가 형

이정환 공개자료 (97제)

문항수를 조금 더 늘렸습니다.
9월 모의 이후에도 지속적인 학습효과를
얻을 수 있을 것이므로 열심히 풀어보세요.
많은 도움이 될 것입니다.

-이정환-

〈목차〉

수특, 수완변형

▷ 수특 미2 Ch4 Lv2 3번 변형

1. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?[1)]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4+5x^2}=1$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(\sin 2x+\tan 2x)(1-\cos 2x)}=2$

① 9　② 11　③ 13　④ 15　⑤ 17

▷ 수특 미2 Ch6 Lv2 3번 변형

2. 함수 $f(x)=2x^2-6ax-4a^2\ln x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나도록 하는 양수 a의 최솟값은? 2)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{2e}$ ③ $\frac{1}{3e}$ ④ $\frac{1}{4e}$ ⑤ $\frac{1}{5e}$

▷ 수특 미2 Ch7 Lv2 3번 변형

3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$e^{\frac{x}{2}}-1+\int_0^x xf(t)\,dt=ax+\int_0^x tf(t)dt$$

를 만족시킬 때, $a\times f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) 3)

① $-\frac{e}{8}$ ② $-\frac{e}{4}$ ③ $-\frac{e}{2}$ ④ $-e$ ⑤ $-2e$

▷ 수특 미2 Ch8 Lv3 1번 변형

4. 양의 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le \frac{1}{2}$일 때, $f(x) = -\ln(2x) + \frac{1}{2}$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x) = f^{-1}(x)$이다.

함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? 4)

① $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ② $1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$
④ $1 + \frac{1}{\sqrt{e}}$ ⑤ $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$

▷ 수특 확통 Ch1 Lv3 2번 변형

5. 바나나 우유 4개, 딸기 우유 2개, 초코 우유 1개, 흰 우유 1개를 4개의 서로 다른 주머니 A, B, C, D에 2개씩 넣으려고 한다. 같은 종류의 우유끼리는 서로 구분이 되지 않는다고 할 때, 바나나 우유가 2개 들어가는 주머니가 1개, 1개 들어가는 주머니가 2개인 경우의 수를 구하시오. 5)

▷수특 미2 Ch2 Lv3 4번 변형

6. 함수 $f(x)=kx^2\ln x$에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(2)-f(2)$의 값을 구하시오. (단, k는 0이 아닌 상수이다.) 6)

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\lim_{x\to-1}\frac{x^{2n+1}+1}{f(x+2)}$이다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=4$이다.

▷수특 미2 Ch7 Lv3 2번 변형

7. 정의역이 $\{x|x>0\}$인 미분가능한 함수 $f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 증가한다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 모든 양의 실수 x에 대하여 $\int_2^{f(x)}g(t)\,dt=\int_2^{x}2t^2dt$일 때, $f(4)$의 값은? 7)

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

▷ 수특 확통 Ch2 Lv2 2번 변형

8. 50점 만점인 어느 수학 시험에서 출제된 15문항은 3점짜리 문항 10개, 4점짜리 문항 5개로 구성되어 있다. 어느 학생이 이 수학 시험에서 12문항을 맞힐 때, 얻은 점수가 39점 이하가 되도록 답안지를 작성하는 경우의 수는? 8)

① 30 ② 50 ③ 70 ④ 90 ⑤ 110

▷ 수특 확통 Ch5 Lv3 1번 변형

9. 흰 공 2개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 A, B, C 세 사람이 차례로 임의로 한 개씩 공을 꺼낸다. A가 검은 공을 꺼냈을 때, 세 사람이 꺼낸 공 중에서 검은 공을 2개 꺼낼 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) 9)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

▷ 수특 확통 Ch5 Lv2 8번 변형

10. 좌표평면 위에 원점 O에서 출발한 점 P를 다음 규칙에 따라 움직인다.

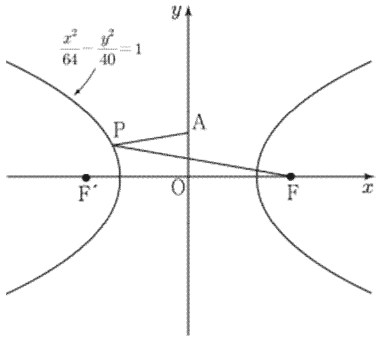
한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 움직이고 뒷면이 나오면 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 움직인다.

한 개의 동전을 4번 던져서 점 P가 도착한 점을 X라 할 때, $\overline{\mathrm{OX}} \geq 2\sqrt{10}$ 일 확률은? 10)

① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

▷수특 기벡 Ch1 Lv3 7번 변형

11. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{40}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 하자. 점 A(0, 5)와 이 쌍곡선 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}$의 최솟값은? 11)



① $\sqrt{129}$ ② $\sqrt{129}+8$ ③ $\sqrt{129}+16$
④ $\sqrt{142}+8$ ⑤ $\sqrt{142}+16$

▷수특 기벡 Ch3 Lv2 2번 변형

12. 그림과 같이 $\overline{AB} : \overline{AD} = 3 : 4$인 직사각형 ABCD와 평면 ABCD 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{DC}|$의 값은?12)

(가) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD}$
(나) 직사각형 ABCD의 넓이는 12이다.

① $3\sqrt{2}$ ② 5 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 6 ⑤ $5\sqrt{2}$

▷수특 기벡 Ch8 Lv3 3번 변형

13. 좌표공간에서 점 P는 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 위를 움직이고, 점 A$(0,\ 4,\ 0)$에 대하여 점 Q는

$$|\overrightarrow{AQ}| = 2,\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AQ} = 4$$

를 만족시키며 움직인다. z축 위의 점 B$(0,\ 0,\ k)$에 대하여 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BP}$의 최댓값이 $3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$일 때, 양수 k의 값은? (단, O는 원점이다)13)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

▷ 수특 미2 Ch3 Lv2 4번 변형

14. 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P_n이 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 출발하여 반시계 방향으로 움직이고 있다. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $\sin\theta=\frac{4}{5}$를 만족시키는 θ에 대하여 점 P_n이 움직인 거리가 $\frac{n\pi}{2}+\theta$일 때, 점 P_n의 x좌표를 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? 14)

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ 1

▷ 수특 미2 Ch3 Lv2 3번 변형

15. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수

$y=2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\sin^2 x+5\cos 4x$가 $x=a$에서 최솟값 m을 갖는다. $a\times m$의 값은? 15)

① $-\pi$　② $-\frac{3}{4}\pi$　③ $-\frac{1}{2}\pi$　④ $-\frac{1}{4}\pi$　⑤ 0

▷ 수특 미2 Ch5 Lv3 2번 변형

16. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$이다.
> (나) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-2}{x^2-x-2} = 1$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $x^2 g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수를 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 16)

▷ 수특 확통 Ch2 Lv2 8번 변형

17. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. 17)

> (가) $f(1)f(5)=8$
> (나) $f(2) \geq f(3) \geq f(4) > f(5)$

▷ 수특 확통 Ch7 Lv2 2번 변형

18. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ 1)$을 따르고 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 실수 k에 대하여 $f(80+k)=f(80-k)$
(나) $2\mathrm{P}(a-3 \le X \le a)+\mathrm{P}(a+3 \le X \le a+4)$
$=\mathrm{P}(77 \le X \le b)$
(다) $\mathrm{P}(77 \le X \le b)=\mathrm{P}(0 \le Z \le c)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 4)$

세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) 18)

① 167 ② 166 ③ 165 ④ 164 ⑤ 163

▷ 수특 확통 Ch8 Lv3 2번 변형

19. 어느 산부인과에서 16주에서 25주 사이의 태아는 초음파 검사를 통하여 성장을 검사하는데 태아의 머리의 직경은 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 산부인과에서 16주에서 25주 사이의 태아 중 임의추출한 n명의 태아의 머리의 직경을 조사한 표본평균을 $\overline{X}$ 라 할 때, $\left|\overline{X}-m\right| \le 0.28\sigma$일 확률이 0.95이상이 되도록 하는 n의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 길이의 단위는 mm이다.) 19)

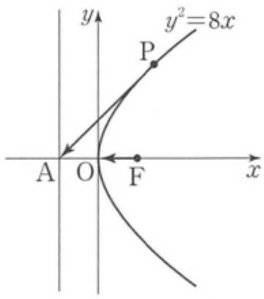
<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.49	0.1879
0.98	0.3365
1.47	0.4292
1.96	0.4750

① 16 ② 25 ③ 36 ④ 49 ⑤ 64

▷수특 기벡 Ch3 Lv2 3번 변형

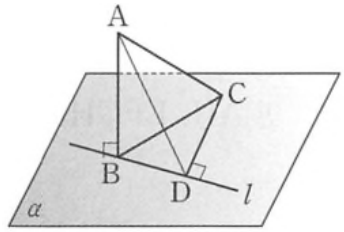
20. 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$의 준선이 x축과 만나는 점을 A라 하자. 이 포물선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{PA}|=4\sqrt{7}$일 때, $|\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{FO}|$의 값은? (단, O는 원점이다.)[20]



① $\sqrt{62}$ ② 8 ③ $\sqrt{66}$ ④ $2\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{70}$

▷수특 기벡 Ch6 Lv2 3번 변형

21. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC에서 꼭짓점 B는 평면 α 위에 놓여 있고 직선 AB는 평면 α와 수직이다. 평면 α 위에 놓여있고 점 B를 지나는 직선 l에 대하여 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 D라 할 때, $\overline{CD}=4$이다. 사면체 ABDC의 부피는?[21]



① $2\sqrt{35}$ ② $\sqrt{145}$ ③ $\sqrt{150}$ ④ $\sqrt{155}$ ⑤ $4\sqrt{10}$

▷수특 기벡 Ch7 Lv3 3번 변형

22. 좌표공간에서 중심이 $\mathrm{A}(a,\ 3,\ a)$이고 zx평면에 접하는 구 C에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(p,\ q,\ r)$가 나타내는 도형을 L이라 하자.

반지름의 길이가 6이고 중심의 y좌표가 음수인 구 S가 zx평면과 점 P에서 접해 있고, 두 구 C, S의 중심 사이의 거리는 15이다.

$p \geq 0$, $r \geq 0$일 때의 점 P가 나타내는 도형을 L'이라 하자. L'의 길이가 L의 길이의 $\frac{5}{12}$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.[22)]

▷ 수특 확통 Ch6 Lv2 2번 변형

23. 주머니 속에 10, 15, 20, 25의 자연수가 하나씩 적혀 있는 카드가 각각 2장씩 8장 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낼 때 다음과 같은 규칙으로 확률변수 X의 값을 정한다.

꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 같으면 2장의 카드에 적혀 있는 수의 합을 확률변수 X의 값으로 하고, 다르면 2장의 카드에 적혀 있는 수 중에서 작은 수를 확률변수 X의 값으로 정한다.

$\mathrm{P}(20 \leq X \leq 30)$의 값은? [23)]

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{9}{14}$

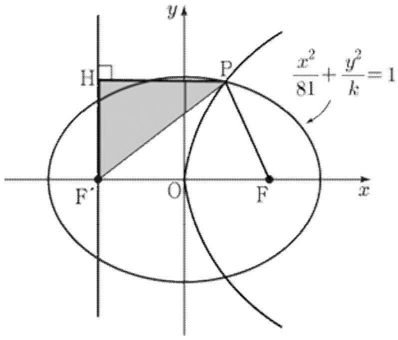
▷ 수특 확통 Ch7 Lv3 1번 변형

24. 확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(X \geq a) = 0.0808$이다. 확률변수 Y가 평균이 $3m+6$, 표준편차가 3σ인 정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(Y \geq 3a+24) = 0.0548$이다. σ의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, a는 상수이다.) 24)

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.2	0.3849
1.4	0.4192
1.6	0.4452
1.8	0.4641

▷수특 기벡 Ch1 Lv2 6번 변형

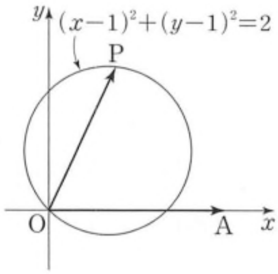
25. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{k}=1$ $(0<k<100)$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하자. 초점이 F이고 꼭짓점이 원점 O인 포물선이 이 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P, 점 F'을 지나고 x축에 수직인 직선을 l, 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{PH}}=8$일 때, 삼각형 PHF'의 넓이는? 25)



① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

▷수특 기벡 Ch3 Lv3 3번 변형

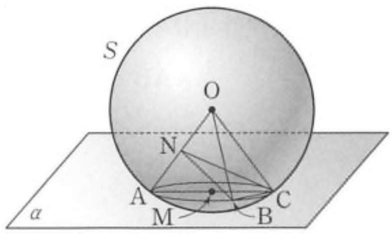
26. 그림과 같이 좌표평면에서 점 A(4, 0)과 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 위의 점 P에 대하여 $\left|\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OA}\right|$의 최댓값과 최솟값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [26)]



① 76 ② 78 ③ 80 ④ 82 ⑤ 84

▷수특 기벡 Ch6 Lv3 3번 변형

27. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 5인 구 S와 평면 α가 만나서 생기는 도형 T는 중심이 M인 원이고, 점 M과 구 S 위의 점 사이의 거리의 최댓값은 9이다. 원 T 위의 세 점 A, B, C에 대하여 선분 AC의 중점이 M이고 $\overline{BC}=2$이다. 선분 OA의 중점을 N이라 할 때, 삼각형 NBC의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이는? [27)]



① $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

▷수특 기벡 Ch9 Lv3 3번 변형

28. 좌표공간의 점 P$(1,\ 1,\ 0)$에서 xy평면에 접하고 반지름의 길이가 6인 구 S 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $\alpha : 2x+y-2z+21=0$에 내린 수선의 발을 각각 P$'$, Q$'$이라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}|$의 최댓값을 $p+q\sqrt{5}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 구 S의 중심의 z좌표는 0보다 크고, p와 q는 정수이다.)[28)]

▷ 수능완성 3단원 3번 변형

29. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x+3}$라 할 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(-x)$이다. (나) $f(\pi)=2,\ f'(\pi)=1$

$g'(-\pi)$의 값은? [29)]

① $-\dfrac{1}{9}$ ② $-\dfrac{2}{9}$ ③ $-\dfrac{1}{3}$ ④ $-\dfrac{4}{9}$ ⑤ $-\dfrac{5}{9}$

▷ 수능완성 4단원 5번 변형

30. 함수 $f(x)=2xe^{x}$과 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

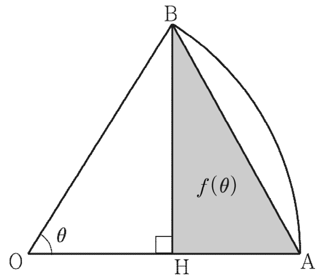
$$g'(x)=3x^2 f'(x^3+2)$$

를 만족시키고, $g(0)=6e^2$일 때, $g(1)$의 값은? 30)

① $2e^2(3e+1)$ ② $2e^2(3e+2)$ ③ $2e^2(3e-1)$
④ $2e^2(3e-2)$ ⑤ $2e^2(4e-1)$

▷ 수능완성 2단원 28번 변형

31. 그림과 같이 둘레의 길이가 20이고, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB의 점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 삼각형 BHA의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) 31)



① 25 ② 50 ③ 75 ④ 100 ⑤ 125

▷ 수능완성 5단원 7번 변형

32. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수는?[32]

(가) $f(1)+f(3)=10$
(나) 함수 f는 일대일함수이다.

① 60 ② 120 ③ 180 ④ 240 ⑤ 300

▷ 수능완성 5단원 26번 변형

33. $(a+b+c-d)^5$의 전개식에서 a와 c를 모두 인수로 가지고 계수가 양수인 서로 다른 항의 개수는?[33]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

▷ 수능완성 6단원 5번 변형

34. 어느 학교 1학년은 1반부터 7반까지 7개의 학급이 있고, 각 학급의 교실은 그림과 같이 한 층에 일렬로 나열되어 있다.

1반	2반	3반	4반	5반	6반	7반

이 학교 1학년 학생으로 새로 전학 온 3명의 학생을 7개의 학급 중에서 임의로 택한 서로 다른 3개의 학급에 1명씩 배정할 때, 어떤 2명의 학생도 서로 이웃한 교실의 학급에 배정되지 않을 확률은?34)

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

▷ 수능완성 7단원 11번 변형

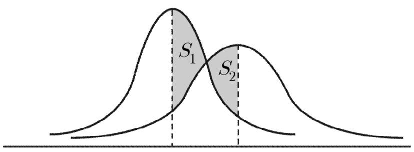
35. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다.
$\mathrm{P}(X \le 5) = \mathrm{P}(X \ge 19)$, $\mathrm{P}(12 \le X \le 19) = 0.24$일 때, $\mathrm{P}(X \ge 5)$의 값은? 35)

① 0.5 ② 0.62 ③ 0.74 ④ 0.86 ⑤ 0.98

▷ 수능완성 실전모의고사 4회 18번 변형

36. 두 확률변수 X와 Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$, $\mathrm{N}(2m, 4\sigma^2)$을 따른다. 그림과 같이 $m \le x \le 2m$인 범위에서 두 확률변수의 정규분포곡선과 직선 $x=m$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 정규분포곡선과 직선 $x=2m$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.

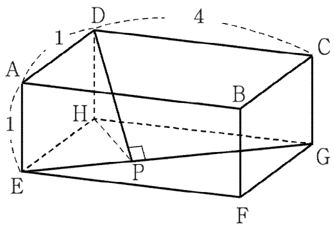
$\mathrm{P}\left(\frac{m}{2} \le X \le 2m\right) = 0.5274$, $\mathrm{P}(2m \le Y \le 3m) = 0.1630$일 때, $S_1 - S_2$의 값은? (단, $m > 0$) 36)



① 0.0284 ② 0.1099 ③ 0.2014 ④ 0.3644 ⑤ 0.4459

▷ 수능완성 10단원 9번 변형

37. 그림과 같이 모서리 AB, AD, AE의 길이가 각각 4, 1, 1인 직육면체 ABCD－EFGH가 있다. 꼭짓점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 P라 할 때, 선분 DP의 길이를 l이라 하자. l^2의 값은? 37)



① $\frac{37}{17}$ ② $\frac{35}{17}$ ③ $\frac{33}{17}$ ④ $\frac{31}{17}$ ⑤ $\frac{29}{17}$

▷ 수능완성 4단원 17번 변형

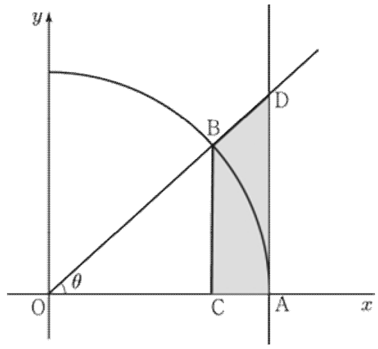
38. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. 세 함수 $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x^2-2x$이다.
(나) $\int_0^2 \{g(x)\}^2 f'(x)dx=-8$

$\int_0^2 (x-1)g(x)dx=k$일 때, $4k^2$의 값을 구하시오. 38)

▷ 수능완성 2단원 26번 변형

39. 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(2,0)$과 좌표평면의 제1사분면에서 원 $x^2+y^2=4$ 위를 움직이는 점 B에 대하여 $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 하자. 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 직선 OB와 직선 $x=2$가 만나는 점을 D라 하고 사각형 BCAD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, O는 원점이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.) 39)



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

▷ 수능완성 실전모의고사 1회 25번 변형

40. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $3\sin x\cos x - 1 = 3\cos x - \sin x$의 모든 실근의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 40)

▷ 수능완성 6단원 16번 변형

41. 30개의 공에 각각 숫자 1, 2, 3, 4 중 한 개의 숫자가 적혀 있다. 이 30개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, k $(k=1, 2, 3, 4)$가 적힌 공이 나올 확률을 P_k라 하자. P_k가

$$\mathrm{P}_{k+1} = 2\mathrm{P}_k \ (k=1, 2, 3)$$

을 만족시킨다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 두 공에 적힌 수의 합이 5일 확률은? 41)

① $\frac{21}{145}$ ② $\frac{64}{435}$ ③ $\frac{13}{87}$ ④ $\frac{22}{145}$ ⑤ $\frac{67}{435}$

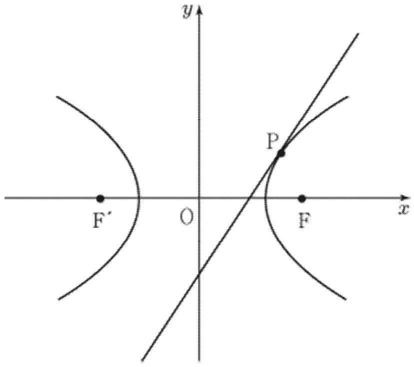
▷ 수능완성 7단원 30번 변형

42. 이동전화 가입자의 월 데이터 사용량은 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이동전화 가입자 중 144명을 임의추출하여 구한 월 데이터 사용량의 표본평균이 $\overline{x}$이고, 이 결과를 이용하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간을 구하면 $4070.4 \leq m \leq 4109.6$이다. $\overline{x}+\sigma$의 값은? (단, 단위는 MB이고 Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.475$로 계산한다.) 42)

① 4180 ② 4190 ③ 4200 ④ 4210 ⑤ 4220

▷ 수능완성 실전모의고사 1회 28번 변형

43. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(2, 0)$, $\mathrm{F}'(-2, 0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(p, q)$에서의 접선과 x축과의 교점이 선분 FF′를 3 : 1로 내분하고, $p = a^2$을 만족시킨다. $\overline{\mathrm{PO}}^2 + \overline{\mathrm{PF}}^2 = 8$일 때, 선분 PF′의 길이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면에 있는 점이고, O는 원점이다.) 43) 수정예정

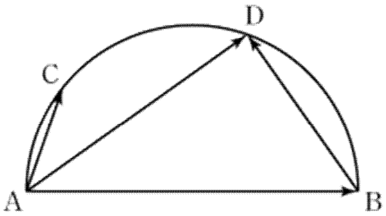


▷ 수능완성 9단원 5번 변형

44. 그림과 같이 지름 AB의 길이가 8인 반원이 있다. 호 AB 위의 서로 다른 두 점 C, D가

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

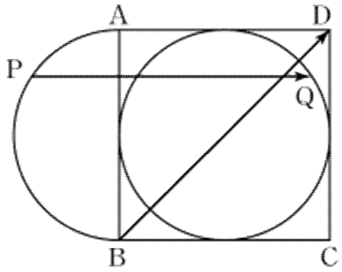
를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{BD}|$의 값은? 44)



① $\sqrt{6}$　② $2\sqrt{6}$　③ $\sqrt{7}$　④ $2\sqrt{7}$　⑤ $2\sqrt{2}$

▷ 수능완성 9단원 15번 변형

45. 그림과 같이 한 평면 위에 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD와 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P와 정사각형 ABCD에 내접하는 원 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은? (단, 점 P는 정사각형 ABCD의 외부에 있다.) 45)



① $4+8\sqrt{2}$　② $8+4\sqrt{2}$　③ $8+8\sqrt{2}$
④ $8+16\sqrt{2}$　⑤ $16+8\sqrt{2}$

▷ 수능완성 9단원 20번 변형

46. 좌표평면 위의 두 점 $A(-1,\ -1)$, $B(3,2)$에 대하여

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=0$$

을 만족시키는 서로 다른 두 점 P를 각각 P_1, P_2라 할 때, $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$의 값은? (단, O는 원점이다.) 46)

① $\dfrac{\sqrt{203}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{313}}{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{417}}{5}$
④ $\dfrac{\sqrt{504}}{5}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{619}}{5}$

▷ 수능완성 11단원 11번 변형

47. 좌표공간에 두 점 $A(3,\ -1,\ 2)$, $B(5,\ 3,\ 4)$가 있다. 구 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$의 중심을 C라 하고, 구 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BP}$가 최대가 될 때 점 P의 좌표는 $(a,\ b,\ c)$이다. $a-b+c$의 값은? 47)

① $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ ② $\dfrac{3\sqrt{14}}{7}$ ③ $\dfrac{6\sqrt{14}}{7}$
④ $\dfrac{9\sqrt{14}}{7}$ ⑤ $\dfrac{12\sqrt{14}}{7}$

▷ 수능완성 11단원 23번 변형

48. 좌표공간에서 두 구 $x^2+y^2+z^2=1$, $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$가 만나서 생기는 원을 포함하는 평면을 α라 하자. 평면 α와 zx평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? 48)

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{3}$

▷ 수능완성 실전모의고사 3회 29번 변형

49. 좌표공간에 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}=5$, $\overline{\mathrm{CD}}=8$인 사면체 ABCD가 있다. 선분 CD의 중점을 M이라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 구 S가 있다.

