2020

2020학년도

이정환X M

9평 대비 모의고사 가형

모의고사 분석서

진짜 공부는 지금부터
대성마이맥

▶ 모의고사 분석서

어떠한 개념이 문제에 반영되었는가? 문제를 풀 때의 이정환선생님의 생각을 COMMENT로 문제의 풀 때 꼭 세워야할 문제해결의 설계과정 PLAN, 모의고사 문항의 유사 기출문제로 모의고사를 완벽하게 공부할 수 있는 CONTENTS

▷ 모의고사 분석서의 구성요소

POINT	문제의 핵심 개념
COMMENT	문제 해결할 때의 수험생이 가져야 할 생각
PLAN	시행착오를 줄이기 위한 문제해결의 설계
유사기출문제	모의고사 문항과 유사한 기출문제

▶ 모의고사 분석서의 활용법

- 모의고사를 100분 안에 해결하고, 검토까지 하고 OMR카드도 마킹한다.

- 모의고사를 채점한 후 틀린 문항에 대해서 다시 한 번 풀어본다. 이때 검토능력을 기르고 싶은 수험생은 본인이 채점을 하지 말고 다른 사람에게 채점을 부탁 한다. 틀린 문항을 체크하지 말아달라고 하고, 몇 개 틀렸는지 만 알려 달라고 한다. 그 이후 본인이 틀린 문항을 발견하며 고쳐나간다.

- 다 고쳤다고 생각이 들면 분석서를 보고 문제 해결과정에서 시간이 오래 걸린 문항과 해결하지 못한 문항에 대해서 완벽하게 학습한다.

<빠른 정답>

1	①	2	⑤	3	④	4	⑤	5	①
6	④	7	②	8	③	9	②	10	②
11	④	12	④	13	③	14	①	15	③
16	⑤	17	①	18	⑤	19	②	20	④
21	②	22	40	23	48	24	4	25	2
26	152	27	13	28	64	29	19	30	7

1. [정답] ①

[해설]

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2,\ -2)\cdot(1,\ 3)=2-6=-4$

2. [정답] ⑤

[해설]

선분 AB의 중점 $\left(\frac{2+b}{2},\ \frac{-a+2}{2},\ \frac{1+c}{2}\right)$가 원점이므로 $b=-2$, $a=2,\ c=-1$

따라서 $a+b+c=2-2-1=-1$

3. [정답] ④

[해설]

$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x\ln4}=\frac{1}{\ln4}\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\frac{\ln2}{\ln4}=\frac{1}{2}$

4. [정답] ⑤

[해설]

곡선 $y=2^x+3$의 점근선의 방정식은 $y=3$이다. 두 직선 $y=3$과 $y=2x$의 교점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$이므로 $a=\frac{3}{2}$, $b=3$이다. 따라서 $ab=\frac{9}{2}$

5. [정답] ①

[해설]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 $\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$, $\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2n}{9}$ 이다. $\mathrm{E}(X)-\mathrm{V}(X)=\frac{n}{3}-\frac{2n}{9}=\frac{n}{9}=2$이므로 $n=18$

6. [정답] ④

[해설]

직선 $x-1=\frac{y}{2}=1-z$ 위의 점을 매개변수 t로 표현하면 $(t+1,\ 2t,\ 1-t)$이다. 직선과 평면 $x+y+z=4$의 교점은 $(t+1)+(2t)+(1-t)=4$를 만족하는 $t=1$을 $(t+1,\ 2t,\ 1-t)$에 대입하면 $(2,\ 2,\ 0)$이다. 따라서 $\mathrm{P}(2,\ 2,\ 0)$이고,

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2^2+2^2+0^2}=2\sqrt{2}$

7. [정답] ②

[해설]

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B\cap A^C)=2\mathrm{P}(A\cap B)=k$라 하면,

$\mathrm{P}(A)=k,\ \mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=k,\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}k$이다.

$\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=k,\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{k}{2}$ 이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{2}k$이다.

따라서 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{2}k}{\frac{3}{2}k}=\frac{1}{3}$

8. [정답] ③

[해설]

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 이므로 $\sin x\tan x=\frac{8}{3}$은 $\frac{\sin^2 x}{\cos x}=\frac{8}{3}$ 이다.

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$ 이므로 $\frac{\sin^2 x}{\cos x}=\frac{8}{3}$은 $\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}=\frac{8}{3}$ 이고,

$3\cos^2 x+8\cos x-3=0$ 이다. $\cos x=\frac{1}{3}$ $(-1\le\cos x\le1)$ 이므로

$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{3}$ 이고, $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다. 따라서

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{7}{9}$

9. [정답] ②

[해설]

$f(x)=\cos(x^2)+\int_0^{\sqrt{\pi}}tf(t)dt$ 에서 $\int_0^{\sqrt{\pi}}tf(t)dt=k$라 하면,

$f(x)=\cos(x^2)+k$, $xf(x)=x\cos(x^2)+kx$ 이고,

$\int_0^{\sqrt{\pi}}tf(t)dt=\int_0^{\sqrt{\pi}}\{t\cos(t^2)+kt\}dt=\left[\frac{1}{2}\sin(t^2)+\frac{k}{2}t^2\right]_0^{\sqrt{\pi}}=\frac{\pi}{2}k$ 이다.

$\int_0^{\sqrt{\pi}}tf(t)dt=k=\frac{\pi}{2}k$ 이므로 $k=0$, 따라서 $f(x)=\cos(x^2)$ 이므로 $f(0)=1$

10. [정답] ②

[해설]

a가 홀수이고 $a+b+c$는 짝수이므로 $b+c$는 홀수이다. $b+c$가 홀수이려면 각각 짝수 하나 홀수 하나가 나와야하므로 b가 홀수, c가 짝수일 확률이 $\frac{1}{4}$, b가 짝수, c가 홀수일 확률이 $\frac{1}{4}$ 이므로 $b+c$가 홀수일 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 a가 홀수 $b+c$가 홀수이려면

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

대성마이맥

11. [정답] ④

[해설]

$e^y \sin x - ky = \frac{1}{2}$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^y \sin x \frac{dy}{dx} + e^y \cos x - k\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dy}{dx}(k - e^y \sin x) = e^y \cos x$ 이다.

$x = \frac{\pi}{6}$, $y = 0$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}\left(k - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cdots$ ㉠

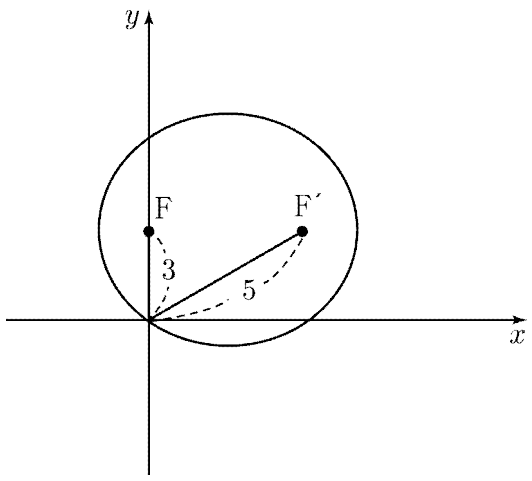
곡선 위의 점 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$이므로 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. 이를 ㉠에 대입하면

$-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(k - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $k = -1$

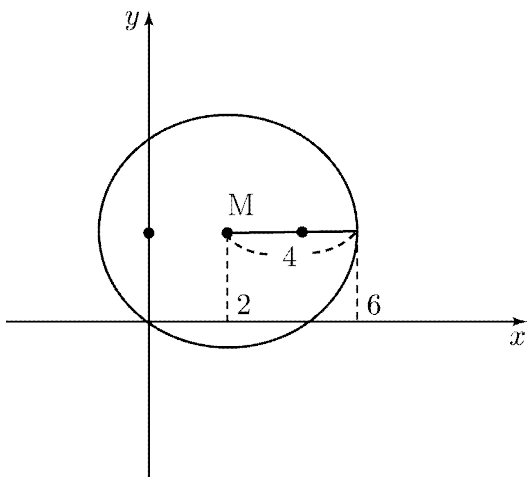
12. [정답] ④

[해설]

두 초점을 각각 $\mathrm{F}(0, 3)$, $\mathrm{F}'(4, 3)$이라 한다면, 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OF}} = 3$, $\overline{\mathrm{OF}'} = 5$이다.



$\overline{\mathrm{OF}} + \overline{\mathrm{OF}'} = 8$이므로 타원의 장축의 길이가 8이다.



두 점 F, F'의 중점을 M이라 하면, 타원 위의 점 중 x좌표가 가장 큰 점의 x좌표는 점 M의 x좌표에 장축의 길이의 반인 4를 더한 6이다. 따라서 타원 위의 점 중 x좌표가 가장 큰 점의 좌표는 $(6, 3)$이므로 $a = 6$, $b = 3$이고, $ab = 18$

13. [정답] ③

[해설]

평균이 m, 표준편차가 8인 정규분포를 따르는 집단에서 n명을 추출하여 조사한 신뢰구간이 $38 - a \le m \le 38 + a$이므로 표본평균 $\overline{x} = \frac{(38-a)+(38+a)}{2} = 38$이다.

