제 2 교시 9평 총평 및 30번 가형/나형 접근법

홀수형

문제를 반드시 풀어본 후 해설을 읽길 추천합니다.
1Page에 가형 30번 문제
2Page에 가형 30번 접근 및 해설 + 나형 30번 문제
3Page에 나형 30번 접근 및 해설이 오도록 배치하였습니다. 자료 활용시, 인쇄시 참고 바랍니다.

<총평>

우선 수험생 여러분들, 막대한 부담감 속에서 중요한 시험을 치러내시느라 정말 수고하셨습니다.

우선 가형과 나형 공통사항은,
6평부터 9평까지 EBS 연계가 예전에 비해 매우 두드러진다는 것.
6평 가형 20번, 나형 29번 ($x_{n+1}-x_n \le 2$ 확통 문제)가
체감되는 연계였을 뿐더러 이번 9평 킬러인 가형 30번도
EBS에서 발표할진 모르겠지만 저는 수완에 매우 비슷한 문항이 있는 것으로 느껴졌습니다.
(킬러연계는 거의 최초가 아닐까 싶네요.)
심지어 가형 17번은 아예 대놓고 직접연계를 한 만큼,
EBS 주요문항은 반드시 풀어줘야겠습니다.
주요문항은? 파급효과님과 제가 Orbi에 조만간 배포해드립니다^^
(EBS 변형 N제도 출시 예정입니다.)

문과와 이과 각각 간략하게 총평을 해보면

수학 나형의 경우,
매우 평이하게 출제하였습니다. 30번은 다수의 문과학생들이 힘들어했을 것으로 판단되나 21번은 ㄱㄴㄷ 문제이고 ㄱㄴ사이의 관련성이 있어 찍맞 정답률을 50%까지 올릴 수 있었고, 나머지 28문제들도 매우 무난하게 나왔기 때문에, 확통에 큰 허점이 없는 학생들이라면 고득점을 노려볼 수 있었던 시험입니다.

수학 가형의 경우,

매우 기이한 2130번을 출제했습니다. 이런 문제를 만약 기대모의고사에서 냈다면.... 먼지가 나게 털렸을 텐데ㅋㅋ
정말 부.럽.습.니.다.평.가.원.
그렇다고 문제가 별로냐? 그건 또 아닙니다. 충분히 교과과정의 내용을 잘 머금고 있는데, 우리가 지금까지 너무 특이한 상황의 문제에 길들여진 부분이 좀 없잖아 있습니다.
21번과 30번의 특징은 '풀이 방향은 5초컷, 풀이 시간은 500초컷'입니다. 누가 봐도 이렇게 해야된다는 생각을 충분히 할 수 있었을 것이라 인정할 수 있습니다. 하지만 그것을 실행하는 데에 시간이 오래 걸립니다. 계산이 상당히 많고, 숫자와 함수들이 깔끔하지 않아서요.

그 시간은 준킬러에서 확보됩니다. 백분위 99% 이상을 원하는 상위권도, 1~2등급으로 올라오고 싶은 중위권도 준킬러를 빠르고 정확하게 풀어내는 연습합시다!

이제, 가형 30번, 나형 30번에 대해 얘기해봅시다.

1. [가형 30번]

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin \pi x+f(3)x+5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오. [4점]

<문제 접근>

Point 1. x^2+x+1의 관찰

① 미분하면 $2x+1$
=> $2x+1$이 곱해져 있어야 양변 적분 가능하겠음.

② $x=-\frac{1}{2}$에 대하여 대칭
=> x 자리에 $-1-x$대입해도 같은 식이 나옴.

Point 2. 적분의 영리함

① 부정적분을 할 것인가 정적분을 할 것인가?
=> $f(7)$의 7을 관찰하면, 2^2+2+1임을 알 수 있다.
=> 또, 우변 함수 $\sin\pi x$, x, x^2들이 각각 기함수, 기함수, 우함수
=> $2x$는 기, 1은 우함수이니까 결국은 $2x+1$을 곱해도 우변의 식들은 각각 기함수, 우함수로 적분이 편할 것!
=> 오케이, 정적분으로 선택하고, 구간은 $-a$, a로 설정
($\because$ 우변 함수들의 구성)

<풀이 시작>

step i) Point 1.의 ② 시행

준 식
$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$ 에 x 대신 $1-x$ 대입하면
$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi(-1-x)+f(3)(-1-x)+5(-1-x)^2$
인데 $\pi f(1)\sin\pi(-1-x)=\pi f(1)\sin\pi x$ 이므로 결국
$f(3)x+5x^2=f(3)(-1-x)+5(-1-x)^2$으로부터 $f(3)=5$임을 알 수 있다.

step ii) Point 1.의 ①과 Point 2.의 ① 시행

$f(3)=5$이 적용된 준 식 $f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+5x+5x^2$의 양변에 $2x+1$을 곱한 후 정적분을 해줄 건데, 정적분 구간은 $-a$부터 a (단, a는 음이 아닌 실수)로 설정해주자.

