풀이방향을 생각을 할 수가 없습니다.

가령 만약에

> 30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 이 때, $f(-1)=6$, $f(0)=2$, $f(1)=2$, $f(2)=12$ 라고 하자. $f(3)$을 구하시오.

같은 문제를 봤다면, 별 고민 없이 연립방정식을 세워서 $f(x)$를 구했을 것입니다.

따라서 이러한 연립방정식을 푸는 과정이 생소한 것이 아니라,
최종적으로 구체적인 값을 구하는 것이 아닌 문자 2개로 정리한다는 목표가 생소했기 때문에 연립하는 쪽으로 풀이방향을 잡을 수가 없었던 것입니다.

문제를 **어려웠게 만들었고 요소**는 이 문제에서 **새로웠던 부분**이고,
따라서 **오답풀이를 할 때 강조되어 정리**되어야 하는 부분입니다.
오답노트에 모든 풀이과정을 같은 중요도로 적는 것은,
마치 중심문장을 모른채 국어 지문을 읽는 것과 같습니다.
풀이과정은 하나의 지문입니다.
그렇기에 풀이과정을 잘 독해하려면,
쓰인 개념별로 분해해서 문단 나누기를 하고,
나에게 새로운 내용이 있는 문단을 집중해서 봐야 합니다.
그래야 머릿속 저장공간의 어떤 폴더에 집어넣어야 할지 분류하기가 수월합니다.

이 문제를 통해 얻어가야 하는 아이디어는

문제에서 4차 함수의 함숫값을 등차수열로 여러 개 주면,

함숫값을 문자 2개로 쓸 수 있어서 미지수 개수를 줄일 수 있다

가 되겠습니다.

$f(x)$를 문자 2개로 표현하는 과정을,
등차수열을 1차함수로 보는 관점을 이용하여 비교적 간단하게 구할 수 있는 풀이가 존재합니다.
해당 풀이에 대한 설명은 분량 관계상 생략할 것인데,
혹시 수요가 있으면 설명하는 글을 작성해서 올리도록 하겠습니다.
ebs를 포함한 여기저기서 이 풀이를 소개하고 있고,
수학적으로도 의미가 있는 좋은 풀이라고 생각하지만,
저는 수능공부라는 관점에서 별로 좋은 풀이라고 생각하지 않습니다.
왜냐하면 그 풀이는 수능시험의 대원칙

교과과정에 벗어나는 내용은 출제하지 않는다

를 위배한다고 생각되기 때문입니다.
등차수열을 1차함수로 보는 관점은,
교과개념을 토대로 도저히 생각할 수 없는 신박한 발상은 아닙니다만,
제가 알기로 교과서에서 명시적으로 소개하고 있는 개념이 아닙니다.

교과서에 없는 내용을 사용한 풀이를 정법풀이로서 받아들이면 안 좋은 이유는,
수능의 출제범위가 무엇인지 오해하게 되기 때문입니다.
수능에 교과서에 없는 내용을 알아야 풀 수 있는 내용이 있다고 생각하게 되면,
수능공부가 무한하게 느껴집니다.
이런 생각은 공부방향을 잡는데도 좋지 않고,
공부를 하는데 있어서 자신감을 갉아먹는 요소가 됩니다.

등차수열을 1차함수로 보는 관점은 좋은 관점이고,
이 문제 뿐만 아니라 다른 문제를 푸는데 도움이 될만한 유용한 관점입니다.
따라서 잘 이해가 되고 여유가 되시는 분은 이 관점을 기억해두시면 유용할 수도 있습니다.
하지만 그 관점을 이용한 풀이는 정법풀이가 아닌 별해로서 받아들이는 것이 맞다고 생각합니다.
평가원이 어떤 풀이를 기대하고 문제를 냈는지는 평가원만이 알겠지만,
저는 개인적으로 1차함수 풀이는 평가원이 의도한 풀이는 아니라고 생각합니다.

다시 풀이해설로 돌아가보죠.
언급했다시피 나머지 과정은 상투적인 유형입니다.
풀이를 적어보기는 하겠으나, 관심 없는 분들은 스킵하셔도 무방합니다.

풀이의 나머지 과정을 분석해보면

접선의 방정식을 구할 수 있는가?

를 묻고 있습니다.
이는 교과서 기본 개념 (아래 이미지는 지학사 교과서에서 가져옴)

> **접선의 방정식**
>
> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은
>
> $$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

를 알면 풀 수 있습니다.
이건 어떤 교과서, 개념서를 보아도 반드시 나와 있는 내용입니다.
수능문제 풀이과정은 반드시 교과서에서 그 근거를 찾아볼 수 있습니다.

풀이과정을 마저 설명해보면
위 공식에 $a=-1$, $a=2$를 대입해서 접선의 방정식을 구하고,
(x,y)에 $(k,0)$을 대입하면 a,d,k에 대한 식이 2개 나옵니다.

그리고 $f(2k)=20$에서 또 a,d,k에 대한 식이 1개 나옵니다.

문자가 a,d,k로 3개이고, 식이 3개이니까 열심히 연립하면 a,d,k를 구할 수 있고, 구한값을 토대로 $f(4k)$를 구하면 답이 나옵니다.

구체적으로 적어보면

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + (2+d)$$

에서, 접선의 방정식

$$y = (-6+d)(x+1) + (a-d)$$

$$y = (6+d)(x-2) + (a+2d)$$

를 얻고, 여기에 $(x, y) = (k, 0)$을 대입해서

$$0 = (-6+d)(k+1) + (a-d) = -6k - 6 + dk + a \qquad \cdots ①$$

$$0 = (6+d)(k-2) + (a+2d) = 6k - 12 + dk + a \qquad \cdots ②$$

②−①을 계산하면,

$$k = \frac{1}{2}$$

이제 $f(2k) = 20$에서,

$$20 = f(2k) = f(1) = a + d \qquad \cdots ③$$

그리고 ①에 $k = \frac{1}{2}$을 대입해서 a, d에 대한 식을 구하면 (②에 대입해도 무관)

$$0 = -9 + \frac{d}{2} + a \qquad \cdots ④$$

③, ④를 연립하면

$$d = 22, \qquad a = -2$$

이를 이용해서 $f(4k)$를 구하면

$$f(4k) = f(2) = a + 2d = 42$$

$\boxed{\text{답 : } 42}$

이 칼럼을 통해 9월 모의고사 나형 30번에 대한 이해,
더 나아가서 기출문제를 분석하고 오답풀이를 통해 무엇을 하면 좋은지 이해하는데 도움이 되기를 바랍니다.