또한 평균이 m, 표준편차가 8인 정규분포를 따르는 집단에서 $4n$을 추출하여 조사한 신뢰구간이 $39.02 \le m \le 40.98$이므로 신뢰구간의 길이는 $40.98 - 39.02 = 1.96 = 2 \times 1.96 \times \frac{8}{\sqrt{4n}}$ 이고 $\frac{16}{\sqrt{4n}} = 1$, $n = 64$

따라서 $\overline{x} = 38$, $n = 64$이고 $\overline{x} + n = 38 + 64 = 102$

14. [정답] ①

○ **Point**

미분가능 => 도함수의 정의를 활용하자.

[해설]

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 3}{|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{ax \sin x + b \cos x - 3}{|x|} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{ax \sin x + b \cos x - 3}{|x|}$ 에서 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다. 따라서

$\lim_{x \to 0}(ax \sin x + b \cos x - 3) = b - 3 = 0$이고, $b = 3$이다.

함수 $g(x)$가 미분가능하므로 $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$ 의 값이 존재한다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{f(x) - 3}{|x|}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ax \sin x + 3 \cos x - 3}{x|x|}$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{ax \sin x + 3 \cos x - 3}{x^2} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{ax \sin x}{x^2} + \frac{3\cos x - 3}{x^2}\right) = a - \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{ax \sin x + 3 \cos x - 3}{-x^2} = \lim_{x \to 0}\left(-\frac{ax \sin x}{x^2} - \frac{3\cos x - 3}{x^2}\right) = \frac{3}{2} - a$$

이므로 $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$ 가 존재하기 위해서는 $a - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - a$이고, $a = \frac{3}{2}$

따라서 $a + b = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$

15. [정답] ③

○ **Point**

조건(가)의 식을 조건(나)를 통하여 정리

● **COMMENT & PLAN**

시그마 식을 해석해서 묶어보면 2개씩 묶인 문자와 독단적인 문자를 확인이 가능하고, 조건 (나)를 통해서 독단적인 문자를 처리한다.

[해설]

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{4}(x_k + x_{k+1}) = (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_3 + x_4) + (x_4 + x_5) = x_1 + x_5 + 2(x_2 + x_2 + x_3) = 12$$

$2(x_2 + x_3 + x_4)$의 값은 짝수이므로 $x_1 + x_5 + 2(x_2 + x_3 + x_4) = 12$에서 $x_1 + x_5$의 값은 짝수이다.

조건 (나)에 의하여 $0 \le x_5 - x_1 \le 4$이고, $x_1 + x_5$의 값은 짝수이므로 $x_5 - x_1$의 값도 짝수 (0도 포함)이다. 따라서 $x_5 - x_1$의 값으로 가능한

대성마이맥

값은 $0,\ 2,\ 4$이다.

(ⅰ) $x_5 - x_1 = 0$

$x_5 = x_1 = a$라 하면,
$x_1 + x_5 + 2(x_2 + x_3 + x_4) = 2(a + x_2 + x_3 + x_4) = 12$,
$a + x_2 + x_3 + x_4 = 6$이다. 방정식 $a + x_2 + x_3 + x_4 = 6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ x_2,\ x_3,\ x_4$의 모든 순서쌍 $(a,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_6 = {}_9\mathrm{C}_3 = 84$

(ⅱ) $x_5 - x_1 = 2$

$x_1 = b$라 하면, $x_5 = b + 2$이고,
$x_1 + x_5 + 2(x_2 + x_3 + x_4) = 2(b + 1 + x_2 + x_3 + x_4) = 12$,
$b + x_2 + x_3 + x_4 = 5$이다. 방정식 $b + x_2 + x_3 + x_4 = 5$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $b,\ x_2,\ x_3,\ x_4$의 모든 순서쌍 $(b,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_5 = {}_8\mathrm{C}_3 = 56$

(ⅲ) $x_5 - x_1 = 4$

$x_1 = c$라 하면, $x_5 = c + 2$이고,
$x_1 + x_5 + 2(x_2 + x_3 + x_4) = 2(c + 2 + x_2 + x_3 + x_4) = 12$,
$c + x_2 + x_3 + x_4 = 4$이다. 방정식 $c + x_2 + x_3 + x_4 = 4$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $c,\ x_2,\ x_3,\ x_4$의 모든 순서쌍 $(c,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_4 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$

이상에서 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는 $84 + 56 + 35 = 175$

함께 보는 기출 [2020학년도 6월 평가원]

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는? [4점]

(가) $n = 1, 2, 3$ 일 때, $x_{n+1} - x_n \geq 2$이다.
(나) $x_4 \leq 12$

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

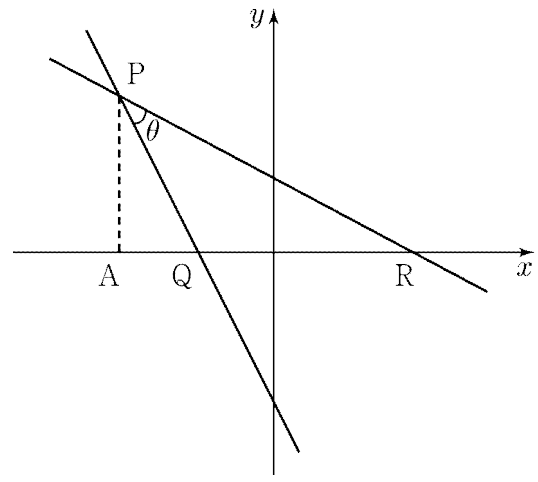
정답 : ①

16. [정답] ⑤

○ **Point**

직선2개 + 이루는 각 => 삼각함수의 덧셈정리

[해설]



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 A라 하고, $\angle \mathrm{QPA} = \alpha$라 하자.
$\angle \mathrm{PPQ} = \theta$이므로 $\angle \mathrm{RPA} = \theta + \alpha$이므로

$\tan(\angle \mathrm{RPA}) = \tan(\theta + \alpha) = \dfrac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha}$ 이고, $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$ 이므로

$$\tan(\angle \mathrm{RPA}) = \frac{\tan\theta + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\tan\theta} = \frac{2\tan\theta + 1}{2 - \tan\theta}$$

$\overline{\mathrm{PA}} = 2$이므로 $\overline{\mathrm{AR}} = 2\tan(\angle \mathrm{RPA}) = \dfrac{4\tan\theta + 2}{2 - \tan\theta}$

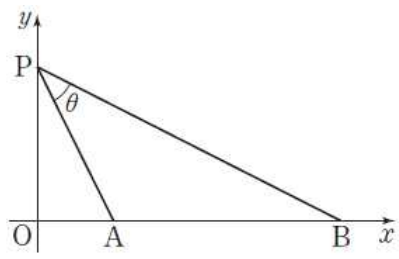
$\overline{\mathrm{AQ}} = 1$이므로

$\overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{AR}} - \overline{\mathrm{AQ}} = \dfrac{4\tan\theta + 2}{2 - \tan\theta} - 1 = \dfrac{4\tan\theta + 2 - 2 + \tan\theta}{2 - \tan\theta} = \dfrac{5\tan\theta}{2 - \tan\theta}$ 이므로

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{5\tan\theta}{\theta(2 - \tan\theta)} = \frac{5}{2}$$

함께 보는 기출 [2005학년도 9월 평가원]

그림과 같이 x축 위의 두 점 $\mathrm{A}(20,\ 0)$, $\mathrm{B}(80,\ 0)$와 양의 y축 위의 점 $\mathrm{P}(0, y)$에 대하여 $\angle \mathrm{APB} = \theta$라고 할 때, $\tan\theta$의 값이 최대가 되는 점 P의 y좌표를 구하시오. [4점]



정답 : 40

대성마이맥

17. [정답] ①

○ **Point**

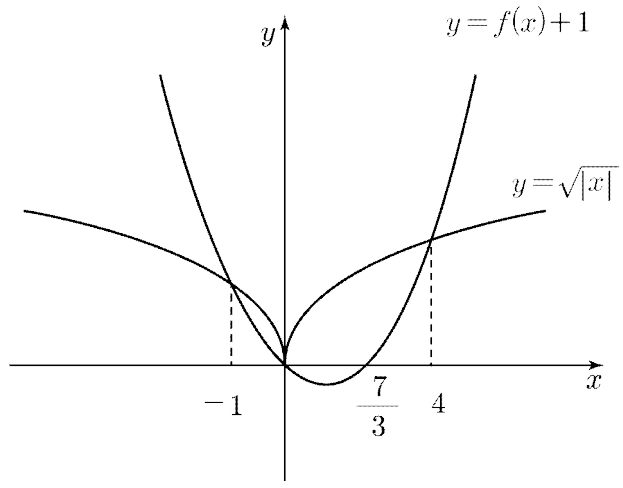
어릴 적 여러 로그문제 관련해서 진수조건을 놓쳐서 틀리는 경우가 많았을 것이다. 개수를 세는 단순한 문제인만큼 두 번 세 번 풀어서 틀리지 않고 넘어가는 것이 중요하다.

