< 정답표 >

1.	①	**2.**	①	**3.**	②	**4.**	①	**5.**	④
6.	②	**7.**	①	**8.**	①	**9.**	⑤	**10.**	③
11.	①	**12.**	②	**13.**	①	**14.**	①	**15.**	②
16.	⑤	**17.**	⑤	**18.**	①	**19.**	④	**20.**	⑤
21.	④	**22.**	9	**23.**	4	**24.**	5	**25.**	6
26.	10	**27.**	25	**28.**	19	**29.**	8	**30.**	40

1 **출제의도** : 지수가 유리수인 실수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$27^{\frac{1}{3}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}=3^{3\times\frac{1}{3}}=3^1=3$$

정답 ①

2 **출제의도** : 집합의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A\cap B=\{1,\ 2,\ 3\}\cap\{1,\ 3,\ 5\}$$
$$=\{1,\ 3\}$$

따라서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은 $1+3=4$

정답 ①

3 **출제의도** : 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+1}{3n^2-2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n^2}}$$
$$=\frac{8+0}{3-0}$$
$$=\frac{8}{3}$$

정답 ②

4 **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 로그값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_3 6-\log_3 2=\log_3\frac{6}{2}$$
$$=\log_3 3=1$$

정답 ①

5 **출제의도** : 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$A\cap B=A-(A\cap B^C)$이고,

$A\cap B^C\subset A$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

따라서

$$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

정답 ④

6 **출제의도** : 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 1-}f(x)=1,\ \lim_{x\to 2+}f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)=1+1=2$$

정답 ②

7 **정답풀이 :**

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\left\{1+\dfrac{a}{2}\right\}$

$Q=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{13}{2}\right\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로

$\dfrac{3}{2} \le 1+\dfrac{a}{2} \le \dfrac{13}{2}$, 즉 $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{a}{2} \le \dfrac{11}{2}$이어야 한다.

따라서 $1 \le a \le 11$이므로 자연수 a의 개수는 11이다.

정답 ①

8 **출제의도** : 함수의 그래프를 이용하여 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=-2$ 이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=0+(-2)=-2$

정답 ①

9 **출제의도** : 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid x \ne -2,\ x \ne 4,\ x$는 실수$\}$,

$Q=\{x \mid -2 \le x \le 4\}$

① $P \not\subset Q$이므로 명제 $p \to q$는 거짓이다.

② 두 조건 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이다. 이때,

$P^C=\{x \mid x=-2$ 또는 $x=4\}$,

$Q^C=\{x \mid x<-2$ 또는 $x>4\}$

이므로 $P^C \not\subset Q^C$이다.

따라서 명제 $\sim p \to \sim q$는 거짓이다.

③ $Q=\{x \mid -2 \le x \le 4\}$,

$P^C=\{x \mid x=-2$ 또는 $x=4\}$

이므로 $Q \not\subset P^C$ 이다.

따라서 명제 $q \to \sim p$는 거짓이다.

④ $Q=\{x \mid -2 \le x \le 4\}$,

$P=\{x \mid x \ne -2,\ x \ne 4,\ x$는 실수$\}$

이므로 $Q \not\subset P$ 이다.

따라서 명제 $q \to p$는 거짓이다.

⑤ $P^C=\{x \mid x=-2$ 또는 $x=4\}$,

$Q=\{x \mid -2 \le x \le 4\}$

이므로 $P^C \subset Q$ 이다.

따라서 명제 $\sim p \to q$는 참이다.

정답 ⑤

10 **출제의도** : 연속함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 연속함수이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서,

$\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+2)f(x)$

$=\lim_{x\to2}(x+2)\times\lim_{x\to2}f(x)$

$=4f(2)=12$

이므로

$f(2)=3$

정답 ③

11 **출제의도** : $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_n+b_n=10$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)&=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k+b_k)+b_k\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(10+b_k)\\&=\sum_{k=1}^{10}10+\sum_{k=1}^{10}b_k\\&=100+\sum_{k=1}^{10}b_k\end{aligned}$$

이때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=160$이므로

$100+\sum_{k=1}^{10}b_k=160$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}b_k=60$

정답 ①

12

출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

전체 학생이 100명이므로 축구를 선택한 학생은 70명, 야구를 선택한 학생은 30명이다.

이 학교 전체 학생을 여학생과 남학생, 축구를 선택한 학생과 야구를 선택한 학생으로 나누어 표로 나타내면 다음과 같다.

