< 정답표 >

1.	①	**2.**	③	**3.**	④	**4.**	⑤	**5.**	⑤
6.	①	**7.**	①	**8.**	④	**9.**	④	**10.**	③
11.	①	**12.**	②	**13.**	⑤	**14.**	③	**15.**	③
16.	⑤	**17.**	⑤	**18.**	②	**19.**	①	**20.**	②
21.	②	**22.**	5	**23.**	16	**24.**	4	**25.**	32
26.	28	**27.**	51	**28.**	18	**29.**	512	**30.**	60

1 [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2 3+\log_2 \frac{2}{3}=\log_2 2=1$

2 [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A^C=\{1,\ 9\}$ 이므로

A^C의 모든 원소의 합은 $1+9=10$

3 [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+1}{2n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}=4$$

4 [출제의도] 로그 계산하기

$\log_3 9+\log_3\sqrt{3}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

5 [출제의도] 합성함수 이해하기

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=5$

6 [출제의도] 절대부등식 이해하기

$x>0$, $\frac{9}{x}>0$ 이므로 $x+\frac{9}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{9}{x}}=6$

(단, 등호는 $x=3$일 때 성립한다.)

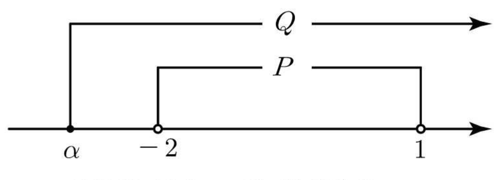
따라서 $x+\frac{9}{x}$의 최솟값은 6

7 [출제의도] 충분조건을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid(x+2)(x-1)<0\}$, $Q=\{x\mid x\geq\alpha\}$

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$



$\alpha\leq -2$ 이므로 정수 α의 최댓값은 -2

8 [출제의도] 지수법칙 이해하기

$12=2^{\frac{4}{a}}$, $3=2^{\frac{1}{b}}$ 이므로

$2^{\frac{4}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{12}{3}=4$

9 [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

일반항은 $a_n=ar^{n-1}$

$a_7=2\sqrt{2}\,a_4$ 이므로 $ar^6=2\sqrt{2}\,ar^3\ (a>0)$

$r^3=2\sqrt{2}$, 즉 $r=\sqrt{2}$

$a_2=\sqrt{2}\,a=2\sqrt{2}$ 이므로 $a=2$

따라서 $a_8=16\sqrt{2}$

10 [출제의도] 필요충분조건 이해하기

p는 q이기 위한 필요충분조건이므로

$(x+1)(x-2)=x^2+ax+b$

$a=-1$, $b=-2$

$a+b=-3$

11 [출제의도] 미분계수 이해하기

함수 $f(x)=x^2+4x-2$에서 $f(1)=3$이고

$f'(x)=2x+4$ 이므로 $f'(1)=6$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2$$
$$=2f'(1)=2\times 6=12$$

12 [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1=1$

$a_2=\frac{2}{1+a_1}+1=\frac{2}{2}+1=2$

$a_3=\frac{3}{1+a_2}+1=\frac{3}{3}+1=2$

$a_4=\frac{4}{1+a_3}+1=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$

따라서 $a_4=\frac{7}{3}$

13 [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

나머지정리에 의하여 $R_n=2^n$

$$\sum_{n=1}^{5}R_n=\sum_{n=1}^{5}2^n=\frac{2(2^5-1)}{2-1}=62$$

14 [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로
$x=1$에서 연속이다.
$g(x)=-x^2+a,\ h(x)=2x^2+bx+4$라 하면
$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}h(x)=f(1)$
$-1+a=6+b\ \cdots$ ㉠
또한 $f'(1)$이 존재하므로
$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$
$g'(1)=h'(1)$
$g'(x)=-2x,\ h'(x)=4x+b$이므로
$-2=4+b$
$b=-6$이고 ㉠에 의하여 $a=1$이므로 $a^2+b^2=37$

15 [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\log_a a^2b^3=\log_a a^2+\log_a b^3=2+3\log_a b=3$
이므로 $\log_a b=\frac{1}{3}$
따라서 $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}=3$