● **COMMENT & PLAN**

1) 주어진 식을 정리
2) 조건을 통하여 주어진 식을 만족하는 값을 찾기
3) 진수 조건과 함수를 그려가면서 놓친 것이 없나 피드백

[해설]

$2\ln\{f(x)+1\} \le \ln|x|$ 을 정리하면 $\ln\{f(x)+1\} \le \ln\sqrt{|x|}$ 이고, 따라서 $f(x)+1 \le \sqrt{|x|}$, $f(x)+1>0$, $x \ne 0$ 이다.
주어진 조건에 의하여 $f(-1)=0$, $f(4)=1$ 이므로 $f(-1)+1=1$, $f(4)+1=2$ 이다. 곡선 $y=f(x)+1$ 위에 점 $(-1, 1)$, $(2, 4)$ 가 있으므로 두 곡선 $y=f(x)+1$과 $y=\sqrt{|x|}$ 는 $x=-1$, $x=4$ 에서 교점을 갖는다. 또한 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$ 이 만나는 두 점의 x좌표가 각각 0, $\frac{7}{3}$ 이므로 곡선 $y=f(x)+1$ 이 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 각각 0, $\frac{7}{3}$ 이다.



따라서 $f(x)+1 \le \sqrt{|x|}$ 를 만족시키는 정수 x는 $x=-1$, 0, 1, 2, 3, 4 이다. 이 중 $f(x)+1 \le 0$ 을 만족시키는 정수 $x=0$, 1, 2 를 제외하면 부등식 $2\ln\{f(x)+1\} \le \ln|x|$ 의 정수해이다. 따라서 부등식 $2\ln\{f(x)+1\} \le \ln|x|$ 를 만족하는 정수 x는 $x=-1$, 3, 4 로 3개다.

함께 보는 기출 [2018학년도 6월 평가원]

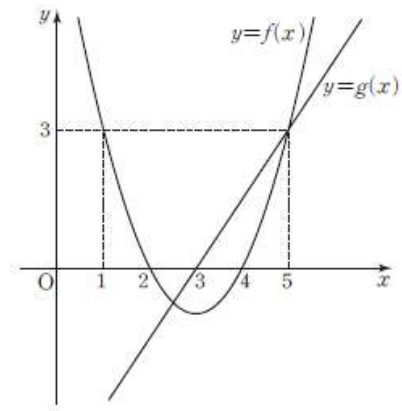
부등식 $2\log_2|x-1| \le 1-\log_2\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

정답 : ②

함께 보는 기출 [2019학년도 수능]

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \ge \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$ 을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [4점]



① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

정답 : ④

대성마이맥

18. [정답] ⑤

○ Point

ㄱ과 ㄴ은 정적분에서 기본적으로 취해야하는 행동이며
ㄷ은 앞서 나온 행동을 통하여 ㄷ의 핵심을 파악해야한다.

[해설]

ㄱ. $\int_1^x f(t)dt = x - xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt = 0 = 1 - f(1)$ 이므로 $f(1)=1$ 이다. (참)

ㄴ. $\int_1^x f(t)dt = x - xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 양변을 미분하면

$f(x)=1-f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=\frac{1}{t}$을 대입하면 $f\left(\frac{1}{t}\right)=1-f(t)+tf'(t)$,

$f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=1+tf'(t)$ 이다.

따라서 모든 양수 x에 대하여 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1+xf'(x)$ 이다. (참)

ㄷ. 모든 양수 x에 대하여 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1+xf'(x)$ 이므로

$\int_1^2\left\{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}dx=\int_1^2\{1+xf'(x)\}dx$

⋯ ㉡

$\int_1^2\left\{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right)dx$ 이고,

$\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right)dx$ 에서 $\frac{1}{x}=t$ 로 치환하면 $-\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}=1$ 이고, $x=1$

일 때 $t=1$, $x=2$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$ 이므로

$\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f(t)}{t^2}dt$

따라서

$$\int_1^2\left\{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f(x)}{x^2}dx$$

이를 ㉡에 대입하

$\int_1^2 f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f(x)}{x^2}dx=\int_1^2\{1+xf'(x)\}dx$ ⋯ ㉢

$\int_1^2\{1+xf'(x)\}dx=1+[xf(x)]_1^2-\int_1^2 f(x)dx$

$=1+2f(2)-f(1)-\int_1^2 f(x)dx$

ㄱ에 의하여 $f(1)=1$ 이므로

$\int_1^2\{1+xf'(x)\}dx=1+2f(2)-f(1)-\int_1^2 f(x)dx$

$=2f(2)-\int_1^2 f(x)dx$

이를 ㉢에 대입하면

$\int_1^2 f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f(x)}{x^2}dx=2f(2)-\int_1^2 f(x)dx$이고,

$2\int_1^2 f(x)dx=2f(2)-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f(x)}{x^2}dx$,

$\int_1^2 f(x)dx=f(2)-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f(x)}{2x^2}dx$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

함께 보는 기출 [2018학년도 6월 평가원]

$\frac{3}{5}<x<4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

ㄱ. $g'(2)=-\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}$

ㄷ. $2<g(1)<\frac{5}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 : ⑤

함께 보는 기출 [2019학년도 수능]

$x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

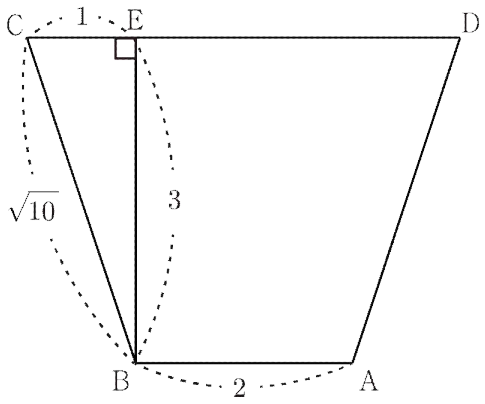
① $\frac{\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ② $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\ln 2}{3}+1$
④ $\frac{2\ln 2}{3}+1$ ⑤ $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{3}{2}$

정답 : ②

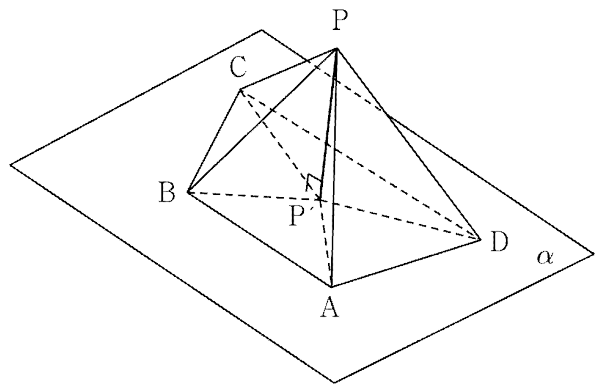
진짜 공부는 지금부터 대성마이맥

19. [정답] ②

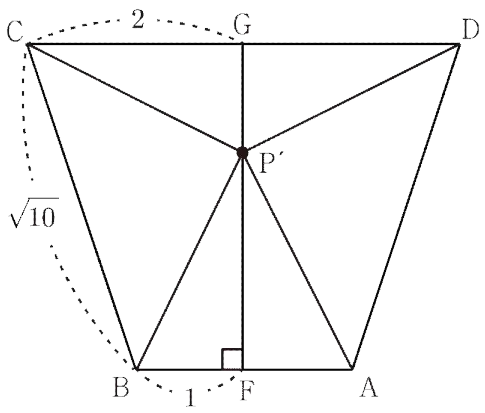
[해설]



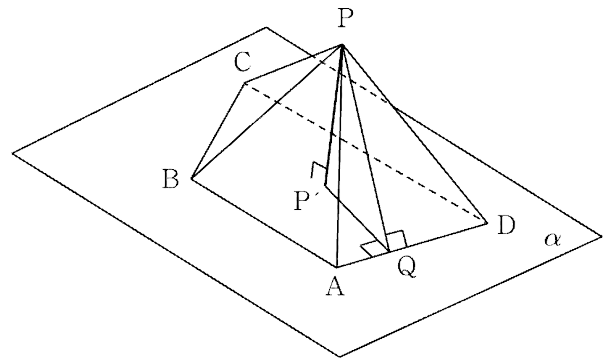
사각형 ABCD의 한 꼭짓점 B에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 E라 할 때, $\overline{CE}=1$이고, $\overline{BC}=\sqrt{10}$이므로 $\overline{BE}=3$이다.
따라서 두 선분 AB와 CD 사이의 거리는 3이다. … ㉠



점 P에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 P′이라 할 때
조건 (나)에 의하여 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD}$이므로
$\sqrt{\overline{PB}^2-\overline{PP'}^2}=\sqrt{\overline{PC}^2-\overline{PP'}^2}$이고 $\overline{P'B}=\overline{P'C}$이다. … ㉡



점 P′에서 선분 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 F, G라 할 때,
$\overline{BF}=1$, $\overline{CG}=2$
㉠에 의하여 $\overline{P'B}=\overline{P'C}=x$라 하면, $\overline{P'F}=\sqrt{\overline{P'B}^2-\overline{BF}^2}=\sqrt{x^2-1}$
이고, $\overline{P'G}=\sqrt{\overline{P'C}^2-\overline{CG}^2}=\sqrt{x^2-4}$
㉠에 의하여 $\overline{FG}=\overline{P'F}+\overline{P'G}=3$이므로 $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-4}=3$,
$x=\sqrt{5}$
삼각형 BCP′에서 $\overline{BP'}=\overline{CP'}=\sqrt{5}$, $\overline{BC}=\sqrt{10}$이므로
$\angle BP'C=\angle AP'D=\frac{\pi}{2}$
점 P′에서 선분 DA에 내린 수선의 발을 Q라 할 때,
$\overline{P'Q}\times\overline{AD}=\overline{DP'}\times\overline{AP'}$이고, $\overline{AD}=\sqrt{10}$, $\overline{DP'}=\overline{AP'}=\sqrt{5}$이므로
$\overline{P'Q}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

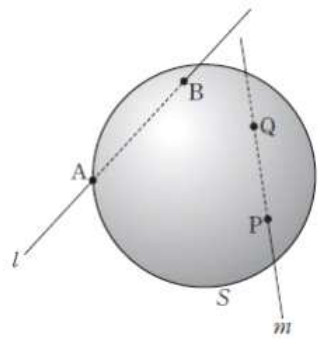


PP′가 평면 α와 수직이고, 선분 P′Q가 선분 AD와 수직이므로, 삼수선의 정리에 의하여 선분 PQ는 선분 AD와 수직이다. 따라서 두 선분 P′Q와 PQ가 이루는 각이 평면 PAD와 평면 α가 이루는 각이므로 $\tan\theta=\frac{\overline{PP'}}{\overline{P'Q}}$이다. 문제의 조건에 의하여 $\overline{PP'}=\sqrt{5}$이고,
$\overline{P'Q}=\frac{\sqrt{10}}{2}$이므로 $\tan\theta=\frac{\overline{PP'}}{\overline{P'Q}}=\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{10}}{2}}=\sqrt{2}$

p.s) 적절한 시점에서 등변사다리꼴을 좌표로 표현해도 쉽게 해결된다.