(가) 구 S의 중심은 평면 ABM위의 점이고, 사면체 ABCD의 외부에 있다.
(나) 구 S는 두 평면 ACD, BCD와 선분 AB에 동시에 접한다.

구 S위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 최솟값은 $p+q\sqrt{2}$이다. $|p+q|$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) 49)

▷ 수능완성 1단원 8번 변형

50. 자연수 a에 대하여 함수 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(ax-1)+2$의 그래프와 직선 $x=n$이 제1사분면에서 만나도록 하는 모든 자연수 n의 개수가 2개일 때, a의 값은? 50)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

▷ 수능완성 실전모의고사 2회 13번 변형

51. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $f(x)$가 $g(x)$의 역함수이고 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=2$이다. 함수 $h(x)=f(g(3x))$라 할 때, $h'(1)$의 값은? 51)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

▷ 수능완성 2단원 24번 변형

52. 일차함수 $f(x)$와 $x>-1$에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} a & (x \geq 0) \\ \dfrac{f(x)}{\ln(1+x)} & (-1<x<0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\{f(x)\}^2}{\cos 2x - \cos x} = -24$
(나) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

상수 a에 대하여 $f(a)$의 값을 구하시오. (단, $f(1)>0$) 52)

▷ 수능완성 6단원 9번 변형

53. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중에서 임의로 택한 함수 f가

$$f(1) \leq f(2) < f(3) \leq f(4) < f(5)$$

를 만족시킬 확률은? 53)

① $\dfrac{19}{625}$ ② $\dfrac{4}{125}$ ③ $\dfrac{21}{625}$ ④ $\dfrac{22}{625}$ ⑤ $\dfrac{23}{625}$

▷ 수능완성 6단원 34번 변형

54. 좌표평면 위의 점 P가 원점을 출발하여 다음과 같은 규칙에 따라 이동한다.

> 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수이면 x축의 양의 방향으로 1만큼, 6의 약수가 아니면 y축 방향으로 1만큼 평행이동한다.

한 개의 주사위를 3번 던져서 점 P를 이동시켰을 때, 점 P가 곡선 $y=(x-2)^2+1$ 위에 있을 확률은? 54)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

▷ 수능완성 7단원 14번 변형

55. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 2^2)$을 따른다. 실수 t에 대하여 함수 $H(t)=\mathrm{P}(t \le X \le t+2)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 55)

〈보 기〉

ㄱ. $H(17)=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

ㄴ. $H(12)=H(16)$

ㄷ. 모든 실수 t에 대하여 $H(13-t)=H(13+t)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

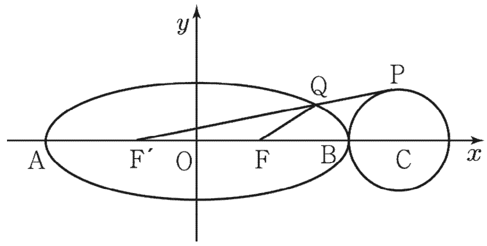
▷ 수능완성 7단원 8번 변형

56. 정육면체 모양의 주사위 1개를 던져서 나온 눈의 수 a에 대하여 좌표평면 위에 직선 $y=2ax$를 그리는 시행을 한다. 이 시행을 200번 반복할 때, 직선 $y=2ax$가 곡선 $y=x^2+4x+4$과 서로 다른 두 점에서 만나도록 그려지는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(3X+1)$의 값은? 56)

① 100 ② 200 ③ 300 ④ 400 ⑤ 500

▷ 수능완성 8단원 13번 변형

57. 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\,0)$, $\mathrm{F}'(-c,\,0)$ $(c>0)$, 타원이 x축과 만나는 점 중에서 x좌표가 음수인 점을 A, 양수인 점을 B라 하자. 점 F'에서 x축 위의 점 C를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원에 접선을 그을 때 접점을 P, 선분 PF'이 타원과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{AF}}=6$, $\overline{\mathrm{FC}}=8$, $\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QP}}$일 때, 장축의 길이를 $p\sqrt{15}-q$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $a>0$, $b>0$이고, 점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.) 57)

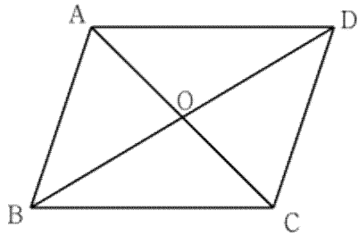


▷ 수능완성 9단원 11번 변형

58. 그림과 같이 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{17}$ 인 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라 할 때,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-4$$

이다. 평행사변형 ABCD의 넓이는? 58)



① 12 ② $12\sqrt{3}$ ③ 16 ④ $16\sqrt{3}$ ⑤ 20

▷ 수능완성 11단원 30번 변형

59. 좌표공간의 두 점 A(1, 1, 4), B(1, 2, 2)에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형을 S라 하자. 도형 S와 평면 $2x-2y+z+k=0$이 만나도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? (단, O는 원점이다.) 59)

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

▷ 수능완성 실전모의고사 1회 29번 변형

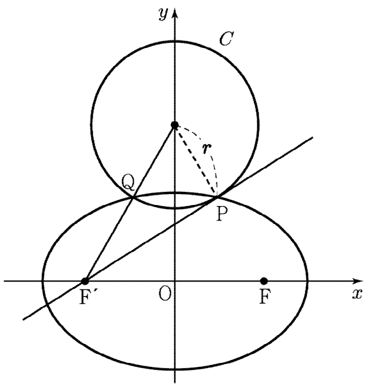
60. 좌표공간 위에 직선 l을 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있고, 직선 l 위에 있지 않은 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 B라 하자. 직선 l 위에 있고 점 B가 아닌 점 H에서 평면 α가 반지름의 길이가 3인 구와 접한다. $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BH}}=6$일 때, 구 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $a+b\sqrt{61}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) 60)

New Contents

61. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=e-1$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $g(t)=2t^2-2t^3e^{t^2}$을 만족시킨다. $\int_0^1 f(t)dt$의 값은? [4점] 61)

① $\frac{e}{4}-\frac{1}{3}$ ② $\frac{e}{4}-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{e}{3}-\frac{1}{3}$
④ $\frac{e}{3}-\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{e}{2}-\frac{2}{3}$

62. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 F′P와 점 P에서 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 원 C와 타원이 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 할 때, 직선 F′Q는 원 C의 중심을 지난다. 원 C의 반지름 r의 길이를 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{F'P}}>\overline{\mathrm{FP}}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 62)

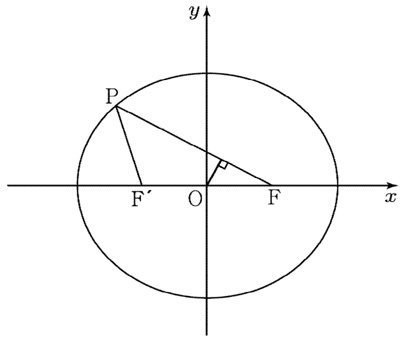


63. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=2$인 이등변삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 서로 다른 ∠ABC의 값은 α 또는 β이다. $\tan^2(\alpha-\beta)$의 값은? (단, $\alpha>\beta$) [4점] 63)

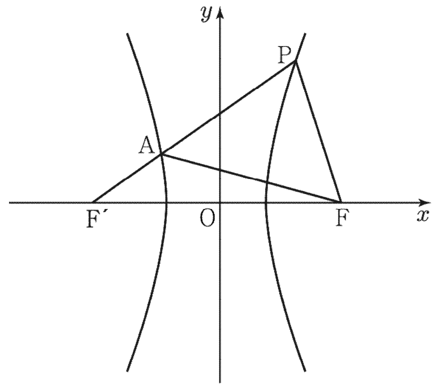
선분 AB 위의 점 P와 선분 BC 위의 점 Q에 대하여 직선 AB와 PQ가 수직일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값은 $\sqrt{3}$이다.

① $\frac{3}{25}$ ② $\frac{6}{25}$ ③ $\frac{9}{25}$ ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

64. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\,0)$, $\mathrm{F}'(-c,\,0)\,(c>0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{60}=1$ 위의 점 P에 대하여 원점 O에서 직선 PF에 내린 수선의 발이 선분 PF를 $2:1$로 내분할 때, 점 O와 직선 PF 사이의 거리를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. (단, P는 제 2사분면 위의 점이다.) [4점] [64)]



65. 그림과 같이 초점이 $\mathrm{F}(5,\,0)$, $\mathrm{F}'(-5,\,0)$인 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 삼각형 PFF′가 $\overline{\mathrm{FF}'}=\overline{\mathrm{PF}'}$인 이등변삼각형이고 선분 PF′와 쌍곡선의 점 P가 아닌 교점을 A라 할 때 삼각형 PAF는 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}}$인 이등변삼각형이다. 삼각형 AFF′의 둘레의 길이가 22일 때 삼각형 PFF′의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점] [65)]



66. 자연수 k에 대하여 다음은 1부터 $6k+3$까지의 자연수가 적혀있는 카드 중 2장을 뽑은 후 각각의 카드에 적혀있는 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수를 구하는 과정이다.

> 두 수의 합이 3으로 나누어떨어지는 경우는
> (i) 두 수가 모두 3으로 나누어떨어지는 경우와
> (ii) 두 수를 3으로 나누었을 때의 나머지가 각각 1, 2인 경우로 두 가지 이다.
>
> (i)의 경우:
>
> 3으로 나누어떨어지는 두 수를 뽑으려면 3으로 나누어떨어지는 수 중 임의로 2개를 고르는 경우의 수와 같으므로 $\boxed{\text{(가)}}$ 가지이다.
>
> (ii)의 경우:
>
> 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수와 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수를 뽑는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 가지이다.
>
> (i), (ii)의 결과로부터 구하고자 하는 총 경우의 수는
>
> ⋮

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\frac{g(4)}{f(3)}$의 값은? [4점] 66)

① $\frac{23}{7}$ ② $\frac{25}{7}$ ③ $\frac{27}{7}$ ④ $\frac{23}{9}$ ⑤ $\frac{25}{9}$

67. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수의 개수를 구하시오. 67)

> (가) 네 자리의 홀수이다.
> (나) 각 자릿수의 합은 10이다.
> (다) 각 자릿수 중 일의 자릿수가 가장 크다.

68. 좌표평면에서 곡선 $y=a^x(a>1)$ 위의 한 점 P와 두 점 O$(0,0)$, A$(8,0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAP가 정삼각형일 때, a^8의 값은? 68)

① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

69. $x>0$에서 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{f'(x)}{x}$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)+g(3-x)=2$
(나) $\int_1^2 xg(x)dx=4$

$\int_1^2 \dfrac{f(x)}{x^2}dx=5$일 때, $f(2)$의 값은? 69)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

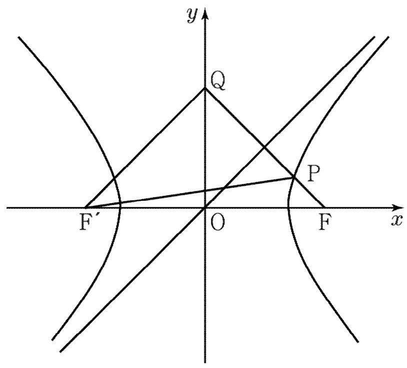
70. 두 이산확률변수 X와 Y가 가지는 값이 각각 1부터 3까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{3k}\mathrm{P}(X=k)+\frac{k}{8}\quad(k=1,\,2,\,3)$$

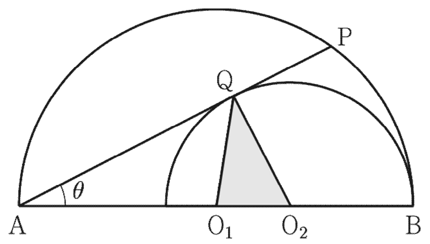
이다. $\mathrm{E}(Y)$의 값은? 70)

① 2 ② $\frac{25}{12}$ ③ $\frac{13}{6}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

71. 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-y^2=k^2$ $(k>0)$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 점 F를 지나고 기울기가 양수인 쌍곡선의 점근선에 수직인 직선이 쌍곡선과 만나는 점을 점 P라 하고, y축과 만나는 점을 각각 Q라 하자. 삼각형 PQF′의 둘레가 24일 때, 삼각형 PQF′의 넓이를 구하시오. (단, 점 F의 x좌표와 점 P의 y좌표는 양수이다.) 71)



72. 그림과 같이 중심이 O_1이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P와 선분 AB 위의 점 O_2에 대하여 중심이 O_2이고 지름이 선분 AB 위에 있는 반원이 점 B를 지나고 선분 AP와 점 Q에서 접한다. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 삼각형 $\mathrm{O_1O_2Q}$의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) 72)



① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

73. 집합 $X=\{2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f는 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다. $f(3)f(5)$의 값이 홀수일 때, 함수 f의 개수는? 73)

① 22　② 24　③ 26　④ 28　⑤ 30

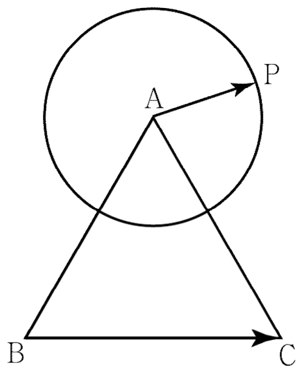
74. 좌표공간에 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 구 S와 점 O와의 거리가 1인 평면 α가 있다. 구 S와 평면 α가 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C의 중심을 A, 점 A와 거리가 $2\sqrt{3}$인 평면 α 위의 한 점을 B라 하자. 선분 AB와 원 C가 만나는 점을 Q라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 값은? [74]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

75. 서로 같은 연필 4자루와 서로 다른 볼펜 5개를 A, B, C 세 사람이 남김 없이 나누어 가지려고 한다. A, B, C 세 사람이 각각 갖게 되는 연필과 볼펜의 개수의 합이 모두 홀수가 되도록 하는 경우의 수는? (단, 연필을 받지 못하는 사람은 없다.) [75]

① 174 ② 177 ③ 180 ④ 183 ⑤ 186

76. 그림과 같이 한 평면 위에 한 변의 길이가 8인 정삼각형 ABC와 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원 C가 있다. 원 C 위의 점 P에 대하여 점 Q는 $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$를 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$의 최댓값은? 76)



① $16\sqrt{3}+12$ ② $12\sqrt{3}+12$ ③ $9\sqrt{3}+12$
④ $16\sqrt{3}$ ⑤ $12\sqrt{3}+16$

77. 두 함수

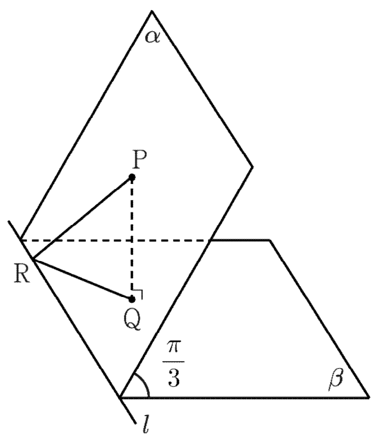
$$f(x)=xe^{-x},\ g(x)=k\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

가 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,dt<\int_{x_1}^{x_2}g(t)\,dt$를 만족시키도록 하는 실수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은? 77)

① 1 ② $\sqrt{e}$ ③ e ④ e^2 ⑤ e^3

78. 그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 두 평면 α, β가 있다. 평면 α 위의 점 P에 대하여 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 직선 l 위의 점 R에 대하여 세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 PQR의 넓이는? 78)

(가) $\overline{PQ}=4\sqrt{3}$
(나) 평면 PQR와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$이다.



① $6\sqrt{3}$ ② 12 ③ 18 ④ $8\sqrt{6}$ ⑤ 24

79. 함수 $f(x)=(x^2+1)e^{x+1}$과 실수 전체 집합에서 감소하는 삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<k) \\ g(x) & (x \geq k) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 미분가능하고, $h(0)=0$일 때, $g(3k)$의 값을 구하시오. 79)

80. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=2$이다. 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{x}{f(x)} \le \frac{1}{2}$$

일 때, $f'(1)$의 값은? 80)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

81. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-9}{x}=6$

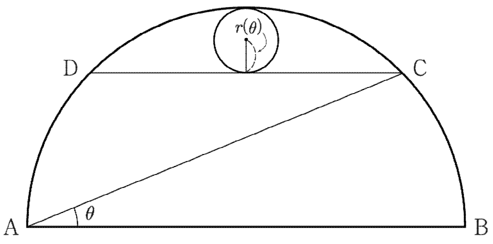
(나) $f'(x)=2\cos x(\sin x+1)\sqrt{\sin^2 x+2\sin x+a}$

(단, a는 상수이다.)