16 [출제의도] 함수의 극한 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. $\cdots$ ①
조건 (나)에 의하여 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2+x}=-1$에서
극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,
(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$
즉 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0\ \cdots$ ②
①, ②에 의하여 $f(x)=2x^2+ax$라 하면
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{x(2x+a)}{x(x+1)}=a=-1$
즉 $f(x)=2x^2-x$
따라서 $f(3)=15$

17 [출제의도] 지수법칙을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$2^{\frac{4}{a}}=100$에서 $2^4=100^a$이므로 $2^4=10^{2a}$
$25^{\frac{2}{b}}=10$에서 $25^2=10^b$이므로 $5^4=10^b$
지수법칙에 의하여
$10^{2a+b}=10^{2a}\times10^b=2^4\times5^4=10^4$
따라서 $2a+b=4$

18 [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 이용하여 추론하기

$1\cdot2n+3\cdot(2n-2)+5\cdot(2n-4)+\cdots+(2n-1)\cdot2$
$=\sum_{k=1}^{n}(\boxed{2k-1})\{2n-(2k-2)\}$
$=\sum_{k=1}^{n}(\boxed{2k-1})\{2(n+1)-2k\}$
$=2(n+1)\sum_{k=1}^{n}(\boxed{2k-1})-2\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$
$=2(n+1)\{n(n+1)-n\}-2\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{\boxed{3}}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}$
$=2(n+1)n^2-\frac{1}{3}n(n+1)(\boxed{4n-1})$
$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$
이다.

$f(k)=2k-1,\ a=3,\ g(n)=4n-1$
그러므로 $f(3)\times g(3)=5\times11=55$

19

[출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 증명과정 추론하기

(i) $n=1$일 때

$(\text{좌변})=\left(\sum_{k=1}^{1} a_k\right)^2=\boxed{4}$,

$(\text{우변})=\sum_{k=1}^{1}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{1}a_k=\boxed{4}$이므로

$(\ast)$이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\geq 1)$일 때, $(\ast)$이 성립한다고 가정하면

$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m}a_k$이므로

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1} a_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{m} a_k+a_{m+1}\right)^2$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2+2\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)a_{m+1}+(a_{m+1})^2$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m}a_k+2\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)a_{m+1}+(a_{m+1})^2$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+\left(\boxed{2m+2}\right)\sum_{k=1}^{m}a_k+(a_{m+1})^2$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+m^3+5m^2+7m+4$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+(a_{m+1})^3-(m^2+5m+4)$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m+1}a_k$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때에도 $(\ast)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(\ast)$이 성립한다.

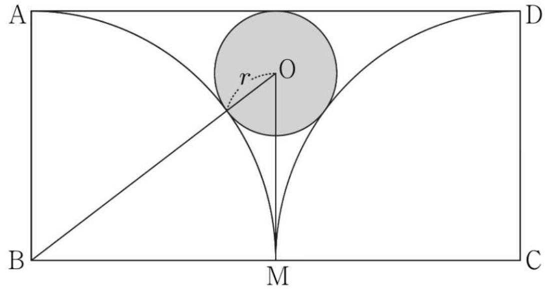
$p=4,\ f(m)=2m+2$이므로

$f(4)=10$

20

[출제의도] 등비급수를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

다음은 그림 R_1이다.



두 부채꼴의 호 MA, 호 DM과 선분 AD에 모두 접하는 원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r라 하자.

$\overline{\mathrm{BO}}^2=\overline{\mathrm{BM}}^2+\overline{\mathrm{OM}}^2$이므로

$(1+r)^2=1^2+(1-r)^2$

$r=\dfrac{1}{4},\ S_1=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\pi=\dfrac{\pi}{16}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다. $(n\geq 1)$

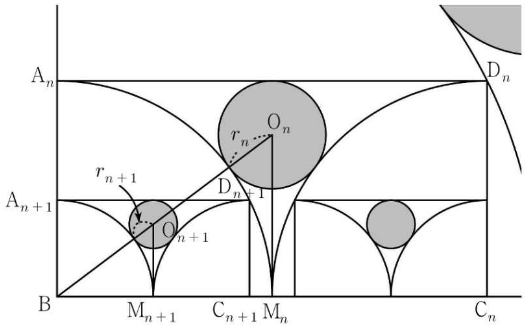


그림 R_n에서 새로 그려진 각 부채꼴에 내접하는 직사각형 중 한 꼭짓점을 B로 하는 직사각형을 $\mathrm{A}_n\mathrm{BC}_n\mathrm{D}_n$이라 하고, 직사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{BC}_n\mathrm{D}_n$ 내부의 두 부채꼴의 호와 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$에 모두 접하는 원의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n, 선분 BC_n의 중점을 M_n이라 하자.