함께 보는 기출 [2016학년도 7월 교육청]

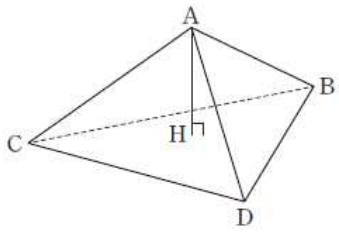
그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S와 서로 다른 두 직선 l, m이 있다. 구 S와 직선 l이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B, 구 S와 직선 m이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이고 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\angle ABQ=\frac{\pi}{2}$일 때 평면 APB와 평면 APQ가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $100\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]



정답 : 60

함께 보는 기출 [2019학년도 수능]

한 변의 길이가 12인 정삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 삼각형 CDH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 3배, 삼각형 DBH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 2배이고 $\overline{AH}=3$이다. 선분 BD의 중점을 M, 점 A에서 선분 CM에 내린 수선의 발을 Q라 할 때,
선분 AQ의 길이는? [4점]



① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$
④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

정답 : ③

대성마이맥

20. [정답] ④

[해설]

⋮ (중략)

주머니에서 n개의 공을 선택하여 두 묶음으로 나누는 방법의 수를 b_n, 주머니에서 n개의 공을 선택하여 만든 두 묶음의 공에 적힌 숫자의 합이 같은 경우의 수를 c_n이라 할 때, $a_n = b_n - c_n$이다.

(ⅰ) $n=2$

$b_2 = {}_5\mathrm{C}_2 \times 1$이고, $c_2 = 0$이므로

$a_2 = {}_5\mathrm{C}_2 \times 1 - 0 = 10$

(ⅱ) $n=3$

$b_3 = {}_5\mathrm{C}_3 \times 3 = 30$, c_3은

$\{(3), (2, 1)\}$, $\{(4), (3, 1)\}$, $\{(5), (4, 1)\}$, $\{(5), (3, 2)\}$

일 때, 같으므로 $c_3 = \boxed{p=4}$이고, $a_3 = 30 - \boxed{p=4}$

(ⅲ) $n=4$

b_4는 5개의 공에서 4개를 선택하므로 ${}_5\mathrm{C}_4$, 4개의 공을 2묶음으로 나눌 방법은

(1개, 3개), (2개, 2개)이고, 각각 ${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_3$,

${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 \times \frac{1}{2!}$이므로 ${}_5\mathrm{C}_4 \times (4+3) = 35$

$b_4 = \boxed{35}$이다. c_4는 $\{(1, 5), (2, 4)\}$, $\{(1, 4), (2, 3)\}$, $\{(3, 4), (2, 5)\}$일 때, 같으므로 $c_4 = \boxed{3}$이고,

$a_3 = \boxed{q = 35 - 3 = 32}$

(ⅳ) $n=5$

$b_5 = {}_5\mathrm{C}_5 \times 15 = 15$, $c_5 = 0$이므로 $a_5 = 15 - 0 = 15$

따라서 $\sum_{k=2}^{5} a_k = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \boxed{83}$

21. [정답] ②

○ Point

1) 최근 트렌드를 보아서 21번 29번에서 엄청난 연산을 요구하지 않는다. 중상위권 학생들은 절대 21번 29번을 버려서는 안되고 맞출수있으므로 지속적인 학습을 권장한다.
2) 이 문제에서는 복잡한 연산보다는 처음 이차함수와 지수함수의 모양으로 합성함수의 개형을 **관찰**을 통하여 문제를 해결해나간다.
이처럼 최근에는 문제를 읽고 연산을 하지 않은상태에서 최대한 많은 정보를 캐치해나가는 연습이 필요하다.

● COMMENT & PLAN

1) 연속함수임을 통하여 a와 b의 관계식
2) a값에 따라 지수함수의 개형과 b값을 확인
3) $g(g(x)) = 3$을 만족하는 실근이 4개를 찾는 것이 핵심인데, 한번에 4개를 찾는 것보다는 적절한 곡선 $y = g(x)$의 모형을 그려가면서 실근의 개수가 변하는 상황을 관찰하는 것이 해결핵심전략이 된다.

[해설]

함수 $h(x)$를 $h(x) = ae^{6-x} + b$라 하면, 함수 $g(x)$가 연속함수이므로

$f(6) = h(6) = a + b = \frac{11}{2}$ ⋯ ㉠

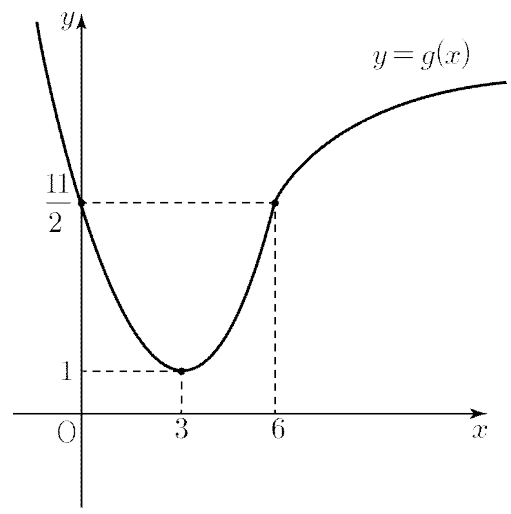
방정식 $g(g(x)) - 3 = 0$에서 $g(x) = t$로 치환하면, $g(t) = 3$을 만족하는 t의 값을 차례로 t_1, t_2, ⋯, t_n이라 할 때, 방정식 $g(g(x)) - 3 = 0$을 만족시키는 실근은 방정식 $g(x) = t_1$ 또는 $g(x) = t_2$ 또는 ⋯, $g(x) = t_n$을 만족시키는 실수 x이다. 주어진 조건에 의하여 방정식의 실근의 개수가 4이다.

함수 $g(x)$는 $x \le 6$에서는 이차함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{2}$이고,

$x > 6$에서는 지수함수 $h(x) = ae^{6-x} + b$이다.

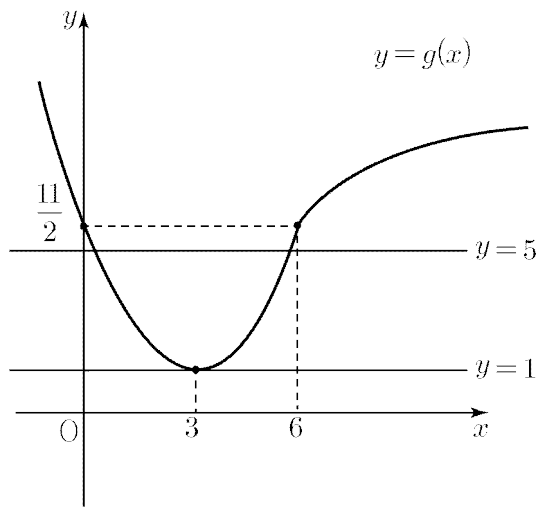
(ⅰ) $a < 0$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$h(6) = f(6) = \frac{11}{2}$이고, $x > 6$일 때 $h'(x) > 0$이므로 방정식 $h(t) = 3$의 실근은 존재하지 않는다. 따라서 $g(t) = 3$을 만족시키는 실근은 방정식 $f(t) = 3$ $(t < 6)$을 만족시키는 실수 t의 값들이다. 방정식 $f(t) = 3$은 $\frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{5}{2} = 0$이고 $t = 1$, $t = 5$이다. 따라서 방정식 $g(g(x)) = 3$의 실근은 방정식 $g(x) = 1$ 또는 $g(x) = 5$를 만족시키는 실수 x이다.