$f\left(\dfrac{a\pi}{3}\right)$의 값은? 81)

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

82. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 C에 대하여 점 C를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 반원과 만나는 점 중 점 C가 아닌 점을 D라 하자. ∠BAC$=\theta$일 때, 선분 CD의 중점 M에서 선분 CD와 접하고 반원의 호 AB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{r(\theta)}{\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) 82)

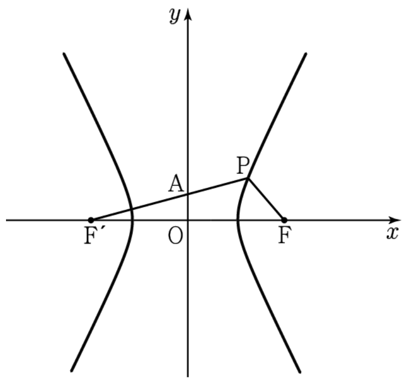


① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

83. 어느 공장에서 두 종류의 자전거 프레임 A, B를 생산하고 있다. A의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 B의 무게는 평균이 $2m$, 표준편차가 2σ인 정규분포를 따른다. A의 무게가 $m-5$ 이하일 확률이 0.1587이고 A의 무게가 $m+5$ 이상일 확률과 B의 무게가 $m+5$ 이하일 확률이 서로 같을 때, $m+\sigma$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, 무게의 단위는 g이다.) 83)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

84. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$이고 주축의 길이가 $2a\,(a>0)$인 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 선분 PF′이 y축과 만나는 점을 A라 하자. $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}}=2$, $\angle \mathrm{PF'F}=\dfrac{\pi}{12}$일 때, a^2의 값은? (단, P는 제1사분면 위의 점이고 c는 양수이다.) 84)



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

85. 한 변의 길이가 6인 정사면체 OABC와 삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여 정사면체 위의 점 P가

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \le \sqrt{13}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 16$$

를 만족시킬 때, 점 P가 나타내는 도형 전체의 길이는? 85)

① 3 ② $3\sqrt{2}$ ③ 6 ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ 12

86. 자연수 n에 대하여 $x>0$에서 정의된 함수

$f(x)=\dfrac{x^2}{n}+x$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g'\left(\frac{k^2}{n}+k\right)$의 값은? 86)

① $\frac{1}{2}\ln 3$ ② $\frac{1}{2}\ln 6$ ③ $\frac{1}{2}\ln 9$
④ $\ln 3$ ⑤ $\ln 6$

87. 경호와 우현이가 여섯 번의 게임을 한다. 첫 번째 게임부터 다섯 번째 게임까지는 이기는 사람이 1점씩을 얻고 여섯 번째 게임에서는 이기는 사람이 2점을 얻는다. 여섯 번의 게임을 할 때, 경호가 우현이보다 1점이 높을 확률은? (단, 경호와 우현이가 각 게임에서 이길 확률은 같고, 비기는 경우는 없다.) 87)

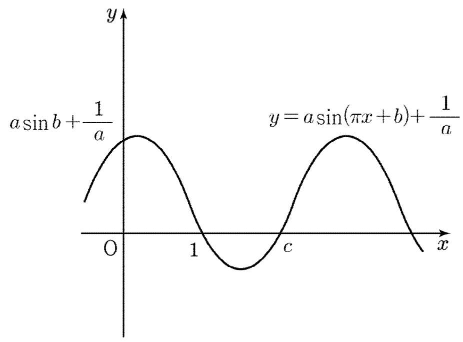
① $\frac{11}{64}$ ② $\frac{13}{64}$ ③ $\frac{15}{64}$ ④ $\frac{17}{64}$ ⑤ $\frac{19}{64}$

88. 좌표평면 위에 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD와 점 P가 있다. 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 Q가 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{CQ} = 2$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{DP}|$의 최댓값은? 88)

① $\sqrt{2}$ ② $1+\sqrt{2}$ ③ $2+\sqrt{2}$
④ $3+\sqrt{2}$ ⑤ $4+\sqrt{2}$

89. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin(\pi x+b)+\dfrac{1}{a}$이다. 방정식 $f(x)=0$의 양의 실근 중 가장 작은 값이 1이고, 두 번째로 작은 값을 c라 할 때, 세 점 $\left(0,\ a\sin b+\dfrac{1}{a}\right)$, $(1,\ 0)$, $(c,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\dfrac{2}{3a}$이다. abc의 값은? (단, $0<b<\pi$이다.) 89)

① $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}\pi$ ② $\dfrac{5\sqrt{2}}{18}\pi$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$
④ $\dfrac{7\sqrt{2}}{18}\pi$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\pi$



90. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{f(t)}{t-k} dt = k \ \ (k = -1,\ 1)$을 만족시킬 때,

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\sin x)}{\cos x} dx$의 값은? 90)

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

91. 원점에서 곡선 $y = e^{|x|}(x+k)$에 그은 접선의 개수가 1이 되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합은? 91)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

92. $x > \ln\frac{3}{5}$ 에서 정의된 이계도함수가 존재하는 증가함수 $f(x)$가

$$f'(x)=f(x)+\int_0^x \frac{1}{f'(t)}dt$$

를 만족시킨다. $f(0)=\frac{4}{3}$ 일 때, $x=\ln 3$ 에서 $x=2\ln 3$ 까지의 곡선 $y=f(x)$ 의 길이를 구하시오. 92)

93. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$ 에서만 최솟값 2를 가진다.
(나) $\int_\alpha^{\alpha+\sqrt{2}}\{g(x)\}^2 f'(x)dx=\frac{10}{3}\alpha$

$\int_4^6 g(x)f'(x)dx=a+\ln b$ 일 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) 93)

94. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖고, 모든 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 점 $\left(t,\ f(t)+\frac{1}{t}\right)$ 사이의 거리가 $\frac{1}{g(t)}$이다.

$x=0$에서 $x=1$까지 곡선 $y=f(x)$의 길이의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 94)

95. 0이 아닌 실수 a, b, c와 함수 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}+b$가 다음 조건을 만족시킬 때, ab의 값은? [4점] 95)

방정식 $f(x)=0$, $f(1-x)=0$의 서로 다른 실근의 합은 각각 c, $\frac{\cos(\pi c)+2}{c}$이다.

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

96. 좌표공간에서 점 A(2, 2, 1)과 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=5$인 두 점 P, Q와 한 점 R가

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=12,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=24$$

를 만족시킨다. 선분 PR의 길이가 8일 때 삼각형 PQR의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 96)

97. $2<m<n$인 자연수 m, n에 대하여 $x\geq 0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases}\sin^3 x & (0<x<m\pi)\\ \cos x & (m\pi<x<n\pi)\\ \sin x & (n\pi<x)\end{cases}$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 열린 구간 $(0, 2\pi)$에서 $f(x)\neq 0$이다.
(나) $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여
$0\leq \int_0^x f(t)dt \leq M$이다.

양수 M의 최솟값이 $p\pi+q$일 때, $3(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점] 97)

이정환 수능수학

<빠른 정답>

번호	정답	번호	정답	번호	정답	번호	정답
1	⑤	26	③	51	③	76	①
2	②	27	④	52	36	77	②
3	①	28	8	53	③	78	⑤
4	①	29	⑤	54	④	79	18
5	84	30	①	55	②	80	④
6	1	31	①	56	④	81	④
7	④	32	④	57	10	82	①
8	⑤	33	②	58	③	83	20
9	④	34	④	59	①	84	①
10	②	35	③	60	48	85	③
11	③	36	③	61	⑤	86	①
12	②	37	③	62	10	87	③
13	③	38	16	63	①	88	④
14	①	39	④	64	5	89	②
15	②	40	7	65	819	90	①
16	31	41	②	66	③	91	④
17	11	42	④	67	21	92	10
18	①	43	18	68	④	93	60
19	④	44	②	69	④	94	25
20	②	45	④	70	②	95	⑤
21	①	46	④	71	24	96	67
22	⑥	47	④	72	②	97	32
23	②	48	④	73	④	98	
24	30	49	10	74	③	99	
25	②	50	②	75	④	100	

<정답과 해설>

1) 정답 ⑤

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4+5x^2}=1$이므로 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.
또, 조건 (나)에서 $x\to0$일 때, (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이다. 한편,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{(\sin2x+\tan2x)(1-\cos2x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1+\cos2x)}{(\sin2x+\tan2x)\sin^2 2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{\left(\frac{\sin2x}{x}+\frac{\tan2x}{x}\right)\left(\frac{\sin2x}{x}\right)^2}\times(1+\cos2x)\times\frac{f(x)}{x^3}\right\}$$

이 극한값이 0이 아니므로 $f(x)=x^3(x+a)$ (a는 0아닌 상수)의 꼴이어야 한다.
이 함수를 대입하면

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{\left(\frac{\sin2x}{x}+\frac{\tan2x}{x}\right)\left(\frac{\sin2x}{x}\right)^2}\times(1+\cos2x)\times(x+a)\right\}$$

$$=\frac{1}{(2+2)\times2^2}\times2\times a$$

$$=\frac{a}{8}=2$$

따라서 $f(x)=x^3(x+16)$이므로
$f(1)=17$

2) 정답 ②

$$f'(x)=4x-6a-4a^2\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}(4x^2-6ax-4a^2)$$

$$=\frac{1}{x}(2x-4a)(2x+a)$$

$x>0$, $a>0$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=2a$
함수 $f(x)$가 $x=2a$에서 극소이면서 최소이므로 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나려면 $f(2a)\le0$이어야 한다.
따라서
$f(2a)=2(4a^2)-6a(2a)-4a^2\ln(2a)=-4a^2(1+\ln(2a))$
이므로
$-4a^2(1+\ln(2a))\le0$에서
$1+\ln(2a)\ge0$, $a\ge\frac{1}{2e}$
즉, 양수 a의 최솟값은 $\frac{1}{2e}$

3) 정답 ①

$\int_0^x xf(t)dt = x\int_0^x f(t)dt$이므로

$e^{\frac{x}{2}}-1+x\int_0^x f(t)dt = ax+\int_0^x tf(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\int_0^x f(t)dt+xf(x)=a+xf(x)$

즉, $\int_0^x f(t)dt = a-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ $\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a-\frac{1}{2}$

즉, $a=\frac{1}{2}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}$

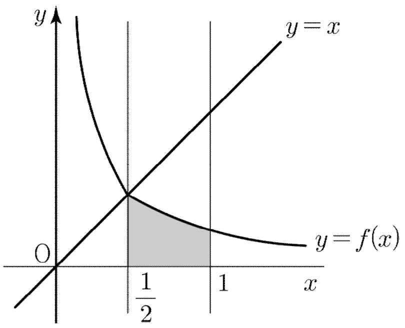
따라서

$a\times f(2)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{e}{4}\right)=-\frac{e}{8}$

4) 정답 ①

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 같아야 하므로 함수 $y=f(x)$ $(x\geq\frac{1}{2})$의 그래프는 함수 $y=f(x)$ $(0<x\leq\frac{1}{2})$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $y=-\ln(2x)+\frac{1}{2}$에서 x와 y를 대칭시키면 $x=-\ln(2y)+\frac{1}{2}$, $\ln(2y)=\frac{1}{2}-x$, $y=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}-x}$이다.

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\ln(2x)+\frac{1}{2} & \left(0<x\leq\frac{1}{2}\right)\\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}-x} & \left(\frac{1}{2}<x\right)\end{cases}$

구하고자 하는 넓이는

$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}-x}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x+\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

5) 정답 84

바나나 우유가 2개 들어가는 주머니가 1개, 바나나 우유가 1개 들어가는 주머니가 2개 있으므로 바나나 우유를 넣을 수 있는 경우의 수는

$4\times{}_3C_2=12$

이때 나머지 우유가 들어가는 경우의 수는 바나나 우유가 하나도 안 들어간 주머니를 기준으로 다음과 같다.

(ⅰ) 딸기 우유 2개가 들어간 경우

(ⅱ) 딸기 우유 1개, 초코 우유 1개가 들어간 경우

(ⅲ) 딸기 우유 1개, 흰 우유 1개가 들어간 경우

(ⅳ) 초코 우유 1개, 흰 우유 1개가 들어간 경우

나머지 우유는 바나나 우유가 1개 들어간 주머니에 각각 1개씩 넣는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 경우의 수는 각각 2가지

(ⅳ)의 경우의 수는 1가지

따라서 나머지 우유를 넣는 경우의 수는

$2+2+2+1=7$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times 7=84$

6) 정답 1

$g(x)=x^{2n+1}+1$이라 하면 $g(-1)=0$이므로 $g(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

$g(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

-1	1	0	0	0	$\cdots$	0	0	1
		-1	1	-1	$\cdots$	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	$\cdots$	-1	1	$\boxed{0}$

즉, $x^{2n+1}+1=(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-\cdots-x+1)$

$$a_n=\lim_{x\to-1}\frac{x^{2n+1}+1}{f(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-\cdots-x+1)}{k(x+2)^2\ln(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{x+1}{\ln(x+2)}\times\frac{x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-\cdots-x+1}{k(x+2)^2}\right\}$$

이때 $x+1=t$라 하면 $x\to-1$일 때, $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\ln(x+2)}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}}$$

$$=\frac{1}{1}=1$$

따라서

$$a_n=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{x+1}{\ln(x+2)}\times\lim_{x\to -1}\frac{x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-\cdots-x+1}{k(x+2)^2}\right\}$$

$$=1\times\frac{1-(-1)+1-\cdots-(-1)+1}{k(-1+2)^2}$$

$$=\frac{2n+1}{k}$$

이므로

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2(n+1)+1}{k}-\frac{2n+1}{k}=\frac{2}{k}=4,\ k=\frac{1}{2}$$

즉, $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x$ 이고

$$f'(x)=x\times\ln x+\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}=x\ln x+\frac{1}{2}x$$

따라서

$f'(2)-f(2)=(2\ln 2+1)-2\ln 2=1$

[참고]

a_n 을 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$a_n=\lim_{x\to -1}\frac{x^{2n+1}+1}{f(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^{2n+1}+1}{k(x+2)^2\ln(x+2)}$$

$$=\frac{1}{k}\lim_{x\to -1}\left\{\frac{1}{(x+2)^2}\times\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}\times\frac{x+1}{\ln(x+2)}\right\}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $g(x)=x^{2n+1}$ 이라 하면

$g(-1)=-1$, $g'(x)=(2n+1)x^{2n}$ 이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=g'(-1)$$

$$=(2n+1)\times(-1)^{2n}$$

$$=2n+1$$

또한 $x+1=t$ 라 하면 $x\to -1$ 일 때, $t\to 0$ 이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\ln(x+2)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=1$$

따라서 ㉠에서

$$a_n=\frac{1}{k}\left\{\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+2)^2}\times\lim_{x\to -1}\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}\times\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\ln(x+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{1^2}\times(2n+1)\times 1\right\}$$

$$=\frac{2n+1}{k}$$

7) 정답 ④

$\int_2^{f(x)}g(t)\,dt=\int_2^x 2t^2\,dt$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\int_2^{f(2)}g(t)\,dt=\int_2^2 2t^2\,dt=0$$

모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이므로

$\int_2^{f(2)}g(t)\,dt=0$이려면 $f(2)=2$이어야 한다.

$\int_2^{f(x)}g(t)\,dt=\int_2^x 2t^2\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(f(x))f'(x)=2x^2$

함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(f(x))=x$, $xf'(x)=2x^2$

즉, $f'(x)=2x$

$f(x)=\int 2x\,dx=x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(2)=4+C=2$이므로

$C=-2$

따라서 $x>0$에서 $f(x)=x^2-2$이므로

$f(4)=14$

8) 정답 ⑤

이 수학 시험에서 맞힌 3점짜리 문항의 수를 x

맞힌 4점짜리 문항의 수를 y라 하면

$x+y=12$, $3x+4y\le 39$ (단, $0\le x\le 10$, $0\le y\le 5$)

이다. 이때

$3x+4y=3(x+y)+y=36+y\le 39$

에서 $y\le 3$이다.

이때 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$로 가능한 것은

$(10,\ 2)$, $(9,\ 3)$

이다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_{10}C_{10}\times{}_5C_2+{}_{10}C_9\times{}_5C_3=10+100=110$

9) 정답 ④

A, B, C 세 사람이 검은 공을 2개 꺼내는 사건을 D라 하자.

공을 3개 꺼내었을 때, 검은 공이 2개 꺼내질 확률과 흰 공이 2개 꺼내질 확률은 같으므로 $\mathrm{P}(D)=\frac{1}{2}$

A가 검은 공을 꺼냈을 때 A, B, C 세 사람이 검은 공을 2개 꺼내는 사건을 F라 하자.

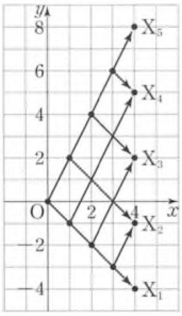
A가 검은 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{2}$

B, C는 검은 공 하나, 흰 공 하나를 꺼내야 하므로

$$\mathrm{P}(F)=\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times 1\right)+\left(\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{\mathrm{P}(F)}{\mathrm{P}(D)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$

10) 정답 ②



그림에서 점 P가 도착할 수 있는 점 X는 한 개의 동전을 4번 던지는 동안
앞면과 뒷면이 나오는 횟수에 따라
$\mathrm{X}_1(4,\ -4)$, $\mathrm{X}_2(4,\ -1)$, $\mathrm{X}_3(4,\ 2)$, $\mathrm{X}_4(4,\ 5)$, $\mathrm{X}_5(4,\ 8)$이고
$\overline{\mathrm{OX}_1}=4\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OX}_2}=\sqrt{17}$, $\overline{\mathrm{OX}_3}=2\sqrt{5}$,
$\overline{\mathrm{OX}_4}=\sqrt{41}$, $\overline{\mathrm{OX}_5}=4\sqrt{5}$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OX}}\geq 2\sqrt{10}$인 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) 점 P가 도착하는 점이 X_4인 경우
즉, 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 3번, 뒷면이 1번 나오는 경우이므로 구하는 확률은
$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$$
(ⅱ) 점 P가 도착하는 점이 X_5인 경우
즉, 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 4번 나오는 경우이므로 구하는 확률은
$${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{5}{16}$

11) 정답 ③

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{40}=1$의 두 초점 중 x좌표가 음수인 점을 F'이라 하자.
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{40}=1$의 주축의 길이는
$2\times\sqrt{64}=16$
초점 F의 x좌표를 c라 하면 $c=\sqrt{64+40}=\sqrt{104}$이므로
$\mathrm{F}(\sqrt{104},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{104},\ 0)$

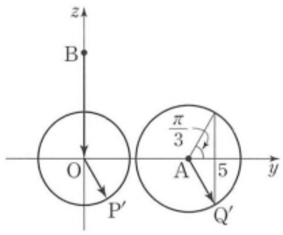
쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF}'}=16$이므로
선분 AF'이 쌍곡선과 만나는 점을 P'이라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{AP}}+(\overline{\mathrm{PF}'}+16)$
$=(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}'})+16$
$\geq(\overline{\mathrm{AP}'}+\overline{\mathrm{P}'\mathrm{F}'})+16$
$=\overline{\mathrm{AF}'}+16$
$=\sqrt{5^2+104}+16$
$=\sqrt{129}+16$
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}$의 최솟값은 $\sqrt{129}+16$이다.

12) 정답 ②

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PD}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$
$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}$
$2\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$
즉, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$이므로 점 P는 점 B와 일치한다.
$\overline{\mathrm{AB}}=3a$라 하면 $\overline{\mathrm{AD}}=4a$
직사각형 ABCD의 넓이가 12이므로
$3a\times4a=12$, $12a^2=12$, $a=1$
따라서
$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|$
$=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\overline{\mathrm{BD}}$
$=\sqrt{3^2+4^2}=5$

13) 정답 ③

$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=2$이므로 점 Q는 중심이 점 A이고 반지름의 길이가 2인 구 위의 점이다. 이 구를 S라 하자. 또 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0\leq\theta\leq\pi)$라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\cos\theta$
$=4\times2\times\cos\theta=4$
에서 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이다.
즉, 점 Q는 점 $(0,\ 5,\ 0)$을 지나고 y축에 수직인 평면이 구 S와 만나서 생기는 원 위를 움직인다. 이 원을 C라 하자.
이때
$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})$
$=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
이므로 위 그림과 같이 원 C 위의 점 중에서 z좌표가 최소인 점을 Q', 구 $x^2+y^2+z^2=2$ 위의 점 P중에서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AQ}'}$인 점을 P'라면 구 $x^2+y^2+z^2=2$과 구 S를 yz평면으로 자른 단면은 다음과 같다.



$$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP})$$
$$=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{OP}$$
$$\le\overrightarrow{AQ'}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AQ'}\cdot\overrightarrow{OP'}$$
$$=2\times k\times\cos\frac{\pi}{6}+2\times\sqrt{2}\times\cos 0$$
$$=k\sqrt{3}+2\sqrt{2}=3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$$

따라서 $k=3$

14) 정답 ①

점 P_n의 좌표는 $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}+\theta\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}+\theta\right)\right)$이므로

$a_n=\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}+\theta\right)$

이때

$a_1=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$a_2=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$

$a_3=\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$

$a_4=\cos\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)=-\sin\theta$

$a_5=\cos(3\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\vdots$

이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4=a_5+a_6+a_7+a_8=0$

또,

$a_9=a_1=-\cos\theta=-\frac{3}{5}$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$a_{10}=a_2=\sin\theta=\frac{4}{5}$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}a_k=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

15) 정답 ②

$y=2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\sin^2 x+5\cos 4x$ 에서

$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\cos^2 x$ 이므로

$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\sin^2 x+5\cos 4x=2+5\cos 4x$

$y=2+5\cos 4x$ 는 $x=\frac{\pi}{4}$ 에서 최솟값 -3 을 가진다.

따라서 $a\times m=-\frac{3}{4}\pi$

16) 정답 31

조건 (나)에서 $x\to 2$ 일 때, (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-2\}=0$에서 $\lim_{x\to 2}f(x)=2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$에서 $f(2)=2$이고

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(2)=2$이다.

또,

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{3}$$

이므로 $f'(2)\times\frac{1}{3}=1$에서 $f'(2)=3$

한편 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$ ……㉠

㉠에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)g'(2)=1$

$f'(2)=3$이므로 $g'(2)=\frac{1}{3}$

따라서 $h(x)=x^2g(x)$라 하면

$h'(x)=2xg(x)+x^2g'(x)$이므로

$h'(2)=4g(2)+4g'(2)$

$=4\times 2+4\times\frac{1}{3}=\frac{28}{3}$

따라서 $p+q=3+28=31$

17) 정답 11

조건 (가)에서 $f(1)f(5)=8$ 이므로

$f(5)$가 가질 수 있는 값은 2 또는 4 이다.

(i) $f(5)=2$ 일 때

$f(1)=4$ 이고 $f(2)\ge f(3)\ge f(4)>2$ 이므로 3, 4, 5 에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 크기순으로 차례로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 의 값으로 정하면 된다.

그 경우의 수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3=10$이다.

(ⅱ) $f(5)=4$일 때

$f(1)=2$이고 $f(2)\ge f(3)\ge f(4)>4$이므로

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값은 모두 5이다.