	축구	야구	계
여학생	a	b	40
남학생	c	d	60
계	70	30	100

이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명이 여학생인 사건을 A라 하면 남학생인 사건은 A^C이고, 축구를 선택한 학생인 사건을 B라 하면 야구를 선택한 학생인 사건은 B^C이다. 이때 임의로 뽑은 1명이 축구를 선택한 남학생일 확률이 $\frac{2}{5}$이므로

$$P(B\cap A^C)=\frac{c}{100}=\frac{2}{5}$$

에서 $c=40$

$a+c=70$에서 $a=30$

$c+d=60$에서 $d=20$

$a+b=40$에서 $b=10$

따라서 이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명이 야구를 선택한 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률은

$$P(A|B^C)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}$$

$$=\frac{\frac{10}{100}}{\frac{30}{100}}=\frac{1}{3}$$

정답 ②

13

출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

공차를 d라 하자.

$a_1=-15$이고 $a_4=|a_3|\geq 0$이므로

$a_1+3d=-15+3d\geq 0$

따라서 $d\geq 5$ ⋯ ㉠

$|a_3|=a_4$에서 $|a_1+2d|=a_1+3d$이므로

$a_1+2d=a_1+3d$ 또는

$a_1+2d=-(a_1+3d)$

(i) $a_1+2d=a_1+3d$이면

$d=0$이므로 ㉠에 모순이다.

(ii) $a_1+2d=-(a_1+3d)$이면

$d=-\frac{2}{5}a_1=-\frac{2}{5}\times(-15)=6$이므로 ㉠을 만족시킨다.

따라서 $d=6$이므로

$a_7=a_1+6d$

$=-15+6\times6=-15+36=21$

정답 ①

14

출제의도 : 도함수를 활용하여 속도에 대한 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-10t+a$$

점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면 실수 t $(t\geq 0)$에 대하여 항상 $v\geq 0$이거나 항상 $v\leq 0$이어야 한다.

이때

$$v=3\left(t-\frac{5}{3}\right)^2+a-\frac{25}{3}$$

이므로 실수 t $(t\geq 0)$에 대하여 항상 $v\leq 0$일 수는 없다. 즉, 실수 t $(t\geq 0)$에 대하여 항상 $v\geq 0$이어야 하므로

$$a-\frac{25}{3}\geq 0$$

따라서 $a\geq \frac{25}{3}$이므로 조건을 만족시키는 자연수 a의 최솟값은 9이다.

정답 ①

15

출제의도 : 다항함수의 미분법을 방정식에 응용하여 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^3-3x^2-9x=k$에서

$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

주어진 방정식의 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

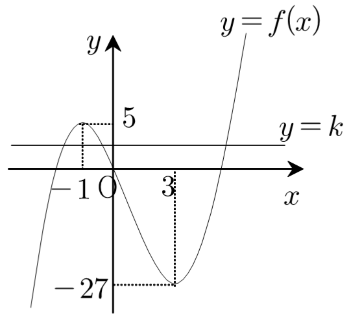
$$f'(x)=3x^2-6x-9$$
$$=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5 (극대)	↘	-27 (극소)	↗

따라서 곡선 $y=f(x)$는 다음 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는

$-27<k<5$

이고, 정수 k의 최댓값은 4이다.

정답 ②

16

출제의도 : 자연수의 분할과 집합의 분할을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

서로 다른 종류의 사탕 3개를 같은 종류의 주머니 3개에 각각 1개씩 나누어 담는 경우의 수는 1이다.

이제 주머니 3개는 서로 다른 종류의 사탕 3개가 각각 1개씩 들어 있으므로 서로 구별이 된다.

따라서 같은 종류의 구슬 7개를 서로 구별이 되는 주머니 3개에 남김없이 나누어 담을 때, 각 주머니에 구슬이 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 주머니 3개에서 중복을 허락하여 $4(=7-3)$개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2$$

$$=\frac{6\times5}{2}=15$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$1\times15=15$$

정답 ⑤

17

출제의도 : 함수의 연속의 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x<0$일 때,

$g(x)=-f(x)+x^2+4$

$x>0$일 때,

$g(x)=f(x)-x^2-2x-8$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$$

이다. 이때,

$$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}\{-f(x)+x^2+4\}$$

$$=-f(0)+4$$

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\{f(x)-x^2-2x-8\}$$

$$=f(0)-8$$

이므로

$\lim_{x\to0-}g(x)-\lim_{x\to0+}g(x)=6$에서

$\{-f(0)+4\}-\{f(0)-8\}=6$

따라서

$f(0)=3$

정답 ⑤

18 **출제의도** : 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 $k(4 \le k \le n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자여수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로