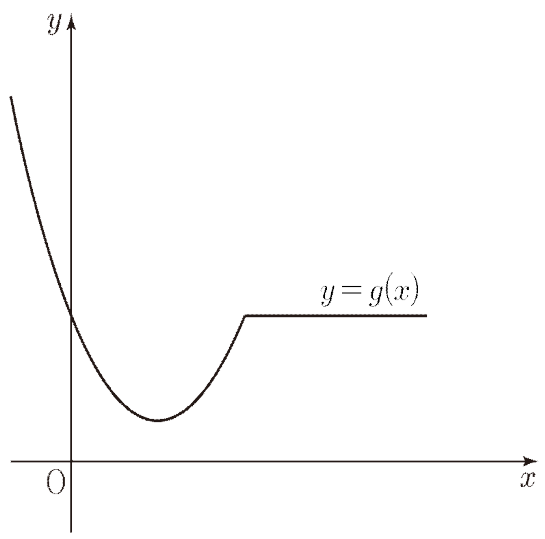
대성마이맥



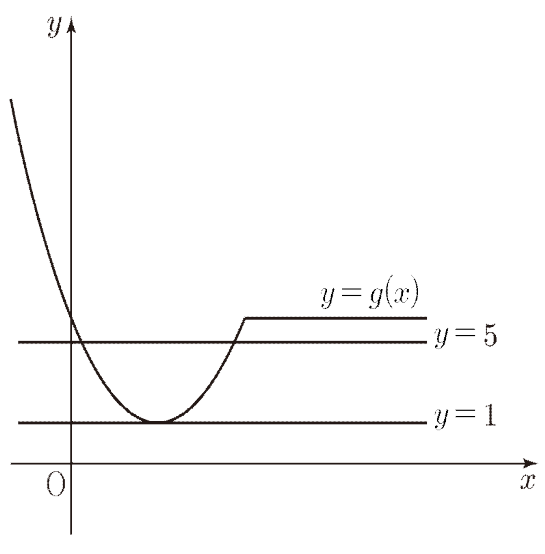
함수 $y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 1)$ 이므로 방정식 $g(x)=1$, $g(x)=5$ 의 실근의 개수는 3 이다. 따라서 $a<0$ 인 경우 방정식의 실근의 개수가 4 일 수 없다.

(ii) $a=0$ 인 경우

함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



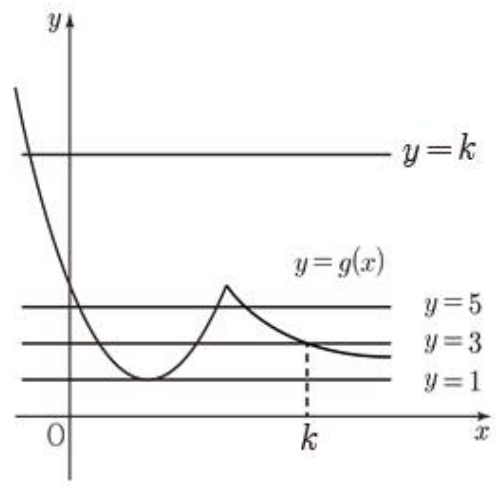
$h(6)=f(6)=\frac{11}{2}$ 이고, $x>6$ 일 때 $h'(x)=0$ 이므로 방정식 $h(t)=3$ 의 실근은 존재하지 않는다. 따라서 $g(t)=3$ 을 만족시키는 실근은 방정식 $f(t)=3$ $(t<6)$ 을 만족시키는 실수 t 의 값들이다. 방정식 $f(t)=3$ 은 $\frac{1}{2}t^2-3t+\frac{5}{2}=0$ 이고, $t=1$, $t=5$ 이다. 따라서 방정식 $g(g(x))=3$ 의 실근은 $g(x)=1$, $g(x)=5$ 를 만족시키는 실수 x 이다.



함수 $y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 1)$ 이므로 방정식 $g(x)=1$, $g(x)=5$ 의 실근의 개수는 3 이다. 따라서 $a=0$ 인 경우 방정식의 실근의 개수가 4 일 수 없다.

(iii) $a>0$ 인 경우

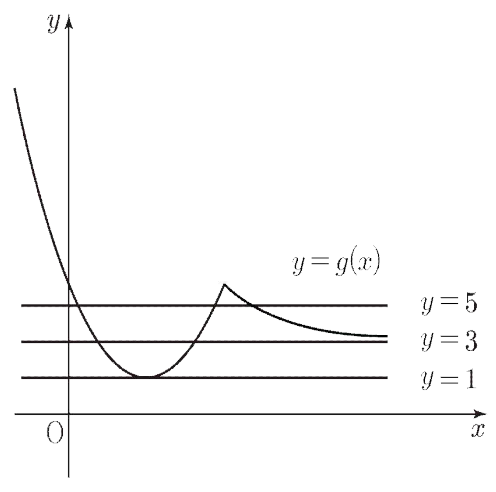
방정식 $h(t)=3$ $(t>6)$ 이 실근 k 를 갖는다면 함수 $g(x)$ 의 그래프가 다음과 같다.



방정식 $g(g(x))=3$ 의 실근은 방정식 $g(x)=1$ 또는 $g(x)=5$ 또는 $g(x)=k$ 를 만족시키는 실수 x 이다.
(i)과 (ii)로부터 방정식 $f(x)=1$ 또는 $f(x)=5$ $(x<6)$ 을 만족시키는 실수 x 의 개수가 3 이다. 방정식 $h(t)=3$ 이 실근을 갖기 때문에, 방정식 $h(t)=5$ 또한 실근을 갖는다. 또한 그림과 같이 방정식 $g(x)=k$ 는 하나의 음의 실근을 갖는다.
따라서, 방정식 $h(t)=3$ $(t>6)$ 이 실근 α 를 갖는다면, 방정식 $g(g(x))=3$ 의 실근은 4 개일 수 없다.

따라서, $h(t)=3$ $(t>6)$ 의 실근이 존재하지 않는다.
$h(x)=ae^{6-x}+b$ 의 점근선은 $y=b$ 이므로 방정식 $h(t)=3$ $(t>6)$ 의 실근이 존재하지 않기 위해서 $b\geq 3$ 이다.
만약 $b\geq 5$ 라면, 방정식 $h(t)=5$ $(t>6)$ 의 실근이 존재하지 않으므로, (i), (ii)에서의상황과 마찬가지로 방정식 $g(g(x))=3$ 의 실근의 개수는 3 이다.

이상에서, $a>0$ 이고 $3\leq b<5$ 이다. 함수 $g(x)$ 의 그래프를 그리면 아래와 같다.



α_4 는 곡선 $y=h(x)$ 와 직선 $y=5$ 의 교점의 x 좌표이므로
$g'(\alpha_4)=h'(\alpha_4)=-ae^{6-\alpha_4}$
$h(\alpha_4)=5$ 이므로 $ae^{6-\alpha_4}+b=5$ 이다. 따라서
$g'(\alpha_4)=-ae^{6-\alpha_4}=b-5$ 이고, $3\leq b<5$ 로부터 $-2\leq g'(\alpha_4)<0$ 이다. 따라서 $g'(\alpha_4)$ 의 최솟값은 -2 이고, 이때의 b 의 값은 3 이다.

대성마이맥

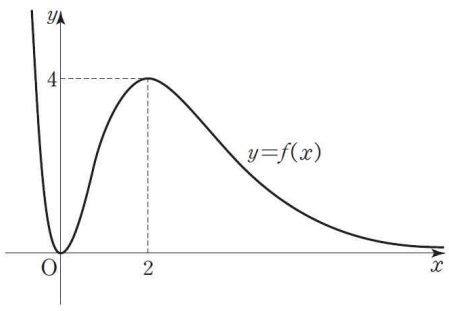
㉠의 관계식 $a+b=\frac{11}{2}$에 의하여 $b=3$일 때 $a=\frac{5}{2}$이다. $p=\frac{5}{2}$,

$q=3$, $r=-2$

따라서 $pqr=-15$이다.

함께 보는 기출 [2017학년도 3월 교육청]

그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$의 그래프이다.



함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{15}{e^2}$의 교점의 개수는?

$\left(단,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=0\right)$ [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

정답 : ③

함께 보는 기출 [2018학년도 사관학교]

함수 $f(x)=(x^3-a)e^x$과 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 불연속인 점의 개수가 2가 되도록 하는 10이하의 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

$\left(단,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=0\right)$ [4점]

정답 : 49

22. [정답] 40

[해설]

${}_5C_2=10$, ${}_6P_2=30$이므로 ${}_5C_2+{}_6P_2=40$

23. [정답] 48

[해설]

$-1\le\sin x\le1$이므로 $-4\le4\sin x\le4$이고, $4\le4\sin x+8\le12$이다.

따라서 $4\le f(x)=4\sin x+8\le12$이므로 $f(x)$의 최솟값은 4, 최댓값은 12이고, $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 곱은 $12\times4=48$

24. [정답] 4

[해설]

$f(x)=4\log_2(x^2+1)$라 할 때

$f'(x)=\frac{4}{\ln2}\times\frac{2x}{x^2+1}$, $f''(x)=\frac{4}{\ln2}\times\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$이다.