그 경우의 수는 1이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $10+1=11$

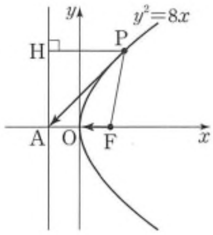
18) 정답 ①

조건 (가)에서 임의의 실수 k에 대하여 $f(80+k)=f(80-k)$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=80$에 대하여 대칭이다.
그러므로 $a=80$
조건 (나)에서
$2\mathrm{P}(a-3\le X\le a)+\mathrm{P}(a+3\le X\le a+4)$
$=2\mathrm{P}(77\le X\le 80)+\mathrm{P}(83\le X\le 84)$
$=\mathrm{P}(77\le X\le 80)+\mathrm{P}(80\le X\le 83)+\mathrm{P}(83\le X\le 84)$
$=\mathrm{P}(77\le X\le 84)$
이므로 $b=84$
조건 (다)에서
$\mathrm{P}(77\le X\le 84)=\mathrm{P}\left(\dfrac{77-80}{1}\le Z\le\dfrac{84-80}{1}\right)$
$=\mathrm{P}(-3\le Z\le 4)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)+\mathrm{P}(0\le Z\le 4)$
이므로 $c=3$
따라서 $a+b+c=80+84+3=167$

19) 정답 ④

이 산부인과에서 16주에서 25주 사이의 태아의 머리의 직경을
확률변수
X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다. 따라서 이
산부인과에서 16주에서 25주 사이의 태아 n명을 임의추출하여
태아의 머리의 직경을 조사한 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포
$\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포
$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때 $|\overline{X}-m|\le 0.28\sigma$일 확률이 0.95이상이므로
$\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 0.28\sigma)=\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\le\dfrac{0.28\sigma}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$
$=\mathrm{P}(|Z|\le 0.28\sqrt{n})$
$=\mathrm{P}(-0.28\sqrt{n}\le Z\le 0.28\sqrt{n})$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.28\sqrt{n})\ge 0.95$
즉, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.28\sqrt{n})\ge 0.475$이므로
$0.28\sqrt{n}\ge 1.96,\ \ \sqrt{n}\ge 7$
따라서 $n\ge 49$이므로 n의 최솟값은 49이다.

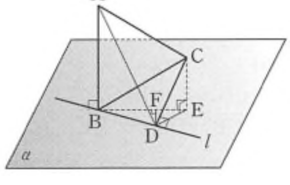
20) **정답 ②**



$y^2=8x=4\times 2x$에서 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이고 준선의
방정식은 $x=-2$이다.
점 P에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하자.
점 P의 x좌표를 a라 하면 $\mathrm{P}(a,\ \sqrt{8a})$
$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\overline{\mathrm{PA}}=4\sqrt{7}$이고 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$이므로 직각삼각형 PHA에서
$\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HA}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2,\ (a+2)^2+(\sqrt{8a})^2=112$
$a^2+12a-108=0,\ (a+18)(a-6)=0$
$a>0$이므로 $a=6$
즉, $\mathrm{P}(6,\ 4\sqrt{3})$
따라서
$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}-2\overrightarrow{\mathrm{FO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$
$=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AO}}|$
$=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}|$
$=|\overrightarrow{\mathrm{PF}}|=\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=6+2=8$

21) **정답 ①**

꼭짓점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 E라 하면
직각삼각형 CBE에서 $\angle\mathrm{CBE}=\dfrac{\pi}{6}$이므로
$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{CB}}\sin\dfrac{\pi}{6}=6\times\dfrac{1}{2}=3$



직각삼각형 CBE에서
$\overline{\mathrm{BE}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CB}}^2-\overline{\mathrm{CE}}^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$
직각삼각형 CDE에서
$\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CD}}^2-\overline{\mathrm{CE}}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$
$\overline{\mathrm{CE}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{CD}}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{DE}}\perp l$이다.
직각삼각형 EBD에서
$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{EB}}^2-\overline{\mathrm{ED}}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}=2\sqrt{5}$
점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 F라 하면 점 F는
선분 BE 위에 놓이므로
직각삼각형 EBD에서

$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{ED}=\frac{1}{2}\times\overline{EB}\times\overline{DF}$

즉, $\overline{DF}=\frac{\overline{BD}\times\overline{ED}}{\overline{EB}}=\frac{2\sqrt{5}\times\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{35}}{3\sqrt{3}}$

따라서 사면체 ABDC의 부피는

$\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times\overline{DF}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2\times\frac{2\sqrt{35}}{3\sqrt{3}}$

$=2\sqrt{35}$

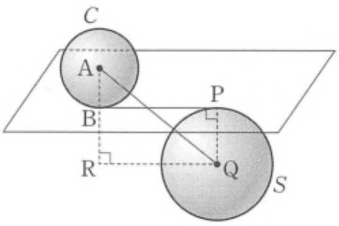
22) **정답** 6

구 C가 zx평면에 접하는 점을 B라 하고, 구 S의 중심을 Q, 점 Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\overline{AR}=\overline{AB}+\overline{PQ}=3+6=9$, $\overline{AQ}=15$이므로

직각삼각형 AQR에서

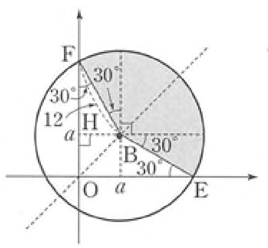
$\overline{QR}=\sqrt{\overline{AQ}^2-\overline{AR}^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12$



$\overline{BP}=\overline{RQ}=12$이므로 점 P가 나타내는 도형 L은 다음 그림과 같이 중심이 점 B이고 반지름의 길이가 12인 원이다.

도형 L과 x축의 양의 방향이 만나는 점을 E, 도형 L과 z축의 양의 방향이 만나는 점을 F라 하면 도형 L'의 길이가 도형 L의 전체 길이의 $\frac{5}{12}$이므로 색칠한 부채꼴 EBF의 중심각의 크기는

$360°\times\frac{5}{12}=150°$이다.



점 B에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 H$(0,\ 0,\ a)$, $\angle BFH=30°$이므로

$\overline{BH}=\overline{BF}\sin 30°=12\times\frac{1}{2}=6$

따라서 $a=6$

23) **정답** ②

주머니 속에 10, 15, 20, 25의 자연수가 적혀 있는 카드가 각각 2장씩 있으므로 임의로 동시에 2장의 카드를 뽑을 때, 같은 수가 적혀 있는 카드가 2장이 나올 수 있다.

이때 확률변수 X가 갖는 값은 20, 30, 40, 50이다.

또한, 임의로 2장의 카드를 뽑을 때, 서로 다른 수가 적혀 있는 카드가 나올 수 있다.

이때 확률변수 X가 갖는 값은 10, 15, 20이다.

(ⅰ) $X=20$일 때,

㉠ 10이 적혀 있는 카드가 2장이 나오는 경우

$\frac{{}_2C_2}{{}_8C_2}=\frac{1}{28}$

㉡ 20, 25가 적혀 있는 카드가 나오는 경우

$\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_8C_2}=\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$

이므로 $P(X=20)=\frac{1}{28}+\frac{1}{7}=\frac{5}{28}$

(ⅱ) $X=30$일 때,

15가 적힌 카드가 두 장 나오는 경우

$P(X=30)=\frac{{}_2C_2}{{}_8C_2}=\frac{1}{28}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$P(20\le X\le 30)=P(X=20)+P(X=30)=\frac{5}{28}+\frac{1}{28}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$

24) **정답** 30

확률변수 $Z_1=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 N$(0,\ 1)$을 따르고

$P(X\ge a)=0.0808$에서 $a>m$ ⋯⋯㉠

이므로

$P(X\ge a)=P\left(Z_1\ge\frac{a-m}{\sigma}\right)$

$=0.5-P\left(0\le Z_1\le\frac{a-m}{\sigma}\right)$

$=0.0808$

$P\left(0\le Z_1\le\frac{a-m}{\sigma}\right)=0.4192$

그러므로 $\frac{a-m}{\sigma}=1.4$ ⋯⋯㉡

한편, 확률변수 Y는 평균이 $3m+6$, 표준편차가 3σ인 정규분포를 따르므로 확률변수 $Z_2=\frac{Y-(3m+6)}{3\sigma}$은 표준정규분포 N$(0,\ 1)$을 따른다.

㉠에서 $3a+24>3m+6$이므로

$P(Y\ge 3a+24)=P\left(Z_2\ge\frac{3a+24-(3m+6)}{3\sigma}\right)$

$=P\left(Z_2\ge\frac{3(a-m)+18}{3\sigma}\right)$

$=P\left(Z_2\ge\frac{a-m}{\sigma}+\frac{6}{\sigma}\right)$

$=0.5-P\left(0\le Z_2\le\frac{a-m}{\sigma}+\frac{6}{\sigma}\right)$

$=0.0548$

에서 $P\left(0 \le Z_2 \le \frac{a-m}{\sigma}+\frac{6}{\sigma}\right)=0.4452$

그러므로 $\frac{a-m}{\sigma}+\frac{6}{\sigma}=1.6$이고 ㉡에서

$\frac{6}{\sigma}=0.2$

따라서 $\sigma=30$

25) 정답 ②

타원 $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{k}=1\ (0<k<100)$의 장축의 길이는

$2\times\sqrt{81}=18$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=18$ …… ㉠

$\overline{OF}=\overline{OF'}$이므로 직선 l은 포물선의 준선이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}=8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{PF'}=10$

따라서 $\overline{HF'}=\sqrt{10^2-8^2}=6$이므로

삼각형 PHF′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times8=24$

26) 정답 ③

점 B의 좌표를 (8, 0)이라 하면 $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{BX}$인 점 X는 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$를 x축의 방향으로 8만큼 평행이동한 원 $C:(x-9)^2+(y-1)^2=2$ 위의 점이다.

원 C의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 C(9, 1)이다.

$\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{OX}$

이므로 직선 OC가 원 C와 만나는 두 점을 점 O에 가까운 점부터 차례로 M, N이라 하면 점 X가 점 N에 있을 때 $|\overrightarrow{OX}|$의 값이 최대이고 최댓값은

$\overline{OC}+\overline{CN}=\sqrt{9^2+1^2}+\sqrt{2}=\sqrt{82}+\sqrt{2}$

점 X가 점 M에 있을 때 $|\overrightarrow{OX}|$의 값이 최소이고 최솟값은

$\overline{OC}-\overline{CM}=\sqrt{9^2+1^2}-\sqrt{2}=\sqrt{82}-\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$82-2=80$이다.

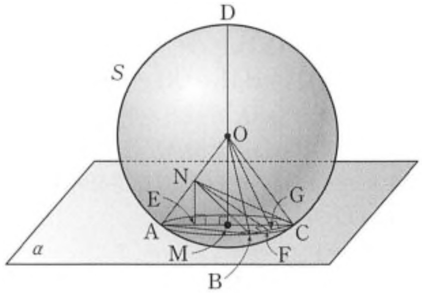
27) 정답 ④

점 M을 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구와 만나는 두 점 중 점 M과의 거리가 더 먼 점을 D라 하면 $\overline{MD}=9$이므로

$\overline{OM}=\overline{MD}-5=9-5=4$

직각삼각형 OAM에서 $\overline{OA}=5$이므로

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$



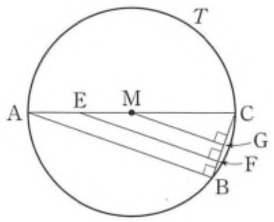
원 T에 내접하는 삼각형 ABC에서 변 AC가 원 T의 지름이므로

$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$이고 $\overline{AC}=2\overline{AM}=2\times3=6$, $\overline{BC}=2$

직각삼각형 ACB에서

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CB}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

점 N에서 평면 α에 내린 수선의 발을 E라 하면 점 E는 선분 AM의 중점이다. 또 점 E에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 F라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{NF}\perp\overline{BC}$이다.



$\triangle ABC \backsim \triangle EFC$이고 닮음비는

$\overline{AC}:\overline{EC}=6:\frac{9}{2}=4:3$이므로

$\overline{EF}=\frac{3}{4}\overline{AB}=\frac{3}{4}\times4\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

두 평면 NBC, α가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면

$\overline{EF}\perp\overline{BC}$, $\overline{NF}\perp\overline{BC}$이므로

직각삼각형 NFE에서 $\angle NFE=\theta_1$이고

$\overline{NE}=\frac{1}{2}\overline{OM}=\frac{1}{2}\times4=2$,

$\overline{NF}=\sqrt{\overline{FE}^2+\overline{NE}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$이므로

$\sin\theta_1=\frac{\overline{NE}}{\overline{NF}}=\frac{2}{\sqrt{22}}=\frac{\sqrt{22}}{11}$,

$\cos\theta_1=\frac{\overline{FE}}{\overline{NF}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{22}}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$

또한 $\overline{OM}\perp\alpha$이고 점 M에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 G라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OG}\perp\overline{BC}$이다.

즉, $\triangle ABC \backsim \triangle MGC$이고 닮음비는

$\overline{AC}:\overline{MC}=6:3=2:1$이므로

$\overline{MG}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

두 평면 OBC, α가 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면

$\overline{MG}\perp\overline{BC}$, $\overline{OG}\perp\overline{BC}$이므로

직각삼각형 OGM에서 $\angle OGM=\theta_2$이고

$\overline{OG}=\sqrt{\overline{GM}^2+\overline{OM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+4^2}=2\sqrt{6}$이므로

$\sin\theta_2 = \dfrac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{OG}}} = \dfrac{4}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

$\cos\theta_2 = \dfrac{\overline{\mathrm{GM}}}{\overline{\mathrm{OG}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 두 평면 NBC, OBC가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta = \cos(\theta_2 - \theta_1)$

$= \cos\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_2\sin\theta_1$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{3\sqrt{11}}{11} + \dfrac{\sqrt{6}}{3} \times \dfrac{\sqrt{22}}{11} = \dfrac{5\sqrt{33}}{33}$

삼각형 NBC의 넓이를 S_1이라 하면

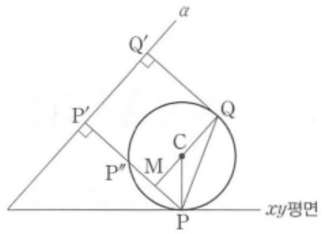
$S_1 = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{NF}} = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{22} = \sqrt{22}$

따라서 삼각형 NBC의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이를 S_2라 하면

$S_2 = S_1\cos\theta = \sqrt{22} \times \dfrac{5\sqrt{33}}{33} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$

28) 정답 8

다음 그림과 같이 구 S의 중심을 지나고 xy평면과 평면 α의 교선에 수직인 평면으로 자른 단면을 생각하자.



위와 같이 직선 PP′이 구와 만나는 P가 아닌 점을 P″, 선분 PP″의 중점을 M, 구의 중심을 C라 하면 반직선 MC가 구와 만나는 점이 Q일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}|$의 값이 최대가 되고 최댓값은 선분 QM의 길이와 같다.

이때 선분 PP′의 길이는 점 (1, 1, 0)과 평면 α 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{PP'}} = \dfrac{|2\times1+1\times1-2\times0+21|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 8$

선분 MP′의 길이는 구의 중심 C(1, 1, 6)과 평면 α 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{MP'}} = \dfrac{|2\times1+1\times1-2\times6+21|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 4$

즉, $\overline{\mathrm{PM}} = 4$이고 $\overline{\mathrm{CP}} = 6$이므로

$\overline{\mathrm{CM}} = 2\sqrt{5}$

따라서 구하는 최댓값은

$\overline{\mathrm{QM}} = \overline{\mathrm{CQ}} + \overline{\mathrm{CM}} = 6 + 2\sqrt{5}$

그러므로 $p+q=8$이다.

29) 정답 ⑤

조건 (가)에서

$g(x) = g(-x)$이므로

$g'(x) = -g'(-x)$

즉, $g'(-\pi) = -g'(\pi)$

$g(x) = \dfrac{f(x)}{\sin x + 3}$에서

$g'(x) = \dfrac{f'(x)(\sin x+3) - f(x)\cos x}{(\sin x+3)^2}$이므로

$g'(\pi) = \dfrac{3+2}{9} = \dfrac{5}{9}$

따라서 $g'(-\pi) = -g'(\pi) = -\dfrac{5}{9}$

30) 정답 ①

$x^3+2=t$로 놓으면 $3x^2 = \dfrac{dt}{dx}$이므로

$g(x) = \displaystyle\int 3x^2 f'(x^3+2)dx$

$= \displaystyle\int f'(t)dt$

$= f(t) + C$

$= f(x^3+2) + C$ (단, C는 적분상수이다.)

$g(0) = f(2) + C = 4e^2 + C = 6e^2$이므로 $C = 2e^2$

따라서 $g(1) = f(3) + 2e^2 = 6e^3 + 2e^2 = 2e^2(3e+1)$

31) 정답 ①

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴 OAB의 호의 길이는 $r\theta$이므로 부채꼴 OAB의 둘레의 길이는 $2r + r\theta$이다.

$2r + r\theta = 20$에서 $r = \dfrac{20}{2+\theta}$

직각삼각형 OHB에서 $\sin\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{r}$, $\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{r}$이므로

$\overline{\mathrm{BH}} = r\sin\theta = \dfrac{20\sin\theta}{2+\theta}$

$\overline{\mathrm{OH}} = r\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AH}} = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta) = \dfrac{20(1-\cos\theta)}{2+\theta}$

즉,

$f(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{20\sin\theta}{2+\theta} \times \dfrac{20(1-\cos\theta)}{2+\theta}$

$= \dfrac{200\sin\theta(1-\cos\theta)}{(2+\theta)^2} \times \dfrac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$= \dfrac{200\sin^3\theta}{(2+\theta)^2(1+\cos\theta)}$

따라서

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to0+}\dfrac{200\sin^3\theta}{(2+\theta)^2(1+\cos\theta)\theta^3} = \dfrac{200}{8} \times 1^3 = 25$

32) 정답 ④

$f(1)+f(3)=10$, $f(1)\neq f(3)$을 만족시키는 $f(1)$과 $f(3)$의 순서쌍은 $(3, 7)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$, $(7, 3)$으로 모두 4개이다.
조건 (나)에 의하여 $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우는 집합 Y의 원소에서 $f(1)$과 $f(3)$을 제외한 5개의 원소 중에서 서로 다른 3개의 원소를 택하여 나열하면 되므로
${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$4\times60=240$

33) 정답 ②

$(a+b+c-d)^5$의 전개식에서 일반항은 $a^x b^y c^z (-d)^w$의 양의 실수배이고,
$x+y+z+w=5$ (x, y, z, w는 음이 아닌 정수)
a와 c를 포함하려면 x와 z는 1이상이어야 하고, 계수가 양수이려면 w는 0또는 짝수이므로
$x=x'+1$, $z=z'+1$, $w=2w'$ (x', z', w'은 음이 아닌 정수)
라 하면 $x'+y+z'+2w'=3$
즉, $(a+b+c-d)^5$의 전개식에서 a와 c를 모두 포함하고 계수가 양수인 서로 다른 항의 개수는 방정식 $x'+y+z'+2w'=5$를 만족시키는 해의 개수와 같다.

(ⅰ) $w'=0$인 경우
$x'+y+z'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수이므로 ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$이다.

(ⅱ) $w'=1$인 경우
$x'+y+z'=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 1개를 택하는 중복조합의 수이므로 ${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$이다.

(1), (2)에 의하여 구하는 항의 개수는 $10+3=13$

34) 정답 ④

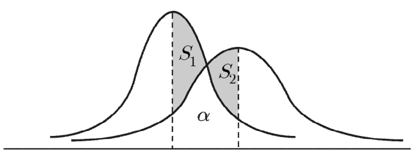
3명의 학생을 7개의 학급 중에서 임의로 택한 서로 다른 3개의 학급에 1명씩 배정하는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{P}_3=7\times6\times5=210$
어떤 2명의 학생도 이웃한 교실의 학급에 배정되지 않는 경우는 학생이 배정되지 않는 학급 4개를 나열하고 4개의 양 끝과 사이인 5개의 공간 중에서 서로 다른 3개를 택하여 학생 3명을 배정하면 된다.