$$P(X=k)=\frac{\boxed{{}_{k-1}C_3}}{{}_nC_4}$$

이다. 자연수 $r(1 \le r \le k)$에 대하여

$${}_kC_r=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}C_{r-1}$$

이므로

$$\begin{aligned}k\times{}_{k-1}C_3&=k\times\frac{k-1}{3}\times{}_{k-2}C_2\\&=4\times\frac{k(k-1)}{12}\times{}_{k-2}C_2\\&=4\times\frac{k(k-1)}{4\times3}\times\frac{(k-2)!}{(k-4)!2!}\\&=4\times\frac{k!}{(k-4)!4!}\\&=4\times\boxed{{}_kC_4}\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=4}^{n}\{k\times P(X=k)\}\\&=\frac{1}{{}_nC_4}\sum_{k=1}^{n}(k\times{}_{k-1}C_3)\\&=\frac{4}{{}_nC_4}\sum_{k=4}^{n}{}_kC_4\end{aligned}$$

이다.

$$\sum_{k=1}^{n}\boxed{{}_kC_4}={}_{n+1}C_5$$

이므로

$$\begin{aligned}E(X)&=\frac{4}{{}_nC_4}\times{}_{n+1}C_5\\&=\frac{4}{\frac{n!}{(n-4)!4!}}\times\frac{(n+1)!}{(n-4)!5!}\\&=(n+1)\times\boxed{\frac{4}{5}}\end{aligned}$$

즉, $f(k)={}_{k-1}C_3$, $g(k)={}_kC_4$, $a=\frac{4}{5}$이므로

$$\begin{aligned}a\times f(6)\times g(5)&=\frac{4}{5}\times{}_5C_3\times{}_5C_4\\&=\frac{4}{5}\times\frac{5\times4}{2\times1}\times5=40\end{aligned}$$

정답 ①

19 **출제의도** : 중복조합을 이용하여 자연수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 방정식 $a+b+c+d=7$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같다.

이 때, $a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$이라 하면 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식

$a'+1+b'+1+c'+1+d'+1=7$

즉, $a'+b'+c'+d'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3$$
$$=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$$
$$=20$$

정답 ④

20 **출제의도** : 삼차함수의 그래프의 특징을 이용하여 명제의 참, 거짓을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$라고 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이므로

$f'(-3)=f(3)$ 에서 $b=0$이고

$x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-2)=12a+c=0$ 에서 $c=-12a$이다.

따라서,

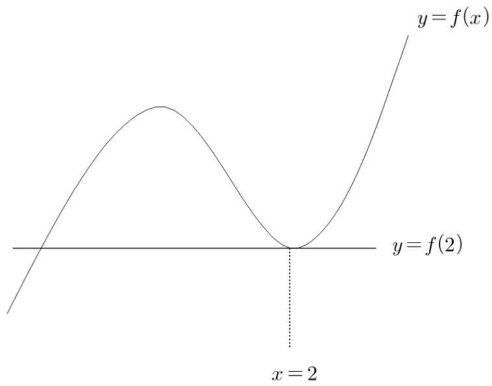
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$=3ax^2-12a \ (a>0)$$

이므로 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. $f'(x)=3ax^2-12a$
$$=3a(x+2)(x-2)$$

이고 조건 (가)에 의하여 삼차함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

따라서, 그림과 같이 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.



(참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서

$f(x)=ax^3-12ax+d(a>0)$

$f'(x)=3ax^2-12a$

이므로 점 $(-1,f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$y-(11a+d)=-9a(x+1)$

$y=-9ax+2a+d\cdots$㉠

㉠에 점 $(2,f(2))$ 즉, $(2,-16a+d)$를 대입하면 등식이 성립하므로 점 $(-1,f(-1))$에서의 접선의 방정식은 점 $(2,f(2))$를 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

21 **출제의도** : 사차함수의 그래프의 특징과 정적분으로 정의된 함수의 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이때 $f(t)\geq 0$인 구간에서는

$f(t)-|f(t)|=0,$

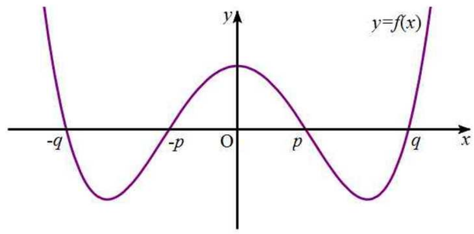
$f(t)<0$인 구간에서는

$f(t)-|f(t)|=2f(t)<0$

이고, 조건 (가)에 의하여 $-1\leq t\leq 2$일 때 $f(t)\geq 0$이어야 한다.