$x=1$에서 $f''(x)$의 부호가 양에서 음으로 변하므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=1$에서 변곡점을 갖는다. $f(1)=4\log_2(1+1)=4$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(1,4)$

점 $(1,4)$가 직선 $y=mx$ 위에 있으므로 $m=4$

25. [정답] 2

[해설]

$t=2$일 때 $x=2$, $y=2a$이므로 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{(2)^2+(2a)^2}=\sqrt{4+4a^2}$

점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 속도는 $(2t,a)$이므로 $t=2$에서의 점 P의 속도는 $(4,a)$이다. 따라서 $t=2$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(4)^2+(a)^2}=\sqrt{16+a^2}$

$t=2$에서 $|\overrightarrow{OP}|$와 점 P의 속력이 같으므로 $\sqrt{4+4a^2}=\sqrt{16+a^2}$,

$a=2$ $(a>0)$

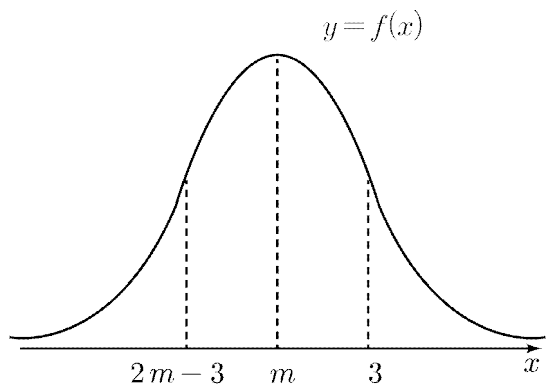
대성마이맥

26. [정답] 152

[해설]

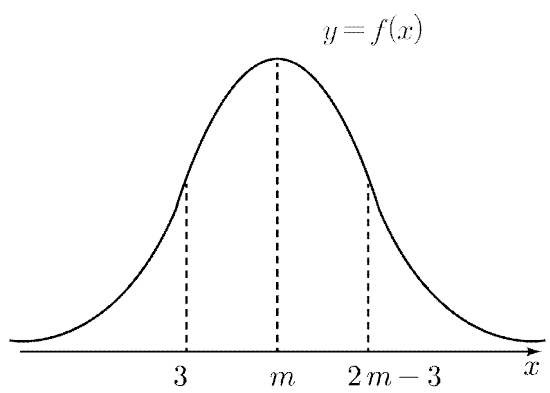
확률변수 X의 평균이 m이므로 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다. 따라서 방정식 $f(x)=f(3)$을 만족시키는 $x=3$ 또는 $2m-3$이다.

(**i**) $m<3$인 경우



부등식 $f(3)\geq f(x)$의 해는 $2m-3\leq x\leq 3$이다.
$2m-3\leq x\leq 3$을 만족시키는 자연수 x의 개수는 5일 수 없다.

(**ii**) $m<3$인 경우



부등식 $f(x)\geq f(3)$의 해는 $3\leq x\leq 2m-3$이다.
$3\leq x\leq 2m-3$을 만족시키는 자연수 x의 개수는 5가 되기 위해서는 $7\leq 2m-3<8$, $5\leq m<\frac{11}{2}$이므로 만족시키는 자연수 $m=5$이다.

(**i**), (**ii**)에 의하여 확률변수 X의 평균은 5이고, 표준편차는 2이다.

$\mathrm{P}(7\leq X\leq 10)=\mathrm{P}\left(\frac{7-5}{2}\leq Z\leq \frac{10-5}{2}\right)=\mathrm{P}(1\leq Z\leq 2.5)$

주어진 표준정규분포표를 이용하면

$\mathrm{P}(1\leq Z\leq 2.5)=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)=0.493-0.341=0.152$

따라서 $p=0.152$이므로 $1000p=152$

27. [정답] 13

[해설]

이웃한 두 카드에 적힌 숫자의 합이 8이상이 되는 경우의 수는 다음과 같다.

(**i**) 4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드가 이웃할 때

4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드를 하나로 묶어서 나열하는 방법의 수는 $2!\times 4!=48$

(**ii**) 3이 적힌 카드와 5가 적힌 카드가 이웃할 때

3이 적힌 카드와 5가 적힌 카드를 하나로 묶어서 나열하는 방법의 수는
$2!\times 4!=48$

(**i**)과 (**ii**)를 동시에 만족시키는 경우는 3, 4, 5가 적힌 카드가 3, 5, 4의 순서로 나열되어 있거나 4, 5, 3의 순서로 나열되어 있는 경우이다. 나열하는
방법의 수는 $2\times 3!=12$

따라서 이웃한 두 카드에 적힌 숫자의 합이 8이상이 되는 경우의 수는
$48+48-12=84$
이므로 이웃한 두 카드에 적힌 숫자의 합이 8이상인 것이 존재할 확률은 $\frac{84}{5!}=\frac{84}{120}=\frac{7}{10}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$이므로 $p=10$, $q=3$이고
$p+q=10+3=13$

대성마이맥

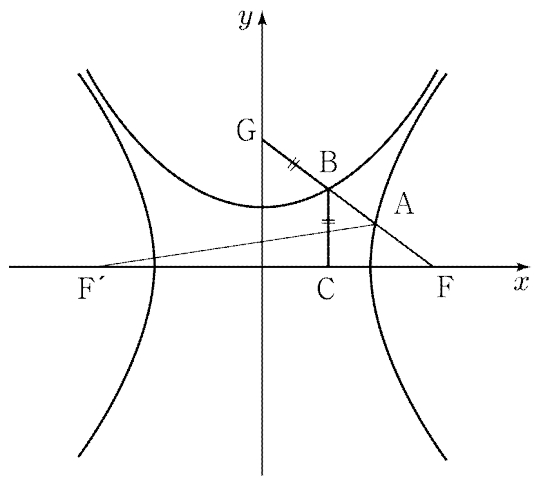
28. [정답] 64

○ **Point**

1) 이차곡선의 정의
2) 닮음
3) 대칭성

[해설]

포물선 $x^2=6y-9$의 초점 G의 좌표는 $(0,3)$이고 준선의 방정식은 $y=0$이다. 점 F의 좌표가 $(4,0)$이므로 $\overline{\mathrm{GF}}=5$이다.
점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 할 때, 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{GB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이다.



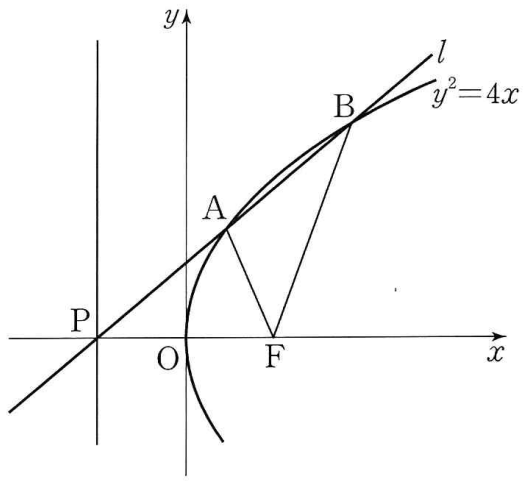
$\overline{\mathrm{GB}}:\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{AF'}}=6:5:21$이므로 $\overline{\mathrm{GB}}=6k$라 하면, $\overline{\mathrm{BA}}=5k$, $\overline{\mathrm{AF'}}=21k$이다. 원점을 O라 하면, $\dfrac{\overline{\mathrm{OG}}}{\overline{\mathrm{GF}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{BF}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{3}{5}$이고,
$\overline{\mathrm{GB}}=\overline{\mathrm{BC}}=6k$이므로 $\overline{\mathrm{BF}}=10k$이다.
$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BA}}+\overline{\mathrm{AF}}$에서 $\overline{\mathrm{BA}}=5k$이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=5k$이고,
$\overline{\mathrm{GF}}=\overline{\mathrm{GB}}+\overline{\mathrm{BF}}=6k+10k=5$에서 $k=\dfrac{5}{16}$
$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=21k-5k=16k=5$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 $2a=5$, $a=\dfrac{5}{2}$이고, 쌍곡선의 초점의 x좌표가 4이므로 $a^2+b^2=16$에서

$b^2=\dfrac{39}{4}$ 따라서 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{\frac{39}{4}}{\frac{25}{4}}=\dfrac{39}{25}$ 이므로 $p=25$, $q=39$이다.

$p+q=64$

함께 보는 기출 [2013학년도 6월 평가원]

포물선 $y^2=4x$의 초점을 F, 준선이 x축과 만나는 점을 P, 점 P를 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{FA}}:\overline{\mathrm{FB}}=1:2$일 때, 직선 l의 기울기는? [4점]

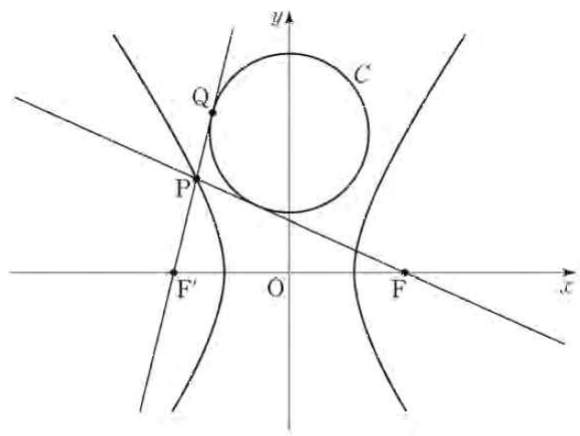


① $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $\dfrac{4}{5}$
④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

정답 : ⑤

함께 보는 기출 [2018학년도 수능]

그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{17}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 F′P와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=5\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{F'P}}<\overline{\mathrm{FP}}$) [4점]



정답 : 116

29. [정답] 19

○ **Point**

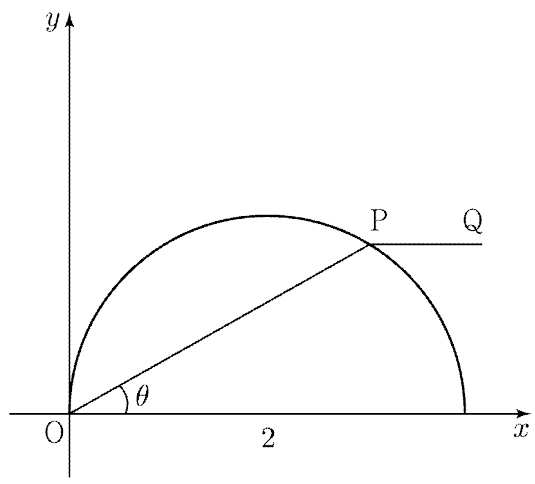
주어진 식의 기하적인 상황해석

● **COMMENT & PLAN**

주어진 조건과 식을 해석한 후 기하적인 표현

[해설]

주어진 조건에 의하여 직선 OP와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 θ이고, 점 Q는 점 P를 x축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동 시킨 점이다.