그 경우의 수는
${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$
따라서 구하는 확률은
$\frac{60}{210}=\frac{2}{7}$

35) 정답 ③

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(X\le5)=\mathrm{P}(X\ge19)$에서 $m=\frac{5+19}{2}=12$
따라서
$\mathrm{P}(X\ge5)=\mathrm{P}(5\le X\le12)+\mathrm{P}(X\ge12)$
$=\mathrm{P}(12\le X\le19)+\mathrm{P}(X\ge12)$
$=0.24+0.5=0.74$

36) 정답 ③



확률변수 X의 정규분포곡선을 $y=f(x)$, 확률변수 Y의 정규분포곡선을 $y=g(x)$라 하고, 두 직선 $x=m$, $x=2m$과 x축 밑 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 α라 하면
곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=m$, $x=2m$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\mathrm{P}(m\le X\le 2m)=S_1+\alpha$
곡선 $y=g(x)$와 두 직선 $x=m$, $x=2m$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\mathrm{P}(m\le Y\le 2m)=S_2+\alpha$
따라서 $S_1-S_2=\mathrm{P}(m\le X\le 2m)-\mathrm{P}(m\le Y\le 2m)$이고
$Z=\frac{X-m}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(1, 0)$을 따르고,
$Z=\frac{Y-2m}{2\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(1, 0)$을 따른다.
$\mathrm{P}(m\le X\le 2m)-\mathrm{P}(m\le Y\le 2m)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(-\frac{m}{2\sigma}\le Z\le0\right)$
주어진 조건에서 $\mathrm{P}\left(\frac{m}{2}\le X\le 2m\right)=\mathrm{P}\left(-\frac{m}{2\sigma}\le X\le\frac{m}{\sigma}\right)=0.5274$,
$\mathrm{P}(2m\le Y\le 3m)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m}{2\sigma}\right)=0.1630$
따라서
$\mathrm{P}(m\le X\le 2m)-\mathrm{P}(m\le Y\le 2m)=0.5274-0.1630-0.1630=0.2014$

37) 정답 ③

$\overline{\mathrm{DH}}\perp$ 평면EFGH이고 $\overline{\mathrm{DP}}\perp\overline{\mathrm{EG}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{HP}} \perp \overline{\mathrm{EG}}$
$\overline{\mathrm{EG}} = \sqrt{17}$
삼각형 HEG의 넓이에서 $\frac{1}{2} \times 1 \times 4 = \frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times \overline{\mathrm{HP}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{HP}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$
$\overline{\mathrm{DP}} = l = \sqrt{1^2 + \frac{16}{17}} = \sqrt{\frac{33}{17}}$
$l^2 = \frac{33}{17}$

38) 정답 16

$\int_0^2 \{g(x)\}^2 f'(x)dx$ 에서 부분적분 하면
$\int_0^2 \{g(x)\}^2 f'(x)dx = \left[\{g(x)\}^2 f(x)\right]_0^2 - \int_0^2 2g'(x)g(x)f(x)dx$
$f(2)g(2) = f(0)g(0) = 0$ 이므로
$\int_0^2 \{g(x)\}^2 f'(x)dx = \left[\{g(x)\}^2 f(x)\right]_0^2 - \int_0^2 2g'(x)g(x)f(x)dx$
$= -2\int_0^2 (x^2 - 2x)g'(x)dx \quad (\because f(x)g(x) = x^2 - 2x)$
다시 한번 부분적분 해주면
$\int_0^2 \{g(x)\}^2 f'(x)dx = -2\left(\left[(x^2-2x)g(x)\right]_0^2 - 2\int_0^2 (x-1)g(x)dx\right) = -8$
따라서 $\int_0^2 (x-1)g(x)dx = -2$
그러므로 $k = -2$
$4k^2 = 4 \times 4 = 16$

39) 정답 ④

삼각형 BOC에서 $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{OC}} = 2\cos\theta$ 이고
삼각형 DOA에서 $\overline{\mathrm{DA}} = 2\tan\theta$
따라서
$S(\theta) = \frac{1}{2} \times (\overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{DA}}) \times \overline{\mathrm{AC}}$
$= \frac{1}{2} \times 2 \times \left\{\frac{\sin\theta(\cos\theta + 1)}{\cos\theta}\right\} \times (2 - 2\cos\theta)$
$= \frac{2\sin^3\theta}{\cos\theta}$
따라서
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\sin^3\theta}{\theta^3 \cos\theta} = 2$

40) 정답 7

$3\sin x\cos x - 1 = 3\cos x - \sin x$ 에서
$(\sin x - 1)(3\cos x + 1) = 0$
$\sin x = 1$ 또는 $\cos x = -\frac{1}{3}$
(i) $0 \le x < 2\pi$ 일 때, $\sin x = 1$ 에서 $x = \frac{1}{2}\pi$
(ii) $0 \le x < 2\pi$ 일 때, $\cos x = -\frac{1}{3}$ 에서 x 값들의 합은 2π 이다.
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 해의 합은 $\frac{1}{2}\pi + 2\pi = \frac{5}{2}\pi$
따라서 $p = 2$, $q = 5$ 이므로 $p + q = 7$

41) 정답 ②

k $(k = 1, 2, 3)$ 가 적힌 공의 개수를 a_k 라 하면
$\mathrm{P}_k = \frac{a_k}{30}$ 이므로 $\mathrm{P}_{k+1} = 2\mathrm{P}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ 에서
$a_{k+1} = 2a_k$
즉, $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 2a_2$, $a_4 = 2a_3$
즉, $a_3 = 4a_1$, $a_4 = 8a_1$ 이고
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15a_1$
$\frac{15a_1}{30} = 1 \quad \left(\because \sum_{k=1}^{4} \mathrm{P}_k = 1\right)$
따라서 $a_1 = 2$ 이므로 주머니에는 1이 적힌 공이 2개, 2가 적힌 공이 4개, 3이 적힌 공의 8개, 4가 적힌 공이 16개 들어 있다.
이 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는
${}_{30}\mathrm{C}_2 = \frac{30 \times 29}{2 \times 1} = 435$
꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 합이 5인 경우는 두 공에 적힌 수가 각각 1, 4 또는 2, 3인 경우이다.
두 공에 적힌 수가 각각 1, 4인 사건을 A, 두 공에 적힌 수가 각각 2, 3인 사건을 B라 하면
$n(A) = {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_{16}\mathrm{C}_1 = 32$ 이므로 $\mathrm{P}(A) = \frac{32}{435}$
또 $n(B) = {}_4\mathrm{C}_1 \times {}_8\mathrm{C}_1 = 32$ 이므로 $\mathrm{P}(B) = \frac{32}{435}$
두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{64}{435}$

42) 정답 ④

이동전화 가입자의 월 데이터 사용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다.
이동전화 가입자 중에서 144명을 임의추출하여 구한 월 데이터 사용량의 표본평균이 $\overline{x}$ 이고, 이 결과를 이용하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{144}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{144}}$

주어진 신뢰구간이 $4070.4\le m\le 4109.6$이므로

$\bar{x}=\frac{4070.4+4109.6}{2}=4090$이고

$1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{144}}=19.6$, $\sigma=120$

그러므로 $\bar{x}+\sigma=4210$

43) 정답 18

초점의 좌표가 $(2,0),(-2,0)$이므로 $a^2+b^2=4$이다.

선분 FF'를 $3:1$로 내분한 점을 M이라 하면 $\mathrm{M}(1,0)$이고 조건에서

$p=a^2$이다. 또한 $\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}=1$에서 $q^2=b^2(a^2-1)$, $q=\sqrt{b^2(a^2-1)}$

$\overline{\mathrm{PO}}^2=p^2+q^2$

$\overline{\mathrm{PF}}^2=(p-2)^2+q^2$

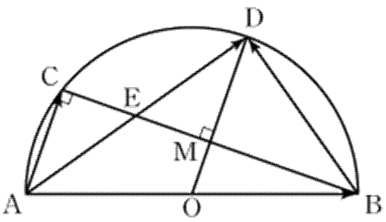
$\overline{\mathrm{PO}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2=2p^2-4p+4+2q^2=6a^2-4$

$\overline{\mathrm{PO}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2=8$이므로 $a^2=2, b^2=2$

p, q는 양수이므로 $p=2, q=\sqrt{2}$에서 점 P의 좌표는 $(2,\sqrt{2})$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PF}'}=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{18}$이므로 $k^2=18$

44) 정답 ②



반원의 중심을 O라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=4$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$

$\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{64-4}=2\sqrt{15}$

또한 두 선분 BC와 OD의 교점을 M이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}//\overrightarrow{\mathrm{OD}}$이므로 $\angle\mathrm{CMD}=\frac{\pi}{2}$

이때 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$이므로 삼각형 OBC는 이등변삼각형이고 직선 OM은 선분 BC의 수직이등분선이다.

즉, $\overline{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{15}$

또한 삼각형 ABC와 삼각형 OBM은 닮음비가 $2:1$인 닮은 삼각형이므로 $\overline{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}=1$

$\overline{\mathrm{MD}}=\overline{\mathrm{OD}}-\overline{\mathrm{OM}}=4-1=3$

삼각형 BDM은 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{BD}}^2=\overline{\mathrm{BM}}^2+\overline{\mathrm{MD}}^2=3^2+(\sqrt{15})^2=24$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=2\sqrt{6}$

45) 정답 ④

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 최댓값을 구하고 있으므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$인 경우만 생각하자.

두 점 P, Q에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}||\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}|$

$=\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{P'Q'}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=4\sqrt{2}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$는 직선 PP'이 반원에 접하고, 점 Q가 선분 BD와 정사각형 ABCD의 내접원의 교점 중 점 D에 가까운 점일 때 최댓값을 가지고, 이때 점 Q와 점 Q'은 일치한다.

변 AB의 중점을 M, 점 M에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 M', 정사각형 ABCD의 내접원의 중심을 O라 하면

$\overline{\mathrm{P'M'}}=\overline{\mathrm{PM}}=2$, $\overline{\mathrm{M'O}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{\mathrm{MO}}=\sqrt{2}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 최댓값은

$\overline{\mathrm{BD}}\times(\overline{\mathrm{P'M'}}+\overline{\mathrm{M'O}}+\overline{\mathrm{OQ'}})$

$=4\sqrt{2}\times(2+\sqrt{2}+2)=16\sqrt{2}+8$

46) 정답 ④

선분 AB의 중점 $\mathrm{M}\left(1,\frac{1}{2}\right)$에 대하여 점 P는 M을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{5}{2}$인 원 위의 점이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$에서 점 P는 직선 AB에 수직이고 원점을 지나는 직선 위의 점이다. 직선 AB의 기울기가 $\frac{3}{4}$이므로 점 P는 직선 $y=-\frac{4}{3}x$ 위의 점이다.

즉 P_1, P_2는 원과 직선의 서로 다른 두 교점이고 직선 AB와 직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$의 교점을 H라 하면

$\overline{\mathrm{MH}}=\frac{\left|4+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{11}{10}$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|=2\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{121}{100}}=\frac{\sqrt{504}}{5}$

47) 정답 ④

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP})=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}$의 값은 상수이므로 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BP}$가 최대가 되려면

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$가 최대가 되어야 한다.

즉 두 벡터 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CP}$의 방향이 같을 때이고, $\overline{CP}=3$이므로

$\overrightarrow{CP}=\dfrac{3\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}$

$\overrightarrow{CA}=(3,\ -2,\ 1)$, $\overline{CA}=\sqrt{14}$ 에서

$\overrightarrow{CP}=\left(\dfrac{9}{\sqrt{14}},\ \dfrac{-6}{\sqrt{14}},\ \dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=(0,\ 1,\ 1)+\left(\dfrac{9}{\sqrt{14}},\ \dfrac{-6}{\sqrt{14}},\ \dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$

$=\left(\dfrac{9}{\sqrt{14}},\ 1-\dfrac{6}{\sqrt{14}},\ 1+\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$

따라서 $a-b+c=\dfrac{18}{\sqrt{14}}=\dfrac{9\sqrt{14}}{7}$

48) 정답 ④

두 구 $x^2+y^2+z^2=1$, $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$의 중심은 각각 $C_1(0,\ 0,\ 0)$, $C_2(1,\ 2,\ 1)$이고, 직선 C_1C_2는 평면 α와 수직이므로 평면 α의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{C_1C_2}$라 할 수 있다.

$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{C_1C_2}=(1,\ 2,\ 1)$

한편, zx평면의 법선벡터는 $(0,\ 1,\ 0)$이므로

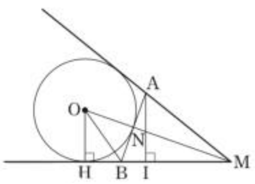
$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{1+4+1}\times 1}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

49) 정답 10

삼각형 ACD에서 $\overline{AC}=\overline{AD}=5$, $\overline{CD}=8$이므로

$\overline{MA}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이고 마찬가지로 $\overline{MB}=3$이다.

두 평면 ACD, BCD와 선분 AB에 동시에 접하는 구의 중심을 O라 하고, 선분 AB의 중점을 N, 점 O에서 직선 MB에 내린 수선의 발을 H라 하면 세 점 A, B, M을 지나는 평면은 그림과 같다.



그림에서 원이 두 직선 MA, MB에 접하므로 직선 OM은 $\angle BMA$를 이등분하고 점 N을 지난다.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BC}$

(i) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{MC}$이므로

점 A에서 직선 BM에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 ABM의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\times\overline{BM}\times\overline{AI}$

$\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\times 3\times\overline{AI}$

$\overline{AI}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$이므로

$\overline{MI}^2=\overline{AM}^2-\overline{AI}^2=3^2-\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\dfrac{49}{9}$

$\overline{MI}=\dfrac{7}{3}$이고, $\overline{HB}=\overline{BN}=1$이므로

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BM}=-|\overrightarrow{IH}|\times|\overrightarrow{BM}|=-(\overline{HB}+\overline{BM}-\overline{MI})\times|\overrightarrow{BM}|$

$=\left(1+3-\dfrac{7}{3}\right)\times 3=-5$

(ii) 삼각형 MOH와 삼각형 MBN이 닮음이므로

$\overline{OH}:\overline{OM}=\overline{BN}:\overline{BM}$

이때 $\overline{OH}=\overline{ON}$, $\overline{BN}=1$, $\overline{MN}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{OH}+2\sqrt{2}=3\times\overline{OH}$

$\overline{OH}=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BC}$가 최소일 때는 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{BC}$가 평행하고 다른 방향이 되도록 점 P를 정할 때이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overline{OP}\times\overline{BC}=-5\sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$의 최솟값은 $-5-5\sqrt{2}$이다.

따라서 $p=-5$, $q=-5$이므로 $|p+q|$의 값은 10이다.

50) 정답 ②

함수 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(ax-1)+2$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(ax)$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{a}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(ax)$의 그래프의 점근선은 y축이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=\dfrac{1}{a}$이다.

또한 $y=\log_{\frac{1}{2}}(ax-1)+2$에 $y=0$을 대입하면

$0=\log_{\frac{1}{2}}(ax-1)+2$, $-2=\log_{\frac{1}{2}}(ax-1)$

$ax-1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$, $x=\dfrac{5}{a}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{a},\ 0\right)$이다.

$\dfrac{1}{a}<n<\dfrac{5}{a}$ …㉠

㉠에서 $a=1$이면 n의 개수는 3이다.

$a=2$이면 $\dfrac{1}{2}<n<\dfrac{5}{2}$이므로 자연수 n의 개수는 2이다.

$a\geq 3$이면 n의 개수는 1이하이다.

따라서 구하는 자연수 a의 값은 2이다.

51) 정답 ③

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=2$의 극한값이 존재하고 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$ 이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}=0$이고 함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $f(1)=3$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $f'(1)=2$

$f(x)$가 $g(x)$의 역함수이므로 $g(3)=1$, $g'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$

따라서 $h(x)=f(g(3x))$ 에서

$h'(x)=f'(g(3x))\times g'(3x)\times3$이므로

$h'(1)=f'(g(3))\times g'(3)\times3=2\times\frac{1}{2}\times3=3$

52) 정답 36

조건 (가)에서 $\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{\cos2x-\cos x}=-24$의 값이 존재하고 $x\to0$일 때 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to0}\{f(x)\}^2=0$

함수 $\{f(x)\}^2$은 연속함수이므로 $f(0)=0$

$f(1)>0$이므로 $f(x)=kx$ $(k>0)$로 놓자.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{\cos2x-\cos x}&=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^2}{2\cos^2x-1-\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^2}{(2\cos x+1)(\cos x-1)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-k^2x^2(1+\cos x)}{(2\cos x+1)(1-\cos x)(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-k^2x^2(1+\cos x)}{(2\cos x+1)\sin^2x}\\&=\lim_{x\to0}\left\{-k^2\times\frac{1+\cos x}{2\cos x+1}\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\right\}\\&=-\frac{2}{3}k^2=-24\end{aligned}$$

에서 $k^2=36$이고 $k>0$이므로 $k=6$

즉, $f(x)=6x$

조건 (나)에서 함수

$$g(x)=\begin{cases}a & (x\ge0)\\ \frac{f(x)}{\ln(1+x)} & (-1<x<0)\end{cases}$$

이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)$

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}a=a$이고 $g(0)=a$

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}\frac{6x}{\ln(1+x)}=6$이므로 $a=6$

따라서 $f(a)=f(6)=6\times6=36$

53) 정답 ③

X에서 X로의 함수의 개수는

$5^4=625$

$f(1)\le f(2)<f(3)\le f(4)<f(5)$를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)<f(5)$인 경우
집합 X의 원소를 작은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 1가지이다.

(ii) $f(1)=f(2)<f(3)<f(4)<f(5)$인 경우
집합 X의 다섯 원소 중에서 네 원소를 택한 후 작은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 ${}_5C_4=5$가지이다.

(iii) $f(1)<f(2)<f(3)=f(4)<f(5)$인 경우
집합 X의 다섯 원소 중에서 네 원소를 택한 후 작은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 ${}_5C_4=5$가지이다.

(iv) $f(1)=f(2)<f(3)=f(4)<f(5)$인 경우
집합 X의 다섯 원소 중에서 세 원소를 택한 후 작은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 ${}_5C_3=10$가지이다.

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는 $1+5+5+10=21$이므로 구하는 확률은 $\frac{21}{625}$이다.

54) 정답 ④

한 개의 주사위를 3번 던졌을 때, 점 P의 위치는

(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)

중 하나이다. 점 P가 곡선 $y=(x-2)^2+1$ 위에 있으므로 점 P의 좌표는 (2, 1) 또는 (1, 2)이다.

(1) P(2, 1)인 경우는 6의 약수의 눈이 2번, 6의 약수가 아닌 눈이 1번 나오는 경우이므로 이때의 확률은

${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$

(2) P(1, 2)인 경우는 6의 약수의 눈이 1번, 6의 약수가 아닌 눈이 2번 나오는 경우이므로 이때의 확률은

${}_3C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$

(1), (2)에서 구하는 확률은

$\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$

55) 정답 ②

ㄱ. $H(17)=P(17\le X\le19)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{17-15}{2} \le Z \le \frac{19-15}{2}\right)=\mathrm{P}(1 \le Z \le 2)$이므로 (거짓)

ㄴ. $H(12)=\mathrm{P}(12 \le X \le 14)=\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2} \le Z \le -\frac{1}{2}\right)$

$H(16)=\mathrm{P}(16 \le X \le 18)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le Z \le \frac{3}{2}\right)$이므로 (참)

ㄷ. $H(13-t)=\mathrm{P}(13-t \le X \le 15-t)=\mathrm{P}\left(\frac{-2-t}{2} \le Z \le \frac{-t}{2}\right)$

$H(13+t)=\mathrm{P}(13+t \le X \le 15+t)=\mathrm{P}\left(\frac{-2+t}{2} \le Z \le \frac{+t}{2}\right)$

이므로 $H(13-t) \neq H(13+t)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

56) 정답 ④

직선 $y=2ax$가 곡선 $y=x^2+4x+4$와 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+4x+4=2ax$ 즉 $x^2+2(2-a)x+4=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x^2+2(2-a)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-4>0$, $(a-2)^2>4$에서 주사위의 눈의 수 a는 5, 6이어야 한다.

즉 직선 $y=2ax$가 곡선 $y=x^2+4x+4$와 서로 다른 두 점에서 만날 확률을 p라 하면 $p=\frac{1}{3}$이다.

주사위를 200번 던질 때, 직선 $y=2ax$가 곡선 $y=x^2+4x+4$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 그려지는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=200\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{400}{9}$

따라서 $\mathrm{V}(3X+1)=9\mathrm{V}(X)=400$

57) 정답 10

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=a$이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=6$에서

$a+c=6$ ⋯ ㉠

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{\mathrm{FC}}=8$에서

$a-c+r=8$ ⋯ ㉡

$\overline{\mathrm{F'P}}=\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QF}}=2a$

㉠과 ㉡에서 $2a=14-r$

즉 $\overline{\mathrm{F'P}}=14-r$, $\overline{\mathrm{F'C}}=c+a+r=6+r$이고,

삼각형 $\mathrm{PF'C}$에서 $\overline{\mathrm{F'C}}^2=\overline{\mathrm{F'P}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로

$(6+r)^2=(14-r)^2+r^2$

$r^2+12r+36=r^2-28r+196+r^2$

$r^2-40r+150=0$, $r=20\pm4\sqrt{15}$

$14-r>0$에서 $r<14$이므로 $r=20-4\sqrt{15}$

그러므로 $a=2\sqrt{15}-3$이고 장축의 길이는 $4\sqrt{15}-6$이다.

따라서 $p=4$, $q=6$이므로 $p+q=10$이다.

58) 정답 ③

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=-4$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{17}$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\times6+2^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-8$

에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$에서

$6=2\times5\times\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{3}{5}$

평행사변형 ABCD에서 네 삼각형 OAB, OBC, OCD, ODA의 넓이가 모두 같으므로 평행사변형 ABCD의 넓이는

$4\times\left(\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\times\sin\theta\right)=4\times\left(\frac{1}{2}\times2\times5\times\frac{4}{5}\right)=16$

59) 정답 ①

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$에서

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

따라서 점 P가 나타내는 도형 S는 중심의 좌표가 $(2, 2, 8)$이고 반지름의 길이가 $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3$인 구이다.

도형 S와 평면 $2x-2y+z+k=0$이 만나려면 구의 중심과 평면 사이의 거리가 반지름의 길이보다 작거나 같아야 하므로

$\frac{|8+k|}{3}\le3$

따라서 $-17\le k\le1$이므로 $M-m=1-(-17)=18$

60) 정답 48

구의 중심을 C라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=3$

$\overline{\mathrm{CH}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{HB}}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\angle\mathrm{CBA}=\frac{\pi}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$=9+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}=2\overrightarrow{\mathrm{CM}}$

$\angle(\mathrm{ACB})=\theta$라 하면 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2$

$\overline{\mathrm{CH}}=3$, $\overline{\mathrm{BH}}=6$이므로 직각삼각형 CHB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{CB}}^2=3^2+6^2=45$

즉 $|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=45$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=9+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\&=9+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}+|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2\\&=9+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}+45\\&=54+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}\end{aligned}$$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 값은 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}$의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$이 이루는 각의 크기를 θ' $(0\le\theta'\le\pi)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}$의 최솟값은 $\cos\theta'=-1$일 때 최소이다.