또, 조건 (나)에 의하여 $f(t)<0$인 구간이 있어야 한다.

따라서 $f(0)>0$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



위 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 네 점의 x좌표를 각각 $-q,\ -p,\ p,\ q\ (0<p<q)$라 하자.

(ⅰ) $0<x<\dfrac{p}{2}$일 때, 구간 $[-x,2x]$에서 $f(x)\geq 0$이므로

$g(x)=\int_{-x}^{2x} 0dt=0$

조건 (가)에 의하여 $0<x<1$일 때 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)이므로

$\frac{p}{2} \geq 1$, 즉 $p \geq 2$

(ⅱ) $\frac{p}{2}<x<q$일 때, 구간 $[-x, 2x]$에서 $f(x)<0$인 구간이 점점 커지므로 $g(x)$는 감소한다.

조건 (나)에 의하여 $1<x<5$일 때 $g(x)$는 감소하므로

$\frac{p}{2} \leq 1$, $q \geq 5$

즉, $p \leq 2$, $q \geq 5$

(ⅲ) $x>q$일 때, 구간 $[-x, -q]$와 구간 $[q, 2x]$에서 $f(x) \geq 0$이므로

$g(x)=g(q)$

조건 (다)에 의하여 $x>5$일 때 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)이므로

$q \leq 5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$p=2$, $q=5$

따라서

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x+2)(x-2)(x+5)(x-5)\\
&=(x^2-4)(x^2-25)
\end{aligned}
$$

이므로

$f(\sqrt{2})=(-2)\times(-23)=46$

정답 ④

22 **출제의도** : 순열과 조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

${}_3\mathrm{P}_2=3\times 2=6$,

${}_3\mathrm{C}_2=\frac{3\times 2}{2}=3$

따라서 ${}_3\mathrm{P}_2+{}_3\mathrm{C}_2=6+3=9$

정답 9

23 **출제의도** : 다항함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=3x^2-2x$에서

$f'(x)=6x-2$

따라서

$f'(1)=6\times 1-2=4$

정답 4

24 **출제의도** : 유리함수의 그래프의 점근선과 평행이동을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

두 점근선의 교점의 좌표가 $(-2, 3)$인 유리함수는

$y=\dfrac{k}{x+2}+3$ (단, k는 0이 아닌 상수)

이므로

$$y=\frac{k+3(x+2)}{x+2}=\frac{3x+k+6}{x+2}$$

$k+6=2$에서 $k=-4$이고 이때

$a=3,\ b=2$

따라서

$a+b=3+2=5$

정답 5

25 **출제의도** : 로그의 정의를 이용하여 로그의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a^{\frac{1}{2}}=8$이므로

$a=8^2=(2^3)^2=2^{3\times 2}=2^6$

따라서 $\log_2 a=\log_2 2^6=6$

정답 6

26 **출제의도** : 등비수열의 뜻과 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 등비수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면 모든 항이 양수이므로 $r>0$이다.

이때

$S_4-S_3=2$이므로 $a_4=2$

$S_6-S_5=50$이므로 $a_6=50$

$a_6=a_4\times r^2$이므로 $r^2=\dfrac{a_6}{a_4}=\dfrac{50}{2}=25$

$r>0$이므로 $r=5$

따라서

$a_5=a_4\times r=2\times 5=10$

정답 10

27

출제의도 : 표본평균에 대한 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{E}(\overline{X})=8,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{(1.2)^2}{n}$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(8,\ \left(\dfrac{1.2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$

을 따르고, $Z=\dfrac{\overline{X}-8}{\dfrac{1.2}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때,

$\mathrm{P}(7.76 \le \overline{X} \le 8.24)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{7.76-8}{\dfrac{1.2}{\sqrt{n}}} \le Z \le \dfrac{8.24-8}{\dfrac{1.2}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{5} \le Z \le \dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)$

이므로

$\mathrm{P}(7.76 \le \overline{X} \le 8.24) \ge 0.6826$에서

$2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{\sqrt{n}}{5}\right) \ge 0.6826$

즉, $\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{\sqrt{n}}{5}\right) \ge 0.3413$

한편

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413$

이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{5} \ge 1$, 즉 $n \ge 25$이어야 한다.

따라서 구하는 n의 최솟값은 25이다.