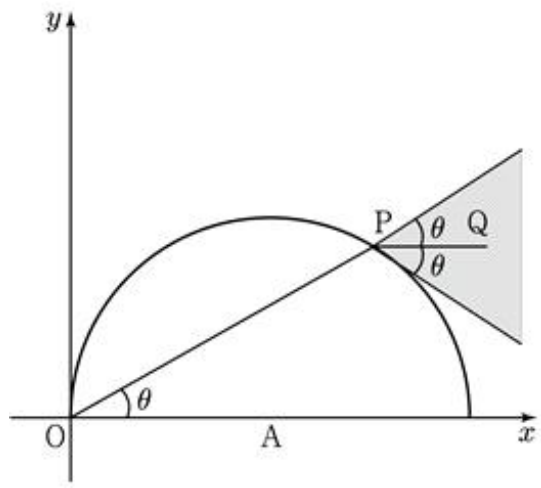


두 직선 PR와 PQ가 이루는 각의 크기를 α라 할 때,

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\cos\alpha$이므로

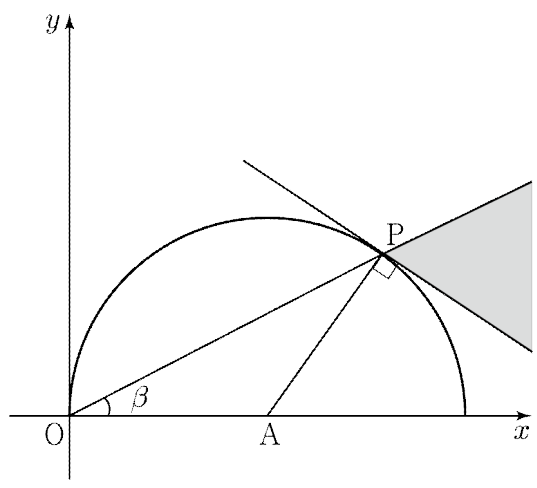
$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\cos\theta \le \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\cos\alpha$, $\cos\theta \le \cos\alpha$이다.

$\alpha \le \theta$이므로 점 R가 존재할 수 있는 영역은 아래 그림의 색칠된 부분이다.

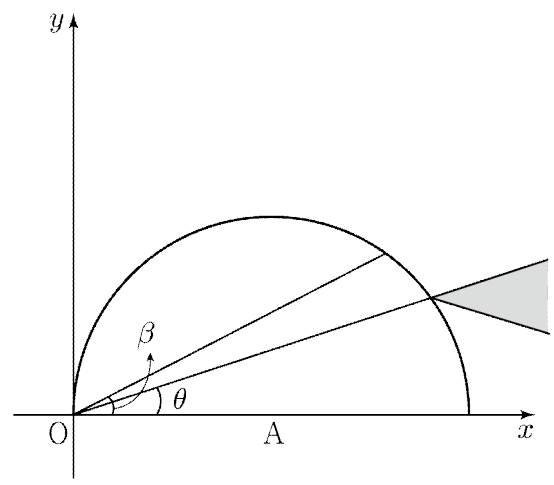


점 $(2,\,0)$을 A라 할 때, 다음 그림과 같이 점 P를 지나고 직선 AP와 수직인 직선이

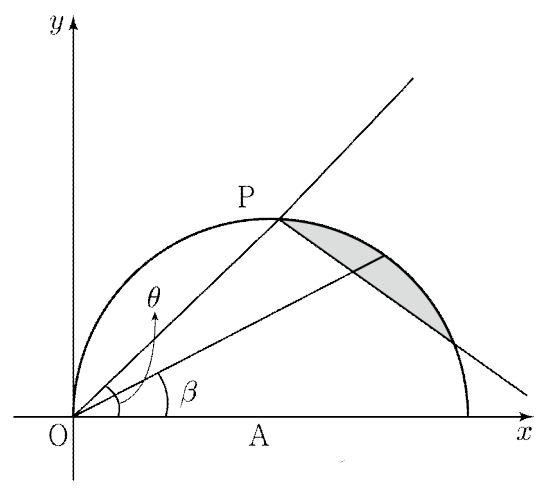
원에 접할 때의 θ의 값을 β라 하자.



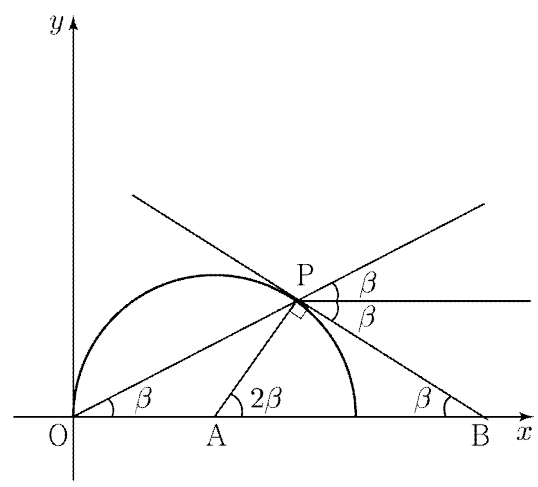
다음 그림과 같이 $\theta \le \beta$라면, 점 R가 존재하는 영역과 영역 $\{(x,\,y)\,|\,(x-2)^2+y^2<4,\ y\ge 0\}$의 공통부분이 존재하지 않는다.



$\theta > \beta$라면, 다음 그림에서 칠해진 영역과 같이 점 R가 존재하는 영역과 영역 $\{(x,\,y)\,|\,(x-2)^2+y^2<4,\ y\ge 0\}$의 공통부분이 존재한다.



따라서, 주어진 조건을 만족시키기 위해서 $\theta \le \beta$이다.



$\angle\mathrm{ABP}=\beta$이고, 원주각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{PAB}=2\beta$이므로

$\angle\mathrm{ABP}+\angle\mathrm{PAB}=\beta+2\beta=\dfrac{\pi}{2}$에서 $\beta=\dfrac{\pi}{6}$

점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(2+2\cos2\theta,\ 2\sin2\theta)$이므로 점 Q의 좌표는 $(3+2\cos2\theta,\ 2\sin2\theta)$이다. 따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=13+12\cos2\theta$이고,

$\theta \le \beta=\dfrac{\pi}{6}$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=13+12\cos2\theta$의 최솟값은

$13+12\cos\dfrac{\pi}{3}=19$이다.

대성마이맥

30. [정답] 7

○ Point

(1)최댓값 또는 최솟값은 경계에서의 함숫값 또는 극값에서 생긴다.
최댓값 = 가장 큰 값
최솟값 = 가장 작은 값

(2) 평면에서 두 직선의 관계
❶ 일치 - 함숫값과 기울기가 같다.
❷ 평행 - 기울기는 같고, 함숫값은 다르다.
❸ 교차 - 기울기가 다르다.

(3) 자주 등장하는 대칭성 ⇨ 점대칭성 OR 선대칭성
$\int$점대칭 = 선대칭 , $\int$선대칭 = 점대칭
주의 $\int$기함수 = 우함수, $\int$우함수 = 점대칭함수

● COMMENT & PLAN

문제의 마지막 물음을 보았을 때, a와 n의 관계가 있음을 의심할 수 있다. $f(x)$의 함수가 주어져 있기 때문에 f를 갖고 g를 관찰할 수 있다. 다만 g의 정의가 기존 기출에서 되지 않은 정의이므로 조건 (가),(나)를 사용하기 위한 미분의 흐름을 따라 식을 정리하면 g'의 정보를 얻을 수 있고 이를 통해 g의 정보를 확인할 수 있다.

정적분으로 정의된 함수의 경우 그 자체로 함수의 이해가 힘들면
❶ 대입을 통한 축의 결정
❷ 미분을 통한 함수의 증감 및 특징 파악
위 두 가지를 통해 함수를 이해할 수 있어야 한다. 때로 적분할 때도 있기는 하지만 그런 경우 피적분함수의 적분이 매우 쉬울 때 라고 생각하면 좋을거 같고, 일반적으로 도함수를 통한 원함수의 이해를 높이는 경우가 더 많다.