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}}=l$이라 하면

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}}:\overline{\mathrm{BC}_{n+1}}=1:2$이므로

$\overline{\mathrm{BC}_{n+1}}=2l,\ \overline{\mathrm{BD}_{n+1}}=\sqrt{5}\,l$

또한, $\overline{\mathrm{BD}_{n+1}}=\overline{\mathrm{BM}_n}=\sqrt{5}\,l$ 이고

삼각형 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{BM}_{n+1}$과 삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{BM}_n$은

닮음이므로 $\overline{\mathrm{BM}_{n+1}}:\overline{\mathrm{BM}_n}=\overline{\mathrm{BO}_{n+1}}:\overline{\mathrm{BO}_n}$

$l:\sqrt{5}\,l=(l+r_{n+1}):(\sqrt{5}\,l+r_n)$

$r_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}r_n$

그림 R_n에서 새로 그려진 원 한 개의 넓이를

a_n이라 하면 $a_{n+1}=\dfrac{1}{5}a_n$

그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 원의 개수는

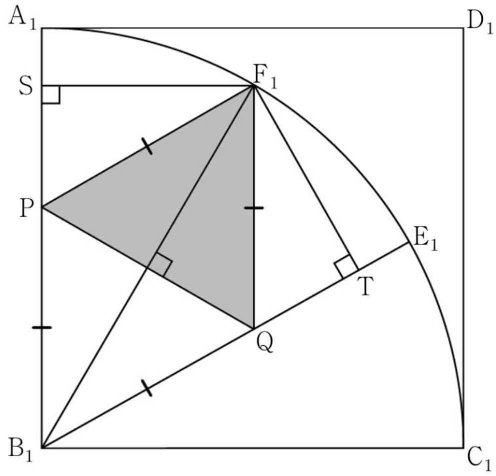
그림 R_n에서 새로 그려진 원의 개수의 2배이므로

S_n은 첫째항이 $\dfrac{\pi}{16}$이고 공비가 $\dfrac{2}{5}$인

등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{\pi}{16}}{1-\frac{2}{5}}=\dfrac{5}{48}\pi$

21 [출제의도] 등비급수를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기



부채꼴 $\mathrm{B}_1\mathrm{E}_1\mathrm{A}_1$에 내접하는 정삼각형의 꼭짓점 중 F_1이 아닌 나머지 두 점을 각각 P, Q라 하자.

점 F_1에서 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{E}_1$에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하자.

삼각형 $\mathrm{B}_1\mathrm{F}_1\mathrm{S}$와 삼각형 $\mathrm{B}_1\mathrm{F}_1\mathrm{T}$는 합동이므로

삼각형 $\mathrm{F}_1\mathrm{SP}$와 삼각형 $\mathrm{F}_1\mathrm{TQ}$는 합동이다.

$\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{P}}=\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{Q}}$이고 삼각형 $\mathrm{B}_1\mathrm{QP}$는 정삼각형이다.

$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{F}_1}=1$

$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$이므로 $S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

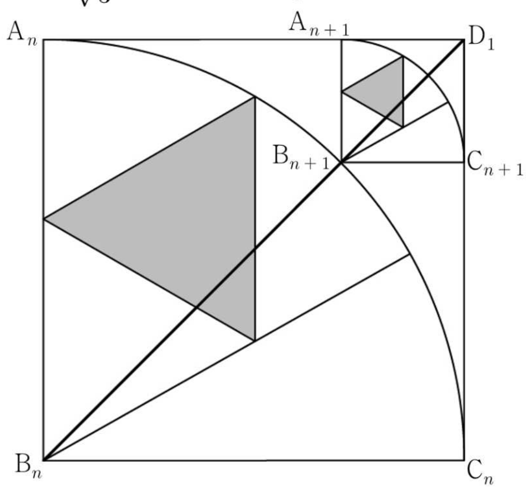


그림 $R_n(n \ge 1)$을 얻을 때, 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_1$의 한 변의 길이를 a_n이라 하고 새로 그려진 정삼각형의 넓이를 T_n이라 하자.