직각삼각형 CBM에서 $\overline{\mathrm{CB}}^2=45$이고,

$\overline{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로 직각삼각형 CBM에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2}=\sqrt{45+4^2}=\sqrt{61}$

즉, $|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|=\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{61}$

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=54+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}\\&\ge 54-2\times3\times\sqrt{61}\\&=54-6\sqrt{61}\end{aligned}$$

즉 $a=54$, $b=-6$이므로

$a+b=54-6=48$

61) 정답 ⑤

접선의 방정식을 세운 후에 $g(t)$를 t에 관한 식으로 표현하면 $g(t)=f(t)-tf'(t)$이다.

그러므로, $f(t)-tf'(t)=2t^2-2t^3e^{t^2}$이고, $\int_0^1 f(t)dt$의 값을 구하기 위해

양변을 t가 0부터 1까지 적분하면

$\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 tf'(t)dt=\int_0^1 2t^2-2t^3e^{t^2}dt$이다.

$\int_0^1 tf'(t)dt=f(1)-\int_0^1 f(t)dt$이고

$\int_0^1 2t^2-2t^3e^{t^2}dt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1-\int_0^1 2t^3e^{t^2}dt$이다. 뒷부분에서 $t^2=k$로 치환해 적분 계산을 하면

$\int_0^1 2t^2-2t^3e^{t^2}dt=-\frac{1}{3}$이다.

윗 식에 계산한 값들을 대입하고, $f(1)=e-1$을 대입하면,

$\int_0^1 f(t)dt=\frac{e}{2}-\frac{2}{3}$

62) 정답 10

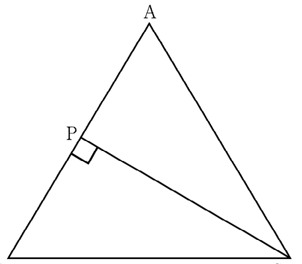
원 C와 직선 F′P가 점 P에서 접하므로 삼각형 F′PF는 직각삼각형이다. 선분 PF의 길이를 k라 하면 타원의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{PF'}}=14-k$이고, 삼각형 F′PF에서 피타고라스의 정리에 의해 $100=k^2+(14-k)^2$이므로 $k=6$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}=8$이고, 원 C의 중심을 점 C라 하고 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CF'}}=r+6$이므로 삼각형 CPF′에서 피타고라스의 정리에 의해 $(6+r)^2=r^2+64$이다. 계산하면

$r=\frac{7}{3}$이다. 따라서 $p=3$, $q=7$

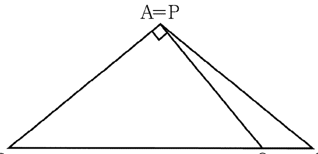
63) 정답 ①

(1) 각 $\angle\mathrm{BAC}$가 예각인 경우



그림과 같이 점 Q가 점 C와 일치할 때, 선분 PQ의 길이는 최댓값을 가진다. 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\tan(\angle\mathrm{ABC})=\sqrt{3}$이다.

(2) 각 $\angle\mathrm{BAC}$가 둔각인 경우



그림과 같이 점 P가 점 A와 일치할 때, 선분 PQ의 길이는 최댓값을 가진다.

이 때, $\tan(\angle\mathrm{ABC})=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. $\alpha>\beta$이므로 $\tan\alpha=\sqrt{3}$,

$\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan^2(\alpha-\beta)=\left(\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{3}{2}}\right)=\frac{3}{25}$

64) 정답 5

점 F′에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H라 하면, 점 H는 선분 PF를 1:2로 내분한다. 그러므로, $\overline{\mathrm{PH}}=a$라 하면, $\overline{\mathrm{HF}}=2a$이다. 삼각형 PF′H와 FF′H에서 F′H가 공통된 선분이므로 피타고라스의 정리를 써주면, $\overline{\mathrm{F'H}}^2=\overline{\mathrm{F'P}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2=\overline{\mathrm{F'F}}^2-\overline{\mathrm{HF}}^2$

$=(18-3a)^2-a^2=\left(2\sqrt{21}\right)^2-(2a)^2$

정리하면, $a^2-9a+20=0$으로 $a=4$ 또는 $a=5$에서 $a=5$인 경우는 $3<9-\sqrt{21}$이므로
불가능하다. ($a=4$인 경우 $6>9-\sqrt{21}$이므로 가능하다.)
$\overline{\mathrm{F'H}}=2\sqrt{5}$이므로 점 O와 직선 PF 사이의 거리는 $k=\sqrt{5}$,
$k^2=5$

65) 정답 819

$\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}=10$이고, $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}}=k$라 하면 주축의 길이는 $10-k$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AF}}-\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AF}}-(10-k)=10-k$,
$\overline{\mathrm{AF}}=20-2k$이므로 삼각형 AFF′의 둘레의 길이는 $10-k+20-2k+10=22$이다. 따라서 계산하면 $k=6$이고, 삼각형 PFF′의 넓이 S는 $3\sqrt{91}$이다. 따라서 $S^2=819$

66) 정답 ③

두 수의 합이 3으로 나누어떨어지는 경우는 (ⅰ) 두 수가 모두 3으로 나누어떨어지는 경우, (ⅱ) 두 수를 3으로 나누었을 때의 나머지가 각각 1, 2인 경우로 두 가지 이다.

$6k+3$개의 수 중 3으로 나누어떨어지는 수는 $2k+1$개, 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수도 $2k+1$개, 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수도 $2k+1$개다.

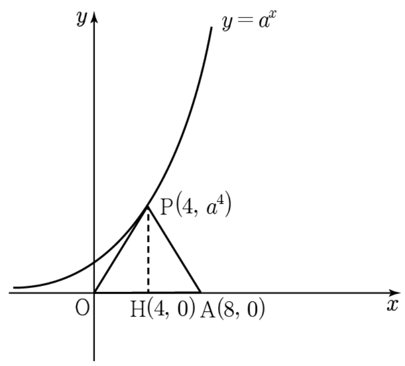
(ⅰ)의 경우:
　3으로 나누어떨어지는 두 수를 뽑으려면 3으로 나누어떨어지는 수 중 임의로 2개를 고르는 경우의 수와 같으므로 $\boxed{{}_{2k+1}\mathrm{C}_2}$가지이다.
(ⅱ)의 경우:
　3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수와 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수를 뽑는 경우의 수는 $\boxed{{}_{2k+1}\mathrm{C}_1\times{}_{2k+1}\mathrm{C}_1}$가지이다.
따라서 $f(k)={}_{2k+1}\mathrm{C}_2$이고 $g(k)={}_{2k+1}\mathrm{C}_1\times{}_{2k+1}\mathrm{C}_1=(2k+1)^2$이므로
$\dfrac{g(4)}{f(3)}=\dfrac{81}{21}=\dfrac{27}{7}$

67) 정답 21

4자리 수를 $1000a+100b+10c+d$라 하자.
1. $d=1,\ 3$일 때, 만족하는 경우의 수는 없다.
2. $d=5$일 때, $a+b+c=5$, $a\ge1$이므로 ${}_3\mathrm{H}_4=15$인데 5005의 경우 조건과
모순이므로 14가지
3. $d=7$일 때, $a+b+c=3$, $a\ge1$이므로 ${}_3\mathrm{H}_2=6$가지
4. $d=9$일 때, 1009 1가지

그러므로 다음과 같은 조건을 만족시키는 4자리수의 경우의 수는 $14+6+1=21$가지 이다.

68) 정답 ④



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OAP가 한 변의 길이가 8인 정삼각형이므로 선분 PH의 길이는 $4\sqrt{3}$이다.
따라서 $a^4=4\sqrt{3}$이고, $a^8=\left(4\sqrt{3}\right)^2=48$

69) 정답 ④

조건 (가)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 1\right)$에 대하여 대칭이다.
$xg(x)=f'(x)$이므로 조건 (나)에 의하여

$$\int_1^2 f'(x)dx=f(2)-f(1)=4 \qquad \cdots ㉠$$

$$\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx=\left[-\frac{f(x)}{x}\right]_1^2+\int_1^2\frac{f'(x)}{x}dx$$

$$=-\frac{f(2)}{2}+f(1)+\int_1^2 g(x)dx=5$$

함수 $g(x)$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 1\right)$에 대하여 대칭이므로

$$\int_1^2 g(x)dx=1$$

따라서 $-\dfrac{f(2)}{2}+f(1)=4 \qquad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에 의하여 $\dfrac{f(2)}{2}=8$, $f(2)=16$

70) 정답 ②

$\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=1}^{3}k\mathrm{P}(Y=k)$이고 $k\times\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(X=k)+\frac{k^2}{8}$ 이다.

$\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{3}\mathrm{P}(X=k)+\frac{k^2}{8}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1+4+9}{8}=\frac{25}{12}$

71) 정답 24

$x^2-y^2=k^2$의 양변을 k^2으로 나누면 $\frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{k^2}=1$ 이고 쌍곡선의 점근선의 기울기는 ±1,
초점의 좌표는 $(\sqrt{2}k,\ 0)$, $(-\sqrt{2}k,\ 0)$이다.

직선 PQ가 기울기가 1인 직선과 수직이기 때문에, 직선 PQ와 x축의 양의 방향과 이루는 각도의 크기는 $\frac{3}{4}\pi$이고, $\angle\mathrm{FQO}=\frac{\pi}{4}$,
$\angle\mathrm{FQF'}=\frac{\pi}{2}$ 이다. 또한 $\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{F'Q}}=2k$
$\overline{\mathrm{PF}}=x$라 하면, 쌍곡선의 정의에 따라 $\overline{\mathrm{PF'}}=2k+x$이고
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{FQ}}-\overline{\mathrm{PF}}=2k-x$
삼각형 PQF'의 둘레의 길이는
$\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2k+2k-x+2k+x=6k$
따라서 $k=4$이다.
또한 삼각형 PQF'은 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{QP}}^2+\overline{\mathrm{QF'}}^2$이고,
$x=2$
따라서 삼각형 PQF'의 넓이 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QF'}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=24$

72) 정답 ②

점 $\mathrm{O_2}$를 중심으로 하는 반원의 반지름을 r라 하면 $\overline{\mathrm{AO_1}}=1$,
$\overline{\mathrm{O_1O_2}}=1-r$, $\overline{\mathrm{O_2B}}=r$이다.
$\angle\mathrm{PAB}=\theta$이므로 $\sin\theta=\frac{r}{2-r}$ 따라서 $r=\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}$
… ㉠
$\overline{\mathrm{QQ_2}}=r$이고 $\angle\mathrm{QO_2O_1}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로
삼각형 $\mathrm{QO_1O_2}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ_2}}\times\overline{\mathrm{O_2O_1}}\times\sin(\angle\mathrm{QO_2O_1})$
$=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(1-r)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ … ㉡
㉡에 ㉠을 대입하면
$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\times\left(1-\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이고
$\lim_{\theta\to0+}r=0$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\times\left(1-\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\frac{1}{\theta}=1$$

73) 정답 ④

두 수의 곱이 홀수가 되기 위해서는 두 수 모두 홀수여야 한다.
따라서, $f(3)$과 $f(5)$의 값은 홀수이므로 다음과 같이 3가지 케이스로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(3)=3$, $f(5)=3$일 때

$x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이므로 $f(2)$의 값으로 가능한 것은 2, 3이고 $f(4)=3$이다.
또한 $f(6)$의 값으로 가능한 것은 3, 4, 5, 6이 있다.
곱의 법칙에 의하여 $f(3)=3$, $f(5)=3$일 때의 경우의 수는
$2\times1\times4=8$

(ⅱ) $f(3)=3$, $f(5)=5$일 때

$x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이므로 $f(2)$의 값으로 가능한 것은 2, 3이고, $f(4)$의 값으로 가능한 것은 3, 4, 5이다. 또한 $f(6)$의 값으로 가능한 것은 5, 6이다.
곱의 법칙에 의하여 $f(3)=3$, $f(5)=5$일 때의 경우의 수는
$2\times3\times2=12$

(ⅲ) $f(3)=5$, $f(5)=5$일 때

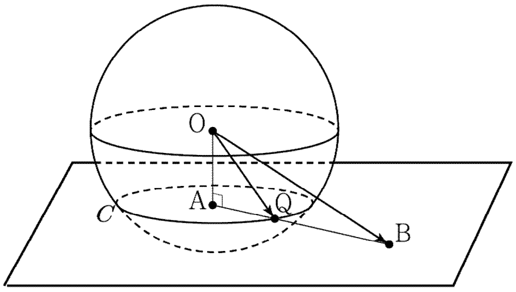
$x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이므로 $f(2)$의 값으로 가능한 것은 2, 3, 4, 5이고, $f(4)=5$이다. 또한 $f(6)$의 값으로 가능한 것은 5, 6이 있다.
곱의 법칙에 의하여 $f(3)=5$, $f(5)=5$일 때의 경우의 수는
$4\times1\times2=8$

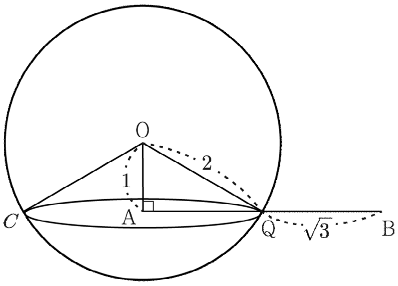
이상에서 구하고자 하는 경우의 수는 $8+12+8=28$

74) 정답 ③

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}})$
$=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}})+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$이고
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}})$는 수직이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}})=0$이다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}})+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=1+2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$이고
$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=\sqrt{3}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=1^2+2(\sqrt{3})^2=7$





75) 정답 ④

세 사람이 네 자루의 연필을 나누어 가질 때, 적어도 한 개씩 연필을 나누어 가지려면 어떤 사람은 두 자루의 연필을, 나머지 두 명의 사람은 각각 한 자루의 연필을 가져야 한다.

A가 2자루의 연필을 가졌다고 가정하면 A, B, C 세 사람은 각각 짝수, 홀수, 홀수개의 연필을 가졌으므로 A, B, C 세 사람이 각각 볼펜을 나눠가지는 케이스는 다음과 같다.

(ⅰ) A, B, C가 각각 5, 0, 0개 나눠가지는 경우

오직 1가지 존재한다.

(ⅱ) A, B, C가 각각 3, 2, 0개 나눠가지는 경우

서로 다른 5개의 볼펜 중 A에게 주어질 3개를 택하고 나머지 2개를 B 또는 C에게 나누어 주어야 하므로 경우의 수는 ${}_5C_3 \times 2!$이다.

(ⅲ) A, B, C가 각각 1, 4, 0개 나눠가지는 경우

서로 다른 5개의 볼펜 중 A에게 주어질 1개를 택하고 나머지 4개를 B 또는 C에게 나누어 주어야 하므로 경우의 수는 $5\times 2!$이다.

(ⅳ) A, B, C가 각각 1, 2, 2개 나눠가지는 경우

서로 다른 5개의 볼펜 중 A에게 주어질 1개를 택하고 나머지 4개 중 B에게 주어질 2개를 택하면 되므로 경우의 수는 $5\times {}_4C_2$이다.

이상에서 A가 두 자루의 연필을 받았을 때, A, B, C가 볼펜을 나누어 가지는 경우의 수는 $1+20+10+30=61$

B 또는 C가 두자루의 연필을 받는 경우도 각각 61로 동일하므로 구하고자 하는 경우의 수는

$3\times 61=183$

76) 정답 ①

$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$이므로 $\overrightarrow{AP}$를 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$의 종점으로 평행이동 시키면

점 Q의 자취는 중심이 선분 BC의 중점이고, 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이다.

따라서 구하고자 하는 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BQ}$에 대하여 선분 BC의 중점을 M이라 할 때,

$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BQ}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ})\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MQ})=\overrightarrow{MQ}\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM})+|\overrightarrow{MQ}|^2$

이다.

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$이므로 $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{AC}$의 최댓값은 $8\times 2\sqrt{3}$이고

$|\overrightarrow{MQ}|^2=12$이므로

$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BQ}$의 최댓값은 $16\sqrt{3}+12$

77) 정답 ②

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $G(x)=\int_0^x g(t)dt$라 하면

$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt<\int_{x_1}^{x_2} g(t)\,dt$는 $F(x_2)-F(x_1)<G(x_2)-G(x_1)$이다.… ㉠

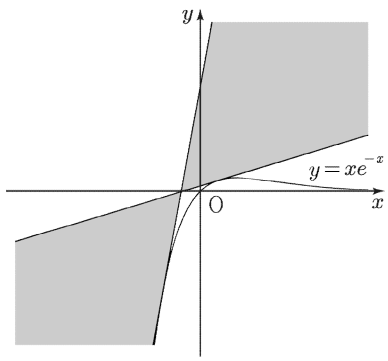
㉠을 정리하면 $G(x_1)-F(x_1)<G(x_2)-F(x_2)$이므로

함수 $G(x)-F(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이다.

함수 $G(x)-F(x)$는 미분가능한 함수이므로

$\{G(x)-F(x)\}'\geq 0$이고 $g(x)\geq f(x)$ … ㉡

함수 $g(x)$의 그래프는 점 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$을 지나는 직선이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)\geq f(x)$를 만족시키기 위해서는 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음의 그림에서 칠해진 영역에 존재해야한다.



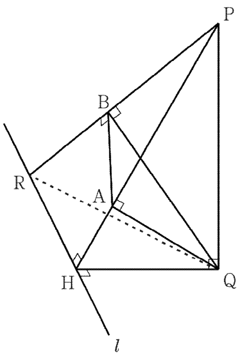
점 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$에서 곡선 $y=xe^{-x}$에 그은 두 접선의 기울기를 구하기

위해 접점의 좌표를 $(t,\ te^{-t})$라 하면, 접선의 방정식은
$y=(1-t)e^{-t}(x-t)+te^{-t}$이다.
이 직선이 점 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$을 지나므로 $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=0$을 접선의 방정식에 대입하여 풀면 $t=-1$, $t=\dfrac{1}{2}$이다.

$f'(-1)=2e$이고, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$이므로 $M=2e$, $m=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$

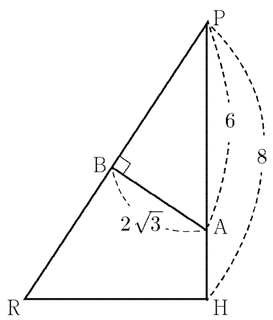
따라서, $Mm=\sqrt{e}$

78) 정답 ⑤



위 그림과 같이 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자.
주어진 조건에 의하여 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발이 Q이므로 삼수선의 정리에 의하여 선분 HQ와 직선 l은 수직이다.
이면각의 정의에 의하여 $\angle$PHQ는 두 평면 α와 β가 이루는 각이다.
두 평면 α와 β 사이의 이면각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$이고, 조건 (가)에 의하여 $\overline{PQ}=4\sqrt{3}$이므로 $\overline{PH}=8$, $\overline{QH}=4$이다.

점 Q에서 평면 α에 내린 수선의 발을 A라 하면, 점 A는 선분 PH 위의 점이다.
두 삼각형 PHQ와 PQA는 서로 닮음이므로 $\overline{AQ}=2\sqrt{3}$, $\overline{AP}=6$
평면 α와 평면 PQR의 교선이 직선 PR이므로 점 Q에서 선분 PR에 내린 수선의 발을 B라 하면 $\overline{QA}\perp\alpha$, $\overline{QB}\perp\overline{PR}$이므로 삼수선 정리에 의하여 두 선분 PR과 AB는 수직이다.
조건 (나)에 의하여 선분 QB와 선분 AB가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AQ}=2\sqrt{3}$이다.



$\overline{PB}^2=\overline{PA}^2-\overline{AB}^2=36-12=24$에서 $\overline{PB}=2\sqrt{6}$ 이다.
$\dfrac{\overline{PB}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{PH}}{\overline{RH}}$이므로 $\overline{RH}=4\sqrt{2}$이고, $\overline{RQ}^2=\overline{RH}^2+\overline{QH}^2=48$에서 $\overline{RQ}=4\sqrt{3}$이다. 따라서 삼각형 PQR의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\overline{RQ}\times\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}=24$

79) 정답 18

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로
$\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim\limits_{x\to k+}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}$
$f'(x)=(x^2+2x+1)e^{x+1}=(x+1)^2e^{x+1}\geq0$이고,
삼차함수 $g(x)$는 감소하는 함수이므로 $g'(x)\leq0$
$f'(k)=g'(k)$를 만족시키기 위해서는 $f'(k)=g'(k)=0$이다.