(설계1)
(가),(나) 조건을 사용하기 위한 $g(x)$의 대입과 미분

(설계2)
a와 n의 관계 파악

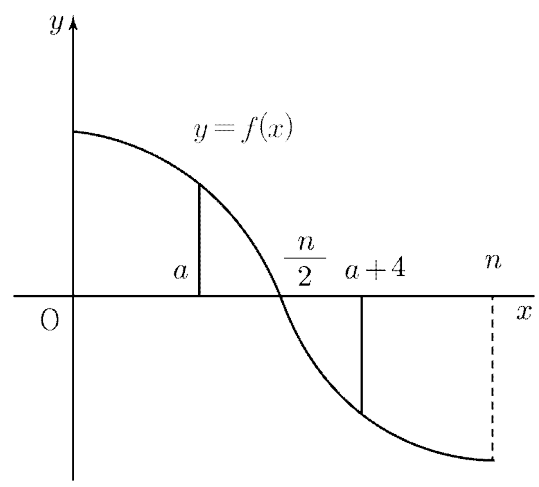
(설계3)
경계에서의 최소와 극소에서의 최소 비교.

[해설]

$g(x)$에 $x=a$, $x=a+4$를 대입하면 $g(a)=g(a+4)=0$
곡선 $y=g(x)$ 위의 x좌표가 각각 a, $a+4$인 두 점에서의 접선이 일치해야 하므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 x좌표가 각각 a, $a+4$인 두 점에서의 미분계수가 0이다.
따라서 $g'(a)=g'(a+4)=0$
$g(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)\times\left(\int_x^{a+4} f(t)dt\right)$를 미분하면
$g'(x)=f(x)\int_x^{a+4} f(t)dt-f(x)\int_a^x f(t)dt$이고, $x=a$와 $x=a+4$를 대입하면
$g'(a)=f(a)\int_a^{a+4} f(t)dt-f(a)\int_a^a f(t)dt=f(a)\int_a^{a+4} f(t)dt=0$
$\cdots$ ㉠
$g'(a+4)=f(a+4)\int_{a+4}^{a+4} f(t)dt-f(a+4)\int_a^{a+4} f(t)dt=-f(a+4)\int_a^{a+4} f(t)dt=0$
$\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $f(a)\int_a^{a+4} f(t)dt=0$, $f(a+4)\int_a^{a+4} f(t)dt=0$이다.

$0<x<n$일 때 $f'(x)=-\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}x<0$이므로 열린 구간 $(0,\ n)$에서 $f(x)=\cos\frac{\pi}{n}x$는 감소함수이다. 따라서 $f(a)=0$이라 가정하면, $a<x<n$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이므로 $\int_a^{a+4} f(t)dt<0$이고, $f(a+4)<0$이므로 ㉡의 $f(a+4)\int_a^{a+4} f(t)dt=0$에 모순이다.
마찬가지로 $f(a+4)=0$이라 가정하면, $0<x<a+4$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 $\int_a^{a+4} f(t)dt>0$이고, $f(a)>0$이므로 ㉠의 $f(a)\int_a^{a+4} f(t)dt=0$에 모순이다.
따라서 $\int_a^{a+4} f(t)dt=0$이다.



그림과 같이 $x=a$와 $x=a+4$가 $x=\frac{n}{2}$에 대칭일 때
$\int_a^{a+4} f(x)dx=0$을 만족시킨다. $a<\frac{n}{2}<a+4$ $\cdots$ ㉢이고,
$\frac{a+a+4}{2}=\frac{n}{2}$, $n=2a+4$ $\cdots$ ㉣이다.

한편, $\int_x^{a+4} f(t)dt=\int_a^{a+4} f(t)dt+\int_x^a f(t)dt=\int_x^a f(t)dt$이므로
$g'(x)=f(x)\int_x^{a+4} f(t)dt-f(x)\int_a^x f(t)dt$
$=f(x)\int_x^a f(t)dt-f(x)\int_a^x f(t)dt=-2f(x)\int_a^x f(t)dt$
$f(x)$는 $x=\frac{n}{2}$에서 부호가 변하고, $\int_a^x f(t)dt$는 $x=a$, $x=a+4$에서 부호가 변한다.
따라서 $g'(x)=-2f(x)\int_a^x f(t)dt$의 부호 변화를 통해 $g(x)$의 증감표를 그리면 아래와 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{n}{2}$	$\cdots$	$a+4$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)$는 $\left(\frac{n}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭인 함수이므로 $f\left(\frac{n}{2}+x\right)+f\left(\frac{n}{2}-x\right)=0$

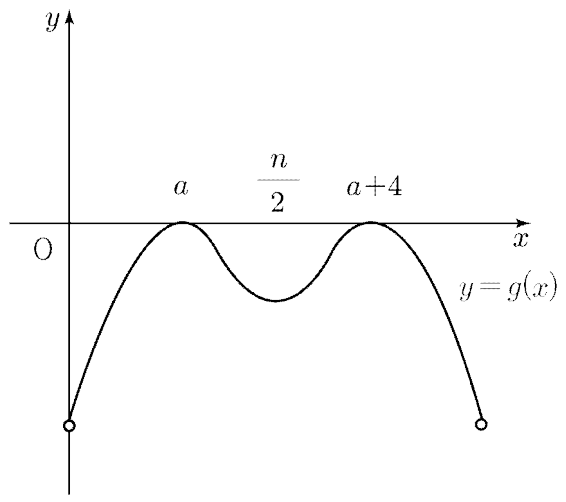
대성마이맥

이고 $f(n-x)=f(x)$

$g'(n-x)=-2f(n-x)\int_a^{n-x} f(t)dt=2f(x)\int_a^x f(t)dt$ 이므로

$g'(x)=-g'(n-x)$ 이므로 $g'(x)$는 $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$에 대해 점대칭 함수이다.

따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{n}{2}$에 대하여 대칭이다. $g(x)$는 열린구간 $(0, n)$에서 정의된 함수이므로 아래의 그림과 같이 $\lim_{x\to 0+} g(x)<g\left(\frac{n}{2}\right)$라면 함수 $g(x)$의 최솟값은 존재할 수 없다.



따라서 $g(x)$의 최솟값이 존재하기 위해서는 $\lim_{x\to 0+} g(x)\geq g\left(\frac{n}{2}\right)$를 만족시켜야 한다.

$$g(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)\times\left(\int_x^{a+4} f(t)dt\right)$$
$$=\left(\int_a^x f(t)dt\right)\times\left(\int_a^{a+4} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right)=-\left(\int_a^x f(t)dt\right)^2$$

이므로 $g(x)=-\left(\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}x-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}a\right)^2$ 이다.

$\lim_{x\to 0+} g(x)=-\left(\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}a\right)^2$ 이고, $g\left(\frac{n}{2}\right)=-\left(\frac{n}{\pi}-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}a\right)^2$ 이므로

$\lim_{x\to 0+} g(x)\geq g\left(\frac{n}{2}\right)$, $\left(\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}a\right)^2\leq\left(\frac{n}{\pi}-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}a\right)^2$ 이다.

$\left(\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}a\right)^2\leq\left(\frac{n}{\pi}-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}a\right)^2$ 은 $\left(\sin\frac{\pi}{n}a\right)^2\leq\left(1-\sin\frac{\pi}{n}a\right)^2$ 이고

$\left(\sin\frac{\pi}{n}a\right)^2-\left(1-\sin\frac{\pi}{n}a\right)^2\leq 0$은

$\left(\sin\frac{\pi}{n}a+1-\sin\frac{\pi}{n}a\right)\left(\sin\frac{\pi}{n}a-1+\sin\frac{\pi}{n}a\right)\leq 0$이므로 $\sin\frac{\pi}{n}a\leq\frac{1}{2}$ 이다.

㉢의 결과로 $a<\frac{n}{2}<a+4$, $\frac{\pi}{n}a<\frac{\pi}{2}<(a+4)\frac{\pi}{n}$ 이다.

$\frac{\pi}{n}a<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin\frac{\pi}{n}a\leq\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$ 이기 위해서는 $\frac{\pi}{n}a\leq\frac{\pi}{6}$,

$a\leq\frac{n}{6}$ 을 만족시키면 된다.

㉣의 결과 $n=2a+4$를 대입하면 $a\leq\frac{2a+4}{6}$, $a\leq 1$ 이다. a의 최댓값은 1이고, a가 최대일 때의 n의 값은 6이다.

따라서 $\alpha=1$, $\beta=6$이고 $\alpha+\beta=7$이다.

함께 보는 기출 [2018학년도 9월 평가원]

함수 $f(x)=\ln(e^x+1)+2e^x$에 대하여 이차함수 $g(x)$와 실수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $h(x)=|g(x)-f(x-k)|$는 $x=k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖고, 닫힌 구간 $[k-1, k+1]$에서 최댓값 $2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

$g'\left(k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. $\left(단, \frac{5}{2}<e<3이다.\right)$[4점]

정답 : 6

함께 보는 기출 [2016학년도 9월 평가원]

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}|\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi\leq x<0\right)\\ \sin x-|\sin x| & \left(0\leq x\leq\frac{7}{2}\pi\right)\end{cases}$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt\geq 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? $\left(단, -\frac{7}{2}\pi\leq a\leq\frac{7}{2}\pi\right)$ [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

정답 : ①

함께 보는 기출 [2012학년도 9월 평가원]

닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? (4점)

> (가) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=1$
>
> (나) $\cos x\int_0^x f(t)dt=\sin x\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ $\left(단, 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

정답 : ④

함께 보는 기출 [2018학년도 사관학교]

도함수가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
> (나) $f(\pi)=0$
> (다) $\int_0^{\pi} x^2 f'(x)dx=-8\pi$

$\int_{-\pi}^{\pi}(x+\cos x)f(x)dx=k\pi$일 때, k의 값을 구하시오.[3점]

정답 : 8

대성마이맥