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_1} = \sqrt{2}\,a_n$,

$\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{D}_1} = \sqrt{2}\,a_n - a_n = (\sqrt{2}-1)a_n$

정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_1$과

정사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_1$이 닮음이므로

$a_n : a_{n+1} = \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_1} : \overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{D}_1} = \sqrt{2} : \sqrt{2}-1$

$T_n : T_{n+1} = 2 : (\sqrt{2}-1)^2$

$T_{n+1} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}T_n$ 이고

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$$

22 [출제의도] 수열의 극한값 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2-3n}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{10-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n^2}} = 5$$

23 [출제의도] 부분집합의 성질 이해하기

집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로 $n(A) = 4$

따라서 집합 A의 모든 부분집합의 개수는 $2^4 = 16$

24 [출제의도] 역함수 이해하기

함수 $f(x) = 3x-7$에서

$f^{-1}(5) = k$라 하면

역함수의 성질에 의하여

$f(k) = 3k-7 = 5$이므로 $k = 4$

따라서 $f^{-1}(5) = 4$

25 [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

$a_3 \times a_4 = a_5$에서 $\frac{1}{2}r^2 \times \frac{1}{2}r^3 = \frac{1}{2}r^4$

$r = 2$이므로 $a_7 = \frac{1}{2}\times 2^6 = 32$

26 [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1} = 12$에서 극한값이 존재하고

$x \to 1$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

$\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)-2\} = 0$에서 $f(1) = 2$이다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 12$$

$g'(x) = 2xf(x) + (x^2+1)f'(x)$이므로

$g'(1) = 2f(1) + 2f'(1)$

$\quad = 2\times 2 + 2\times 12 = 4 + 24 = 28$

27 [출제의도] 거듭제곱근 추론하기

(i) $n = 2$일 때

$(7-4)^3$의 제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 2이므로 $f(2) = 2$

(ii) $n = 3$일 때

$(7-6)^3$의 세제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 1이므로 $f(3) = 1$

(iii) $n \ge 4$일 때

$(7-2n)^3 < 0$이므로

$n = 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 100$일 때, $f(n) = 0$

$n = 5,\ 7,\ 9,\ \cdots,\ 99$일 때, $f(n) = 1$

따라서 $\sum\limits_{n=2}^{100} f(n) = 51$

28 [출제의도] 유리함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$이므로 점 P는 직선 $y = x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a)$이다.

$f(a) = \dfrac{2a}{6a-9} = a$, 즉 $a = \dfrac{11}{6}$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{11}{6},\ \dfrac{11}{6}\right)$

$\overline{\mathrm{CQ}} = \overline{\mathrm{DQ}}$이므로 점 Q는 직선 $y = -x$ 위의 점 $\mathrm{Q}(b,\ -b)$이다.

$f(b) = \dfrac{2b}{6b-9} = -b$, 즉 $b = \dfrac{7}{6}$

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{7}{6},\ -\dfrac{7}{6}\right)$

$\overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OC}} = 11 : 7$이므로

$m = 11,\ n = 7$

따라서 $m+n = 18$

29 [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

점 C 는 선분 AB 의 중점이므로 $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2}t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$

직선 AB 의 기울기가 $-\sqrt{2}$ 이므로 점 C 를 지나고 직선 AB 에 수직인 직선을 l 이라 하면 직선 l 의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{3}{2}t\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

점 D 는 직선 l 과 직선 $x=2t$ 의 교점이므로

점 D 의 좌표는 $\mathrm{D}\left(2t,\ \frac{3\sqrt{2}}{4}t\right)$

$$f(t)=\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\left(2t-\frac{3}{2}t\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}t-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}t$$

$$\lim_{t\to4}\frac{t^2-16}{f(t)-\sqrt{6}}=\lim_{t\to4}\frac{t^2-4^2}{\frac{\sqrt{6}}{4}t-\sqrt{6}}$$