$f'(k)=0$을 만족시키는 실수 k의 값은 $k=-1$이다. 따라서
$g'(-1)=0$이고, $f(k)=g(k)$이므로, $f(-1)=g(-1)=2$

삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a<0)$이라 하면, $g'(x)\leq0$,
$g'(-1)=0$을 만족시키므로 $g'(x)=3a(x+1)^2$ $(a<0)$,
$g(x)=a(x+1)^3+C$ (단, C는 적분상수)
$h(0)=0$이므로 $g(0)=0$이고 $g(-1)=2$이므로
$g(x)=-2(x+1)^3+2$이다. 따라서 $g(-3)=18$

80) 정답 ④

함수 $g(x)$를 $g(x)=\dfrac{x}{f(x)}-\dfrac{1}{2}$라 하면 $\dfrac{x}{f(x)}\leq\dfrac{1}{2}$이므로 $g(x)\leq0$
또한 $f(1)=2$이므로 $g(1)=0$
$g(x)\leq0$, $g(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 최댓값을 갖는다.
$g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $g'(1)=0$이다.
$g'(x)=\dfrac{f(x)-xf'(x)}{\{f(x)\}^2}$에서 $g'(1)=\dfrac{f(1)-f'(1)}{\{f(1)\}^2}$이고, $g'(1)=0$이므로
$f'(1)=f(1)=2$이다. 따라서 $f'(1)=2$

81) 정답 ④

함수 $f(x)$가 미분가능하므로 조건 (가)에 의하여 $f(0)=9$, $f'(0)=6$
조건 (나)의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f'(0)=2\sqrt{a}=6$이므로 $a=9$
따라서 $f'(x)=2\cos x(\sin x+1)\sqrt{\sin^2x+2\sin x+9}$ 이므로
$f(x)=\displaystyle\int 2\cos x(\sin x+1)\sqrt{\sin^2x+2\sin x+9}\,dx$
$\sin x+1=t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$f(x)=\int 2\cos x(\sin x+1)\sqrt{\sin^2 x+2\sin x+9}\,dx=\int 2t\sqrt{t^2+8}\,dt$

$t^2+8=p$로 치환하면 $2t\dfrac{dt}{dp}=1$이므로

$\int 2t\sqrt{t^2+8}\,dt=\int \sqrt{p}\,dp=\dfrac{2}{3}p^{\frac{3}{2}}+C=\dfrac{2}{3}(t^2+8)^{\frac{3}{2}}+C$ (단, C는 적분상수)

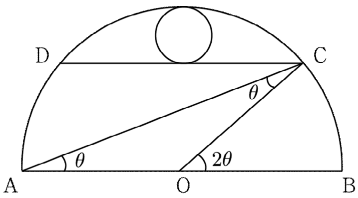
$\sin x+1=t$이므로

$f(x)=\dfrac{2}{3}(t^2+8)^{\frac{3}{2}}+C=\dfrac{2}{3}(\sin^2 x+2\sin x+9)^{\frac{3}{2}}+C$

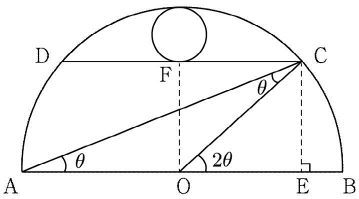
$f(0)=9$이므로 $C=-9$ 따라서

$f(x)=\dfrac{2}{3}(\sin^2 x+2\sin x+9)^{\frac{3}{2}}-9$이므로 $f(3\pi)=9$

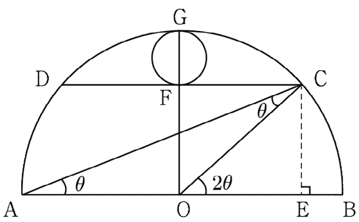
82) 정답 ①



선분 AB의 중점을 O라 하면 삼각형 OAC는 이등변삼각형이다.
따라서 $\angle\mathrm{CAO}=\angle\mathrm{OCA}=\theta$이고, $\angle\mathrm{COB}=2\theta$



점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E, 점 O에서 선분 DC에 내린 수선의 발을 F라 하면, $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{OC}}\times\sin 2\theta=\sin 2\theta$이다.



작은 원과 반원의 접점을 G라 할 때, 세 점 O, F, G는 한 직선 위에 있다. 따라서 $\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{FG}}=1$이고, $\overline{\mathrm{OF}}=\sin 2\theta$, $\overline{\mathrm{FG}}=2r(\theta)$

$\sin 2\theta+2r(\theta)=1$이므로 $r(\theta)=\dfrac{1-\sin 2\theta}{2}$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^2}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\frac{1-\sin 2\theta}{2}}{\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^2}$

$\dfrac{\pi}{4}-\theta=t$로 치환하면

$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\frac{1-\sin 2\theta}{2}}{\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{1-\cos 2t}{2t^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)}{2t^2(1+\cos 2t)}$

$\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{\sin^2 2t}{2t^2(1+\cos 2t)}=1$

83) 정답 20

A의 무게를 확률변수 A′, B의 무게를 확률변수 B′이라 하자.
A의 무게가 $m-5$ 이하일 확률은

$\mathrm{P}(\mathrm{A}'\le m-5)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{-5}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\le -1)=0.1587$이므로 $\sigma=5$

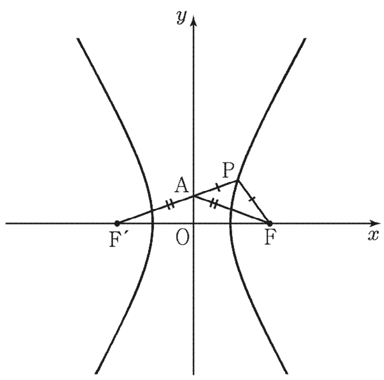
A의 무게가 $m+5$ 이상일 확률과 B의 무게가 $m+5$ 이하일 확률이 같으므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A}'\ge m+5)=\mathrm{P}(\mathrm{B}'\le m+5)$이고

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{5}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{5-m}{2\sigma}\right)$이다. 표준정규분포 곡선의 대칭성에

의해 $\dfrac{5}{\sigma}=-\dfrac{5-m}{2\sigma}=1\left(\text{or }\ \dfrac{5}{\sigma}+\dfrac{5-m}{2\sigma}=0\right)$이고 $m=15$이다.

따라서 $m+\sigma=20$

84) 정답 ①



점 A가 y축 위의 점이고 두 초점 F, F′이 y축으로부터 같은 거리에 있으므로

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}$이다. $\angle\mathrm{AF'F}=\angle\mathrm{AFF'}=\dfrac{\pi}{12}$이므로 $\angle\mathrm{F'AF}=\dfrac{5}{6}\pi$

이고, $\angle\mathrm{PAF}=\dfrac{\pi}{6}$이다. 선분 AF의 중점을 M이라 할 때,

$\overline{\mathrm{PA}}\cos(\angle\mathrm{PAF})=\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3}$이고, $\overline{\mathrm{AF}}=2\sqrt{3}$

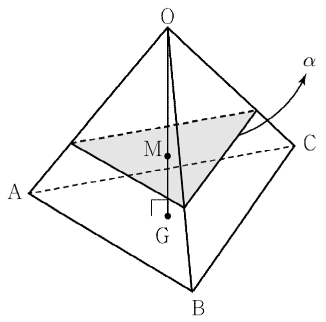
쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$이고 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AF'}}$ 이고, $\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AF}}=2\sqrt{3}$ 이므로 $a=\sqrt{3}$

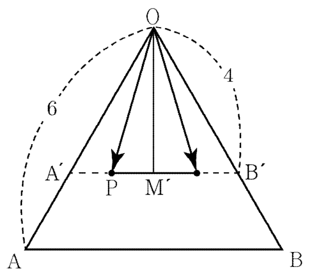
85) 정답 ③

삼각형 ABC의 무게중심이 G고 $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$는 정사면체의 높이이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=2\sqrt{6}$ $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=16$이므로 점 P에서 직선 OG에 내린 수선의 발을 M이라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ 이다.

점 M을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$인 평면을 α라 할 때, 점 P는 평면 α와 정사면체가 만나는 교선 위에 존재한다.



평면 α와 두 선분 OA, OB가 만나는 점을 각각 A′, B′이라 할 때, 삼각형 OA′B′은 한 변의 길이가 4인 정삼각형이고, 선분 A′B′의 중점을 M′이라 할 때, 조건 (나)에 의하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최댓값이 $\sqrt{13}$이므로 평면 OAB에서의 점 P의 자취는 아래 그림과 같다.



$\overline{\mathrm{OP}}^2=\overline{\mathrm{OM'}}^2+\overline{\mathrm{M'P}}^2$이므로 $\overline{\mathrm{M'P}}^2=1$ 따라서 평면 OAB에서 점 P가 나타내는 길이는 2이다. 평면 OAC, 평면 OBC에도 같은 방식으로 점 P를 나타낼 수 있으므로
정답은 $2\times3=6$

86) 정답 ①

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수관계이므로 $g(f(x))=x$이므로 $g'(f(x))f'(x)=1$이다. $f(k)=\dfrac{k^2}{n}+k$, $f'(k)=\dfrac{2k}{n}+k$이므로

$g'(f(k))f'(k)=g'\left(\dfrac{k^2}{n}+k\right)\left(\dfrac{2k}{n}+1\right)=1$

따라서 $g'\left(\dfrac{k^2}{n}+k\right)=\dfrac{1}{\dfrac{2k}{n}+1}$ $\cdots$ ㉠

㉠에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}g'\left(\dfrac{k^2}{n}+k\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\dfrac{2k}{n}+1}$ 이고, 급수를 정적분으로 바꾸어 계산하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k}=\frac{1}{\dfrac{2k}{n}+1}=\int_0^1\frac{1}{2x+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ln(2x+1)\Big]_0^1=\frac{1}{2}(\ln3-\ln1)=\frac{1}{2}\ln3$$

87) 정답 ③

경호와 우현이가 각각의 게임서 이길 확률이 같고, 게임에서 비기는 경우는 없으므로 경호와 우현이가 각각의 게임에서 이길 확률은 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

여섯 번의 게임에서 얻을 수 있는 점수의 총점이 7점이다. 경호의 점수가 우현이의 점수보다 1점 높아야 하므로 경호의 점수의 총점이 4점, 우현이의 점수의 총점이 3점이다.

(ⅰ) 경호가 여섯 번째 게임을 이긴 경우

앞선 5번의 게임 중 2번을 이겨야 한다. 독립시행의 확률을 이용하여 확률을 계산하면 ${}_5\mathrm{C}_2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ 이다. 6번째 게임을 이길 확률인 $\dfrac{1}{2}$을 곱하면

${}_5\mathrm{C}_2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{10}{64}$

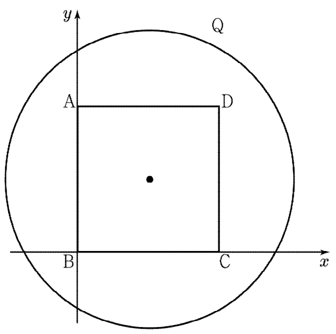
(ⅱ) 경호가 여섯 번째 게임을 진 경우

앞선 5번의 게임 중 4번을 이겨야 한다. 독립시행의 확률을 이용하여 확률을 계산하면 ${}_5\mathrm{C}_4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1$ 이다. 6번째 게임을 질 확률인 $\dfrac{1}{2}$을 곱하면 ${}_5\mathrm{C}_4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{64}$

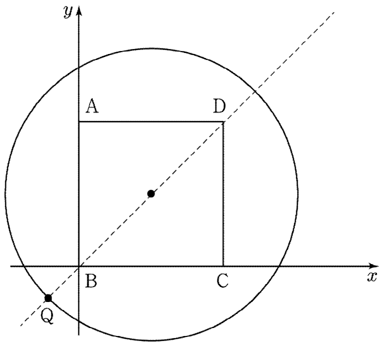
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 경호가 얻은 점수의 총점이 우현이가 얻은 점수의 총점보다 1점 높을 확률은 $\dfrac{10}{64}+\dfrac{5}{64}=\dfrac{15}{64}$

88) 정답 ④

좌표평면에 정사각형 ABCD 를 점 B 를 원점으로 하여 좌표를 나타내면 점 $A(0, 2)$, $B(0, 0)$, $C(2, 0)$, $D(2, 2)$ 이고, 점 $Q(x, y)$ 라 하자. $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{CQ} = 2$ 이므로
$(x, y-2) \cdot (x-2, y) = x(x-2) + y(y-2) = 2$ 이다.
따라서 자취의 방정식은 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 이고 점 Q 의 자취는 아래의 그림과 같다.



점 Q 는 점 P 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1 인 원 위에 있으므로, $|\overrightarrow{QP}| = 1$ 이다.
$|\overrightarrow{DP}| = |\overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QD}| = |\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{DQ}| \le |\overrightarrow{QP}| + |\overrightarrow{DQ}|$ (단, 등호는 두 벡터 $\overrightarrow{QP}$ 와 $\overrightarrow{DQ}$ 가 평행할 때 성립)이고, $|\overrightarrow{DQ}|$ 의 최댓값은 점 Q 가 다음 그림과 같은 위치에 있을 때 $\sqrt{2}+2$ 를 갖는다.



따라서 $|\overrightarrow{DP}| = |\overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QD}| = |\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{DQ}| \le |\overrightarrow{QP}| + |\overrightarrow{DQ}|$
$= \sqrt{2} + 2 + 1 = 3 + \sqrt{2}$

89) 정답 ②

세 점 $\left(0, a\sin b + \frac{1}{a}\right)$, $(1, 0)$, $(c, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \left(a\sin b + \frac{1}{a}\right) \times (c-1) = \frac{2}{3a}$ … ㉠

$f(1) = 0$ 이므로 $a\sin(\pi + b) + \frac{1}{a} = 0$ 이므로 $\frac{1}{a} = a\sin b$ … ㉡

㉡의 결과인 $\frac{1}{a} = a\sin b$에서 $a\sin b$ 대신에 $\frac{1}{a}$대입하면

$\frac{1}{2}(a\sin b + a\sin b) \times (c-1) = \frac{2a}{3}\sin b$

$a > 0$, $0 < b < 3$ 이므로 $a\sin b \neq 0$ 이다. 따라서 $c = \frac{5}{3}$

삼각함수의 그래프의 개형에 의해 $f'\left(\frac{1+c}{2}\right) = 0$ 이고, $c = \frac{5}{3}$ 이므로 $f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ 이다.

따라서 $f'(x) = a\pi\cos(\pi x + b)$ 이므로 $a\pi\cos\left(\frac{4}{3}\pi + b\right) = 0$

a가 양수이므로 $\cos\left(\frac{4}{3}\pi + b\right) = 0$ 이다. 따라서

$\frac{4}{3}\pi + b = \frac{2n-1}{2}\pi$ (단, n은 정수)

$b = \left(\frac{2n-1}{2} - \frac{4}{3}\right)\pi = \frac{6n-11}{6}\pi$, … , $-\frac{5}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$, …
이고,

$0 < b < 3 < \pi$이므로 만족하는 $b = \frac{1}{6}\pi$ 이다.

$b = \frac{1}{6}\pi$를 ㉡의 결과에 대입하면 $\frac{1}{a} = a\sin\frac{\pi}{6} = \frac{a}{2}$ 이고, $a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{2}$

따라서 $abc = \sqrt{2} \times \frac{\pi}{6} \times \frac{5}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{18}\pi$

90) 정답 ①

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\sin x)}{\cos x} dx$ 에서 $\sin x = t\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면

$\cos x \frac{dx}{dt} = 1$ 이고, $x = -\frac{\pi}{4}$ 일 때 $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 $x = \frac{\pi}{4}$ 일 때 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\sin x)}{\cos x} dx = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{f(t)}{1-t^2} dt$$

$\frac{f(t)}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{f(t)}{t-1} - \frac{f(t)}{t+1}\right)$이므로

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{f(t)}{1-t^2} dt = -\frac{1}{2}\left\{\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{f(t)}{t-1} dt - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{f(t)}{t+1} dt\right\} \quad \cdots ㉠$$

$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{f(t)}{t-k} dt = k$ $(k = -1, 1)$의 식에 각각 $k = -1$, 1을 대입하면

$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{f(t)}{t+1} dt = -1$, $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{f(t)}{t-1} dt = 1$ 이다.

이를 ㉠에 대입하면 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\sin x)}{\cos x} dx = -\frac{1}{2}(1+1) = -1$

91) 정답 ④

$f(x)=e^{|x|}(x+k)$ 라 할 때, $f(x)=\begin{cases} e^{x}(x+k) & (x \geq 0) \\ e^{-x}(x+k) & (x<0) \end{cases}$ 이고, 원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접점을 $(t,\ f(t))$ 라 하자.

$t>0$ 일 때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 방정식은
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 이고, 이 접선이 원점을 지나므로
$f(t)=tf'(t)$ 이다. $f(x)=(x+k)e^{x}$, $f'(x)=(x+k+1)e^{x}$ 이므로
$f(t)=tf'(t)$ 에 대입하여 정리하면
$(t+k)e^{t}=t(t+k+1)e^{t}$
따라서 $t^2+kt-k=0$ $(t>0,\ k>0)$
이차방정식 $t^2+kt-k=0$ 의 판별식 $D=k^2+4k>0$ 이고, 두 근의 곱이 음수이므로 방정식 $t^2+kt-k=0$ 의 양의 실근 t 가 한 개 존재한다.

따라서 $x>0$ 에서 함수 $f(x)=e^{|x|}(x+k)$ 의 그래프에 접하고 원점을 지나는 직선의 개수는 1 이다. 주어진 조건에 의하여 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}(x+k)$ 에 오직 하나의 접선만 그을 수 있다. 따라서 $x<0$ 에서 함수 $f(x)=e^{|x|}(x+k)$ 의 그래프에 접하고 원점을 지나는 직선이 존재할 수 없다.

$t<0$ 일 때 함수 $f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 방정식은
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 이고, 이 접선이 원점을
지나므로 $f(t)=tf'(t)$ 이다. $f(x)=(x+k)e^{-x}$ 를 대입하여 정리하면
$t^2+kt+k=0$ $(t<0,\ k>0)$ 이차방정식 $t^2+kt+k=0$ 의 판별식이
$D=k^2-4k$ 이고,
두 근의 합은 $-k$, 두 근의 곱은 k 이다.

(ⅰ) $D<0$ 인 경우
방정식 $t^2+kt+k=0$ $(t<0)$ 의 실근이 존재하지 않는다.
$D<0 \Leftrightarrow k^2-4k<0$, 즉 $0<k<4$ 이다.

(ⅱ) $D>0$ 인 경우
이차방정식 실근이 존재하고 두 근의 합이 음수, 곱이 양수이므로 방정식 $t^2+kt+k=0$ 은 음의 실근을 갖는다.

(ⅲ) $D=0$ 인 경우
$k^2-4k=0$ 이므로 자연수 $k=4$ 이다. $k=4$ 일 때 방정식 $t^2+kt+k=0$ 은 $t^2+4t+4=0$ 이고, 이는 음의 실근 $t=-2$ 를 갖는다.

이상에서 방정식 $t^2+kt+k=0$ 의 음의 실근이 존재하지 않기 위해서는 $0<k<4$ 이다.
따라서 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}(x+k)$ 에 오직 하나의 접선만 그을 수 있도록 하는 k 의 값의 범위는 $0<k<4$ 이다.
이를 만족하는 자연수 $k=1,\ 2,\ 3$ 이므로
모든 자연수 k 의 값의 합은 6

92) 정답 10

해설1)

$x=0$ 을 양변에 대입하면 $f'(0)=\dfrac{4}{3}$ 임을 알 수 있다.

주어진 식의 양변을 미분하면 $f''(x)=f'(x)+\dfrac{1}{f'(x)}$ 이고, 실수 전체의 집합에서 $f'(x)>0$ 을 만족시키므로 양변을 $f'(x)+\dfrac{1}{f'(x)}$ 로 나눌 수 있다. 나눠주면 $\dfrac{f''(x)}{f'(x)+\dfrac{1}{f'(x)}}=1$ 이고, 양변을 x 에 관해 적분할 수 있다.

$\displaystyle\int \frac{f''(x)}{f'(x)+\frac{1}{f'(x)}}dx=\int 1dx$ 이면, $\displaystyle\int \frac{f''(x)}{f'(x)+\frac{1}{f'(x)}}dx=x+C_1$
(단, C_1은 적분상수)이다. 좌변에서 $f'(x)=t$ 로 치환하면
$f''(x)dx=dt$ 이므로 $\displaystyle\int \frac{1}{t+\frac{1}{t}}dt=\int \frac{t}{t^2+1}dt$ 로 변형할 수 있고,

$\displaystyle\int \frac{t}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+C_2$ (단, C_2는 적분상수)이다.

$\dfrac{1}{2}\ln\{f'(x)^2+1\}=x+C_1-C_2$ 에서 $f'(0)=\dfrac{4}{3}$ 이므로 $x=0$ 을 양변에 대입하면 $C_1-C_2=\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$ 임을 알 수 있다.

$\ln\left\{\sqrt{f'(x)^2+1}\right\}=\ln\left(\dfrac{5}{3}e^{x}\right)$ 이므로 $\sqrt{f'(x)^2+1}=\dfrac{5}{3}e^{x}$ 이고
$x=\ln3$ 부터 $x=2\ln3$ 까지 곡선 $y=f(x)$ 의 곡선의 길이는
$\displaystyle\int_{\ln3}^{2\ln3}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_{\ln3}^{2\ln3}\frac{5}{3}e^{x}dx=10$ 이다.

해설2)

주어진 식의 양변을 미분하면 $f''(x)=f'(x)+\dfrac{1}{f'(x)}$ 이고, 양변에 $f'(x)$ 를 곱하면 $f'(x)f''(x)=\{f'(x)\}^2+1$ 이다.
$f'(x)f''(x)=\{f'(x)\}^2+1=h(x)$ 로 두자. ($f'(x)f''(x)=h(x)$, $\{f'(x)\}^2+1=h(x)$ 를 동시에 만족한다!)
$\{f'(x)\}^2+1=h(x)$ 의 양변을 미분하면 $2f'(x)f''(x)=h'(x)$ 이다.
또한, $f'(x)f''(x)=h(x)$ 이므로 $2f'(x)f''(x)=2h(x)$ 이다. 즉,
$2h(x)=h'(x)$ 이다. $h(x)=\{f'(x)\}^2+1>0$ 이므로 $2h(x)=h'(x)$ 의 양변을 $h(x)$ 로 나누면 $\dfrac{h'(x)}{h(x)}=2$ 이고, $\ln\{h(x)\}=2x+c$ 이고,
$h(x)=e^{2x+c}$ 이다. $h(x)=\{f'(x)\}^2+1$ 에서
$h(0)=\{f'(0)\}^2+1=\dfrac{25}{9}$ 이므로, $h(x)=e^{2x+c}$ 에 $x=0$ 을 대입을 하면 $h(x)=\dfrac{25}{9}e^{2x}$ 를 얻을 수 있다. 구하고자 하는 곡선의 길이는
$\displaystyle\int_{\ln3}^{2\ln3}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_{\ln3}^{2\ln3}\sqrt{h(x)}\,dx=\int_{\ln3}^{2\ln3}\frac{5}{3}e^{x}dx=10$ 이다.