정답 25

28

출제의도 : 급수와 정적분의 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{1}{n}$

$=\int_0^1 xf(x)dx$

$=\int_0^1 x(4x^2+6x+32)dx$

$=\int_0^1 (4x^3+6x^2+32x)dx$

$=[x^4+2x^3+16x^2]_0^1$

$=1+2+16=19$

정답 19

29 **출제의도** : 수열의 합의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리는

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=\frac{1}{25}\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}$$

$$=\frac{n^2}{25}=\left(\frac{n}{5}\right)^2$$

점 A_n이 직선 $y=x$ 위에 있기 위해서는 점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 짝수이어야 한다.

$\left(\frac{n}{5}\right)^2$이 짝수이면 $\frac{n}{5}$도 짝수이므로

$\frac{n}{5}=2m$ (단, m은 자연수)

에서 $n=10m$이다.

따라서 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 두 번째 점은 $m=2$, 즉 $n=20$일 때이므로 점 A_{20}이다.

경로를 따라 이동한 거리가 $2k$(k는 자연수)일 때 점 P의 x좌표는 k이다.

점 A_0에서 점 A_{20}까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 $\left(\frac{20}{5}\right)^2=4^2=16$이므로 점 A_{20}의 x좌표는 8이다. 즉,

$a=8$

정답 8

30 **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x=\alpha$가 방정식 $(f\circ f)(x)=x$, 즉 $f(f(x))=x$의 한 실근이라고 하면 다음과 같은 두 가지 경우 중의 하나이다.

(i) $f(\alpha)=\alpha$일 때

α는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표이다.

(ii) $f(\alpha)=\beta$이고 $f(\beta)=\alpha$일 때

(단, $\alpha\neq\beta$)

곡선 $y=f(x)$는 두 점 (α,β), (β,α)를 지나고, 이 두 점을 모두 지나는 직선의 기울기는

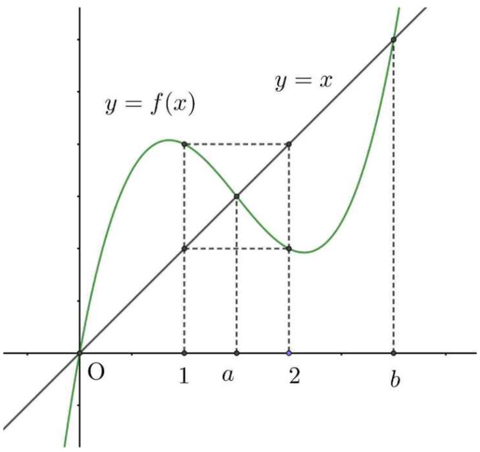
$$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=-1$$

이다.

따라서 (i) 또는 (ii)와 주어진 조건

$f'(1)<0$, $f'(2)<0$ 및 $0<1<a<2<b$

를 모두 만족시키고 α의 개수가 5가 되도록 하는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같은 경우 뿐이다.



즉, 방정식 $f(x)=x$를 만족시키는 실수는 0, a, b의 3개이고,

$f(1)=2$, $f(2)=1$이어야 한다.

따라서 삼차방정식 $f(x)-x=0$의 해는 0, a, b이므로

$f(x)-x=kx(x-a)(x-b)$ (k는 양의 상수)로 놓을 수 있다.

$f(1)=2$에서

$2-1=k(a-1)(b-1)$

$ab-(a+b)=\dfrac{1}{k}-1$ ⋯ ㉠

$f(2)=1$에서

$1-2=2k(a-2)(b-2)$

$ab-2(a+b)=-\dfrac{1}{2k}-4$ ⋯ ㉡

한편,

$f(x)=k\{x^3-(a+b)x^2+abx\}+x$

이므로

$f'(x)=k\{3x^2-2(a+b)x+ab\}+1$

따라서 $f'(0)-f'(1)=6$에서

$abk+1-k\{3-2(a+b)+ab\}-1=6$

$-3k+2k(a+b)=6$

$a+b=\dfrac{3}{k}+\dfrac{3}{2}$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$ab=\dfrac{4}{k}+\dfrac{1}{2}$이고 $ab=\dfrac{11}{2k}-1$이므로

$\dfrac{4}{k}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2k}-1$에서

$\dfrac{3}{2k}=\dfrac{3}{2}$

따라서 $k=1$이므로

$a+b=\dfrac{9}{2}$, $ab=\dfrac{9}{2}$

이때

$$f(x)=kx(x-a)(x-b)+x$$
$$=x^3-(a+b)x^2+(ab+1)x$$

이므로

$f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{11}{2}x$

따라서

$$f(5)=5\left(5^2-\frac{9}{2}\times5+\frac{11}{2}\right)$$
$$=5\left(25-\frac{45}{2}+\frac{11}{2}\right)$$
$$=5(25-17)=40$$

정답 40