$$=\lim_{t\to4}\frac{4(t-4)(t+4)}{\sqrt{6}\,(t-4)}$$

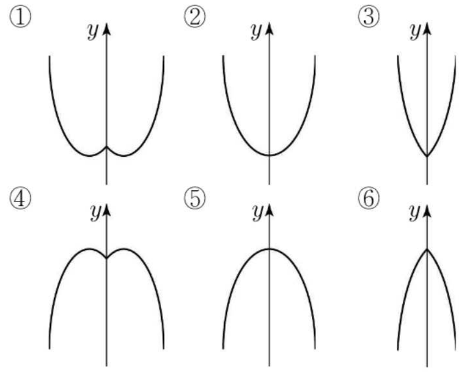
$$=\lim_{t\to4}\frac{4(t+4)}{\sqrt{6}}$$

$$=\frac{16\sqrt{6}}{3}$$

$k=\frac{16\sqrt{6}}{3}$ 이므로 $3k^2=512$

30 [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $x\geq0$ 인 부분에서의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동시킨 그래프이므로 다음과 같은 6 가지 경우의 그래프의 개형을 갖는다.

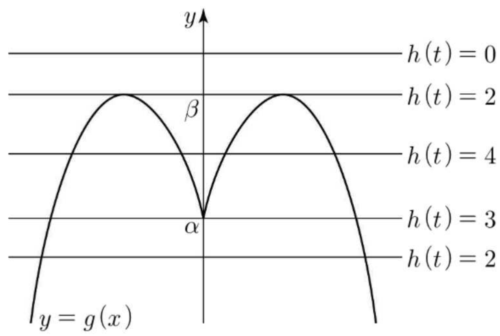


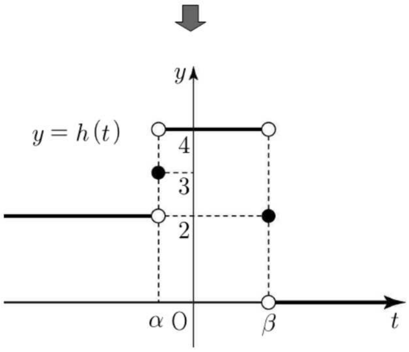
함수 $h(t)$ 가 조건 (가)의 $h(2)<h(-1)<h(0)$ 을 만족시키는 경우는 다음의 4 가지이다.

$h(2)$	$h(-1)$	$h(0)$
2	3	4
0	3	4
0	2	4
0	2	3

즉, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 ④의 경우가 유일하다.

$h(t)=3$ 을 만족시키는 t 를 α, $h(t)=2$ 를 만족시키는 t 를 $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 함수 $y=h(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.





(단, $-1 \le \alpha \le 0,\ 0 < \beta \le 2$)

조건 (나)에서 함수 $(t^2-t)h(t)$가 모든 실수 t에서 연속이려면 $t=\alpha$, $t=\beta$에서 연속이어야 한다.

$t=\alpha$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{t\to\alpha+}(t^2-t)h(t)=\lim_{t\to\alpha-}(t^2-t)h(t)$

$=(\alpha^2-\alpha)h(\alpha)$

에서 $\alpha^2-\alpha=0$, 즉 $\alpha=0,\ 1$

또, $t=\beta$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{t\to\beta+}(t^2-t)h(t)=\lim_{t\to\beta-}(t^2-t)h(t)$

$=(\beta^2-\beta)h(\beta)$

에서 $\beta^2-\beta=0$, 즉 $\beta=0,\ 1$

$\alpha=0$, $\beta=1$이므로 함수 $h(t)$는 다음과 같다.

$$h(t)=\begin{cases} 0 & (t>1) \\ 2 & (t=1) \\ 4 & (0<t<1) \\ 3 & (t=0) \\ 2 & (t<0) \end{cases}$$

이를 만족시키는 이차함수 $f(x)$는 원점을 지나고 제1사분면에서 최댓값이 1인 위로 볼록한 함수이다.

즉 $f(x)=a(x-b)^2+1 \quad (a<0,\ b>0)$

$f(0)=0$ 이므로 $ab^2=-1$

$a=-\frac{1}{b^2}$ 이고 a는 정수이므로 $b^2=1$

즉 $b=1$ 이므로 $a=-1$

$f(x)=-(x-1)^2+1=-x^2+2x$

따라서 $80f\left(\frac{1}{2}\right)=80\times\frac{3}{4}=60$