93) 정답 60

함수 $g(x)$ 가 실수 전체 집합에서 정의되므로 $f(x)>0$ 을 만족하고,

$f(x)=t$ 라고 치환하면 $g(x)$ 의 극솟값(최솟값은) $f(x)=1$ 이 존재할 때, 2라는 것을 알 수 있다. $f(x)=1$을 만족시키는 x가 α로 오직 하나인 것이므로 $f(x)=(x-\alpha)^2+1$ 이고 (나)조건으로 넘어가보자.

(나)의 식을 전개하면

$\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+\sqrt{2}}\left(f'(x)\{f(x)\}^2+\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}+2f'(x)\right)dx$이고,

각각 적분해주면 $\displaystyle\left[\frac{1}{3}\{f(x)\}^3-\frac{1}{f(x)}+2f(x)\right]_{\alpha}^{\alpha+\sqrt{2}}$ 이고 $f(\alpha)=1$,

$f(\alpha+\sqrt{2})=3$이므로

대입해주면 $\dfrac{40}{3}$이 나오고 이 값이 $\dfrac{10}{3}\alpha$와 같으므로

$\alpha=4$임을 알 수 있다.

답 구하는 식인 $\displaystyle\int_4^6\left(f'(x)f(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}\right)dx$ 을 정리하면

$\displaystyle\left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2+\ln f(x)\right]_4^6$이므로 계산하면 $12+\ln 5$

따라서 정답은 60이다.

94) 정답 25

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 이다.

이 직선과 점 $\left(t,\ f(t)+\dfrac{1}{t}\right)$과의 거리는

$\left|\dfrac{1}{t}\right|\times\dfrac{1}{\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}}$ 이므로

$\dfrac{1}{g(t)}=\left|\dfrac{1}{t}\right|\times\dfrac{1}{\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}}$ 이다. $t>0$ 이므로

$g(t)=t\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}$

양변을 t로 나누면 $\dfrac{g(t)}{t}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}$

$f(x)$의 도함수가 연속이기 때문에 $\displaystyle\lim_{t\to0+}\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}$ 의 값이 존재한다.

따라서 $\dfrac{g(t)}{t}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}$ 에서 $\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{t}$ 의 값이 존재한다.

$\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{t}$ 가 존재하고 함수 $g(x)$가 다항함수이므로

$\displaystyle\lim_{t\to0+}g(t)=g(0)=0$

$g(0)=0$ 이므로 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $h(t)$에 대하여

$g(t)=t\times h(t)$ 이고,

$\dfrac{g(t)}{t}=h(t)=\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}$

조건에 의하여 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$

$h(t)=\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}$ 의 양변에 $t=1$을 대입하면

$h(1)=\sqrt{\{f'(1)\}^2+1}=1$

$h(t)=\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}\ \geq 1\ \cdots$ ㉠ 이고,

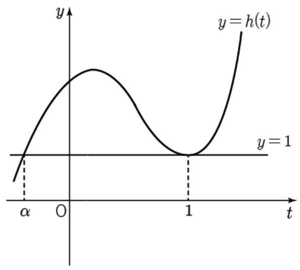
$h(1)=1$ 이므로 함수 $h(t)$는 $t=1$에서 최솟값을 갖는다.

따라서 $h'(1)=0$ 이다.

삼차함수 $h(t)$ 에 대하여 $h(1)=1, h'(1)=0$ 이므로

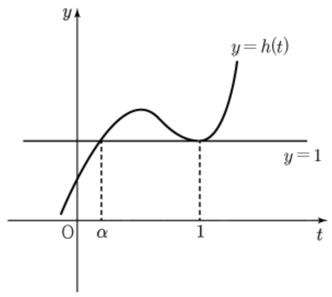
$h(t)=(t-1)^2(t-\alpha)+1$

(ⅰ) $\alpha\leq 0$일 때



모든 $t>0$에 대하여 $h(t)\geq 1$을 만족하므로 ㉠을 만족시킨다.

(ⅱ) $\alpha>0$일 때



어떤 양수 t에 대하여 $h(t)<1$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

따라서 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}=h(t)=(t-1)^2(t-\alpha)+1$, $\alpha\leq 0$ 이다.

곡선 $y=f(x)$의 $x=0$에서부터 $x=1$까지의 길이는

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}\,dt=\int_0^1 h(t)\,dt=\int_0^1\left\{(t-1)^2(t-\alpha)+1\right\}dt$

$\displaystyle\int_0^1\left\{(t-1)^2(t-\alpha)+1\right\}dt=\frac{13-4\alpha}{12}$ 이고, $\alpha\leq 0$ 이므로

$\displaystyle\int_0^1\left\{(t-1)^2(t-\alpha)+1\right\}dt=\frac{13-4\alpha}{12}$ 의 최솟값은 $\dfrac{13}{12}$ 이다.

따라서 $p+q=25$

95) 정답 ⑤

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 $x=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ 일 때,

(n은 자연수)

방정식 $f(1-x)=0$의 서로 다른 실근은 $x=1-\alpha_1,\ 1-\alpha_2,\ \cdots$,

$1-\alpha_n$이다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 모든 실근과 방정식
$f(1-x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은

$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+(1-\alpha_1+1-\alpha_2+\cdots 1-\alpha_n)$$
$$=(\alpha_1+1-\alpha_1)+(\alpha_2+1-\alpha_2)+\cdots+(\alpha_n+1-\alpha_n)=n$$

이다. 따라서

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 n일 때, 두 방정식
$f(x)=0$, $f(1-x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은 n이다.
……㉠

방정식 $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}+b=0$

$f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}+b=0 \Rightarrow \dfrac{1}{x}(x^3+bx+a)=0$이고, $a\neq 0$이기 때문에
방정식 $x^3+bx+a=0$은 $x=0$을 해로 가질 수 없다. 따라서 방정식
$x^2+\dfrac{a}{x}+b=0$의 해집합과 방정식 $x^3+bx+a=0$의 해집합은 같다.
방정식 $x^3+bx+a=0$은 삼차방정식이기 때문에, 서로 다른 실근을
1개부터 3개까지 가질 수 있다.

ⅰ) 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 해집합은 방정식 $x^3+bx+a=0$의 해집합과
동일하므로,
방정식 $x^3+bx+a=0$는 서로 다른 세 실근을 갖고, 근과 계수의
관계에 의해 세 실근의 합이 0이다. 따라서 $c=0$이고, 이는 c가
0이 아니라는 조건에 모순이다.

ⅱ) 방정식 $f(x)=0$이 하나의 실근을 갖는 경우
㉠에 의해 $c+\dfrac{\cos(\pi c)+2}{c}=1 \Leftrightarrow \cos(\pi c)=c-c^2-2$

$c-c^2-2=-\left(c-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{4} \leq -\dfrac{7}{4}$이고, $-1\leq\cos(\pi c)\leq 1$ 이므로
모든 실수 c에 대하여 $\cos(\pi c)>c-c^2-2$이다.
따라서 $c+\dfrac{\cos(\pi c)+2}{c}=1 \Leftrightarrow \cos(\pi c)=c-c^2-2$를 만족하는 실수
c는 존재할 수 없다.
ⅰ), ⅱ)에 의해 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
즉, 방정식 $x^3+bx+a=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
㉠에 의해 $c+\dfrac{\cos(\pi c)+2}{c}=2 \Leftrightarrow \cos(\pi c)=2c-c^2-2$
$2c-c^2-2=-(c-1)^2-1\leq -1$이고, $-1\leq\cos(\pi c)\leq 1$이므로
$\cos(\pi c)=2c-c^2-2$가 성립하기 위해서는
$2c-c^2-2=\cos(\pi c)=-1$이고, 이때의 $c=1$

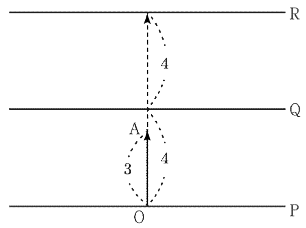
방정식 $x^3+bx+a=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고 서로 다른
실근의 합은 1이다.
방정식 $x^3+bx+a=0$의 두 실근을 $x=\alpha$, β라 하고 $\alpha+\beta=1$
……㉡

α를 중근이라 할 때, $x^3+bx+a=(x-\alpha)^2(x-\beta)$이다.

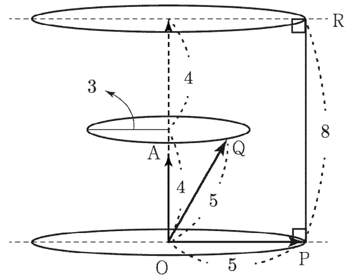
$x^3+bx+a=x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\alpha^2\beta$에서
$2\alpha+\beta=0$이다.
㉡과 연립하면 $\alpha=-1$, $\beta=2$이고 $x^3+bx+a=(x+1)^2(x-2)$

96) 정답 67

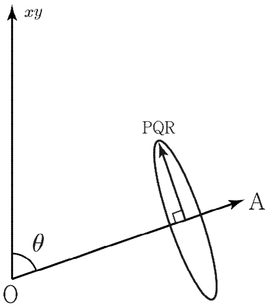
$\overrightarrow{OA}$를 기준으로 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=12$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OR}=24$를
이용하여
P, Q, R의 위치를 찾자.

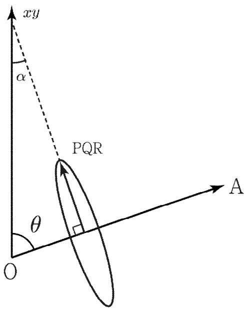


점 P는 $\overrightarrow{OA}$에 수직이고 점 O를 지나는 평면 위에,
점 Q는 $\overrightarrow{OA}$에 수직이고 점 O와의 거리가 4인 평면 위에,
점 R는 $\overrightarrow{OA}$에 수직이고 점 O와의 거리가 8인 평면 위에 존재함을
알 수 있다.
이제 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=5$, $\overline{PR}=8$임을 이용하여 위치관계를 자세히
파악하자.



그림과 같이 점 P는 반지름의 길이가 5인 원 위를 움직이고 점 R은
점 P와의 거리가
8이므로 마찬가지로 $\overrightarrow{PR}$과 $\overrightarrow{OA}$이 평행하도록 반지름의 길이가 5인
원 위를 움직인다.
점 Q는 $|\overrightarrow{OQ}|=5$이면서 점 O와 거리가 4인 평면 위에 있는
점이므로 반지름의 길이가
3인 원 위를 움직인다.
이제 삼각형 PQR의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을
구하자.
평면 PQR은 항상 $\overrightarrow{OA}$와 평행한 평면이므로 평면 PQR의
법선벡터와 $\overrightarrow{OA}$, xy평면의
법선벡터의 위치관계를 그림으로 나타내보자.





xy평면의 법선벡터 $(0,\,0,\,1)$와 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\,2,\,1)$을 내적하여 사잇각을 구하면

$(0,\,0,\,1)\cdot(2,\,2,\,1)=1=3\cos\theta$이므로 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$이다.

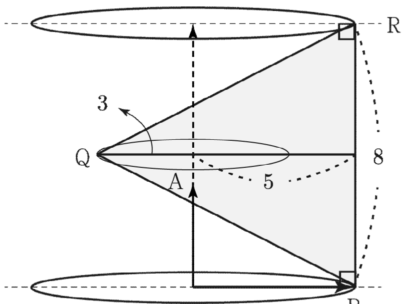
평면 PQR의 법선 벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$에 수직한 방향을 유지하면서 회전할 때

정사영의 넓이가 최대가 되는 순간은 xy평면의 법선벡터와 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 평면에

평면 PQR의 법선 벡터가 포함될 때, 즉 xy평면과 평면 PQR이 이루는 각

α에 대하여 $\cos\alpha=\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$일 때이다.

이제 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값을 구하자.



삼각형 PQR에서 선분 PR의 길이는 8로 일정하고 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$과 점 Q의 자취 원의 평면이 수직이므로 선분 PR에서 점 Q까지의 거리가 최대일 때 삼각형 PQR의 넓이가 최대가 된다.

따라서 위 그림과 같이 삼각형 PQR의 높이가 $5+3=8$이 될 때 넓이가 최대이고 이 때의

넓이는 32이다. 따라서 정사영의 넓이의 최댓값은

$32\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{64}{3}\sqrt{2}$ 이다. 답은 67

97) 정답 32

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\cos^3x-\cos x+C_1 & (0<x<m\pi)\\ \sin x+C_2 & (m\pi<x<n\pi)\\ -\cos x+C_3 & (n\pi<x)\end{cases}$$

구간 $[0,\,m\pi)$에서 $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos^3x-\cos x+C_1$이므로 닫힌 구간

$[0,\,2\pi]$에서 $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos^3x-\cos x+C_1$ $(\because m>2)$

$(0,\,2\pi)$에서 $f'(x)=\sin^3x$이므로 구간 $(0,\,\pi)$에서 $f(x)$는 증가하고,

구간 $(\pi,\,2\pi)$ 에서 $f(x)$는 감소한다. $f(0)=f(2\pi)=C_1-\dfrac{2}{3}$이므로

$C_1-\dfrac{2}{3}\pi\ge 0$ ……㉠

$(0,\,2\pi)$에서 $f(x)\ne 0$이다. 또한 $f(x)$는 구간 $(0,\,2\pi)$에서 $x=\pi$에서 최댓값 $f(\pi)=C_1+\dfrac{2}{3}$를 갖는다.

(나) 조건 $0\le\displaystyle\int_0^x f(t)dt\le M$에 의하여 $y=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$는 최솟값은 0이상이며, 최댓값이 존재하는 형태의 함수이다.

$2<m<n$인 자연수이므로

짝수와 홀수임에 따라서 그래프 개형이 판단되기에 각각의 경우를 살펴보아야 한다.

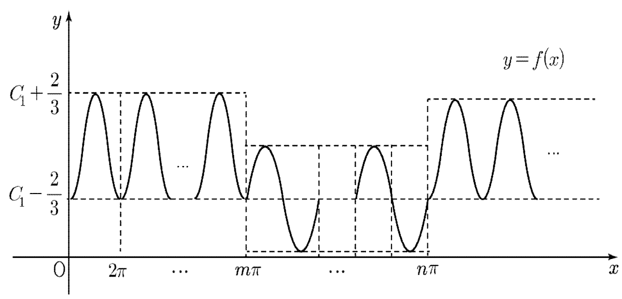
$f(x)$는 $m\pi<x<n\pi$에서 $f(x)=\sin x+C_1$, $n\pi<x$에서

$f(x)=-\cos x+C_2$이므로 각각

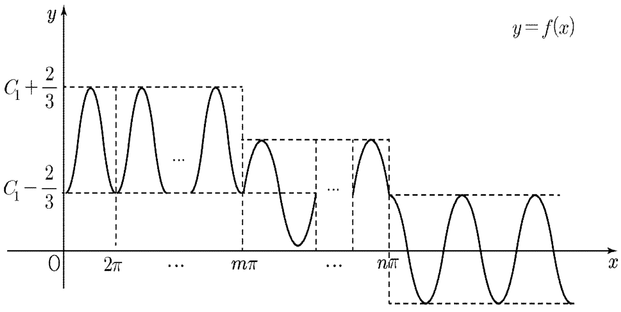
m과 n이 홀수, 짝수일 때를 맞춰서 그래프를 관찰한다.

싸인함수와 코싸인함수의 형태를 값에 맞게 그려준다.

(ⅰ) m이 짝수, n이 짝수

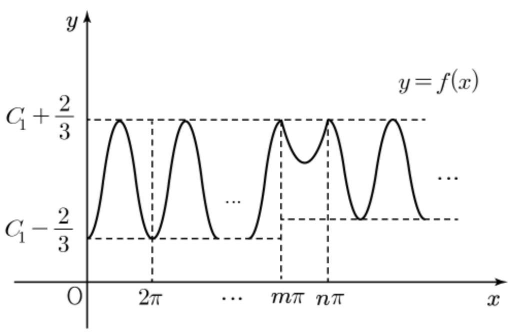


(ⅱ) m이 짝수, n이 홀수

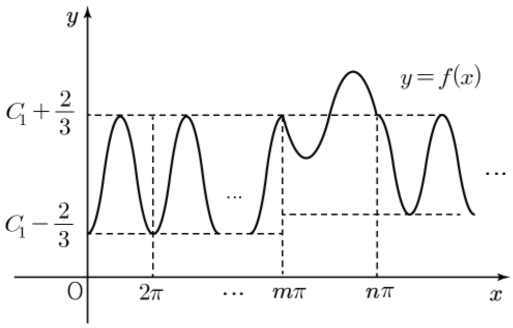


두 가지 케이스로 우선 m과 n이 커질수록 $0 \le \int_0^x f(t)dt \le M$를 만족하는 M이 커지므로
m과 n은 한 주기 안에서 파악해보자.

(iii) m이 홀수, $n=m+1$이 짝수



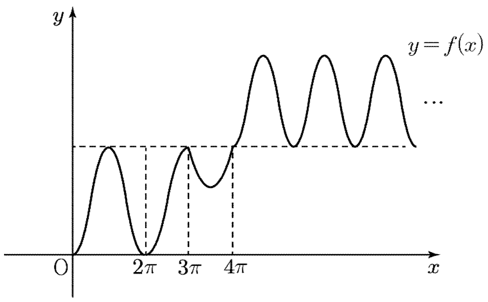
(iv) m이 홀수, n이 홀수



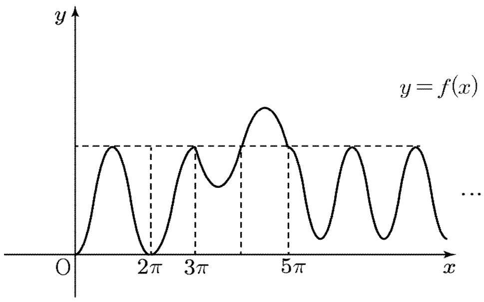
이 때, 모든 실수 x에 대하여 $0 \le \int_0^x f(t)dt \le M$을 만족하며 M이 최소가 되는 형태를 찾아보자. 먼저 $4<m$인 경우의 자연수는 $0<x<m\pi$에서 정적분값만 커지므로 $m=3$일 때와 $m=4$로 나누어서 관찰하여보자.

① $m=3$일 때

$m=3$인 경우, $C_1=\frac{2}{3}$로 그래프의 정적분이 최소가 되도록 하여도 n이 홀수이거나 짝수 어떤 값을 가지더라도 정적분의 값은 계속 증가한다. 따라서 모순이다.



($m=3\pi$, $n=4\pi$인 경우)

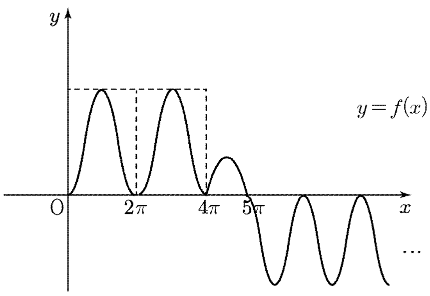


($m=3\pi$, $n=5\pi$인 경우)

② $m=4$일 때

$m=4$인 경우 $C_1-\frac{2}{3}=0$으로 그래프의 정적분이 최소가 되도록 설정한 후 n의 값을
관찰하자. $m=4$, $n=5$인 경우 와 $m=4$, $n=6$인 경우를 관찰하자.

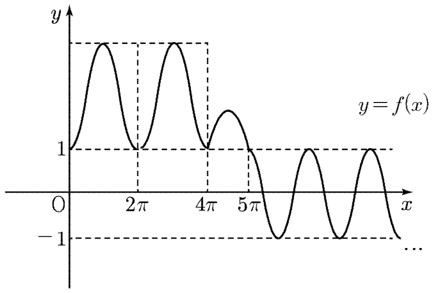
㉠ $m=4$, $n=5$일 때



$C_1=\frac{2}{3}$로 두면 위의 그림과 같이 x가 커질수록 정적분의 값은 $-\infty$을 향해 간다. 따라서 위의 그래프 개형에서 $x>5\pi$에서의 코싸인 함수의 정적분 값이 그래프가 대칭을 이뤄서 0이 될수 있도록 C_1을 조절한다.

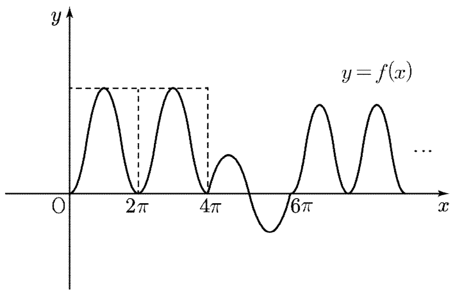
이 때, $C_1=\frac{5}{3}$이고 즉 정적분

$$M=\int_0^{4\pi}\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+\frac{5}{3}dx+\int_{4\pi}^{5\pi}\sin x+1dx+\int_{5\pi}^{\frac{11}{2}\pi}-\cos x\,dx$$



따라서 $M=\dfrac{23}{3}\pi+3$

㉡ $m=4$, $n=6$ 일 때



마찬가지로 $C_1=\dfrac{2}{3}$ 인, 최소일 때도, $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ 의 값은 ∞ 를 향해 진행되므로 모순이다.

따라서 $M=\dfrac{23}{3}\pi+3$ 이므로 $3(p+q)=3\left(\dfrac{23}{3}+3\right)=32$