$\int_{-a}^{a}(2x+1)f'(x^2+x+1)dx=f(a^2+a+1)-f(a^2-a+1)$ 이고
$\int_{-a}^{a}(2x+1)\{\pi f(1)\sin\pi x+5x+5x^2\}dx$
$=\int_{-a}^{a}\{2x\pi f(1)\sin\pi x+10x^2+5x^2\}dx$
(cf. 전개하면서 기함수 부분을 없애준 것)
$=2\times\int_{0}^{a}\{2x\pi f(x)\sin\pi x+10x^2+5x^2\}dx$ (cf. 우함수 적분)
$=4f(1)\times\left\{-a\cos\pi x-\frac{1}{\pi}\sin\pi a\right\}+10a^3$ 이다.
따라서
$f(a^2+a+1)-f(a^2-a+1)=4f(1)\times\left\{-a\cos\pi a-\frac{1}{\pi}\sin\pi a\right\}+10a^3$
이고,
$f(7)$을 구하기 위해 $a=2$를 대입하면 $f(7)-5=-8f(1)+80$
이며 (참고로 $f(3)=5$가 좌변에서 적용된 것)
$f(1)$을 구하기 위해 $a=1$을 대입하면 $5-f(1)=4f(1)+10$
에서 $f(1)=-1$이다. 따라서 $f(7)=85-8f(1)=93$이다.

2. [나형 30번]

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 점 $(k,\ 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

<문제 접근>

Point 1. $f(-1), f(0), f(1), f(2)$가 등차수열?

① y값이 등차수열인데 x값도 하필 $-1, 0, 1, 2$로 등차수열?
=> 네 점 $(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))$이 어떤 직선 위에 있는 해석 가능
=> '그' 직선의 기울기는 모르니 편하게 $y=m(x-0)+f(0)$로 두면, 방정식 $f(x)=mx+f(0)$의 해가 $-1, 0, 1, 2$라는 뜻!
=> 아, $f(x)-mx-f(0)=(x+1)x(x-1)(x-2)$ 혹은 $f(x)=(x+1)x(x-1)(x-2)+mx+f(0)$ 로 정리되네연~

Point 2. 두 접선의 교점 제시

① 여러 방법이 있지만...
=> 그냥 두 점 $(-1, f(-1)), (2, f(2))$의 접선을 각각 구한 후 각각에 $(k, 0)$을 넣을까?
아니면 $(-1, f(-1)), (k, 0)$의 평균변화율이 $f'(-1)$이고 $(2, f(2)), (k, 0)$의 평균변화율이 $f'(-1)$ 인걸 쓸까..
=> 둘 다 된다! 사실 두 개가 똑같은 방법임.
겁먹지 말고 아무거나 우선 도전해볼 것.

<풀이 시작>

step i) Point 1.

사실 $f(x)$ 식을 다 정리해버렸고, 그만큼 저 식 정리가 이 문제의 핵심이었단 것.

$f(x)=(x+1)x(x-1)(x-2)+mx+f(0)$로 정리 끝~

step ii) Point 2.

접방에 $(k, 0)$ 대입 방법을 많이 했을 것 같으니, 나는 평균변화율과 순간변화율이 같은 해설로 써주겠다.

두 점 $(-1, f(-1)), (k, 0)$ 사이의 평균변화율$=\dfrac{-f(-1)}{k+1}$

두 점 $(2, f(2)), (k, 0)$ 사이의 평균변화율$=\dfrac{-f(2)}{k-2}$ 이므로

$f'(-1)=\dfrac{-f(-1)}{k+1}$, $f'(2)=\dfrac{-f(2)}{k-2}$이다.

$f(x)=(x+1)x(x-1)(x-2)+mx+f(0)$로부터 각각 $f'(-1), f(-1), f'(-2), f(-2)$를 구하여 두 식에 대입해주면 $(m-6)(k+1)=m-f(0)$, $(m+6)(k-2)=-2m-f(0)$ 이고, 두 번째 식을 마저 정리해주면

$mk-6k-6=-f(0)$, $mk+6k-12=-f(0)$이다.

따라서 $-6k-6=6k-12$, $k=\dfrac{1}{2}$이다.

또한 문제 조건에 의하여 $f(2k)=20=f(1)=m+f(0)$이므로

$mk-6k-6=-f(0) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}m-9=-f(0)$과 연립해주면 $m=22$, $f(0)=-2$ 이다.

따라서 $f(x)=(x+1)x(x-1)(x-2)+22x-2$ 이고, $f(4k)=f(2)=42$이다.