< 정답표 >

1.	⑤	**2.**	⑤	**3.**	①	**4.**	④	**5.**	④
6.	③	**7.**	④	**8.**	①	**9.**	④	**10.**	⑤
11.	⑤	**12.**	③	**13.**	④	**14.**	①	**15.**	①
16.	⑤	**17.**	④	**18.**	①	**19.**	①	**20.**	①
21.	②	**22.**	9	**23.**	25	**24.**	16	**25.**	12
26.	10	**27.**	14	**28.**	89	**29.**	12	**30.**	48

1 **출제의도** : 성분으로 나타내어진 벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$2\vec{a}-\vec{b}=2(4,1)-(3,\ -2)$

$=(8,\ 2)-(3,\ -2)$

$=(5,\ 4)$

그러므로 모든 성분의 합은 9이다.

정답 ⑤

2 **출제의도** : 삼각함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\times\frac{7x}{4x}\right)$$

$$=1\times\frac{7}{4}=\frac{7}{4}$$

정답 ⑤

3 **출제의도** : 공간좌표에서 선분의 내분점을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $\mathrm{A}(1, 3, -6)$, $\mathrm{B}(7, 0, 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times 7+1\times 1}{2+1},\ \frac{2\times 0+1\times 3}{2+1},\ \frac{2\times 3+1\times(-6)}{2+1}\right)$$

즉, $(5,\ 1,\ 0)$

따라서,

$a+b=5+1=6$

정답 ①

4 **출제의도** : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

정답 ④

5 **출제의도** : 포물선의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y^2=4\times 2\times x$에서

$\mathrm{F}(2,\ 0)$이고, 준선은 직선 $x=-2$이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=4$이므로

점 P의 x좌표는 2이다.

즉 $a=2$

$b^2=8\times 2=16$

$b>0$이므로 $b=4$

따라서

$a+b=2+4=6$

정답 ④

6

출제의도 : 주어진 범위에서 삼각방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$1+\sqrt{2}\sin 2x=0$에서

$\sin 2x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$2x=\dfrac{5\pi}{4}$ 또는 $2x=\dfrac{7\pi}{4}$

$x=\dfrac{5\pi}{8}$ 또는 $x=\dfrac{7\pi}{8}$

따라서 모든 해의 합은

$\dfrac{5\pi}{8}+\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{12\pi}{8}=\dfrac{3\pi}{2}$

정답 ③

7

출제의도 : 삼각방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$2\sin^2 x+3\cos x=3$

$2(1-\cos^2 x)+3\cos x=3$

$2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

$(\cos x-1)(2\cos x-1)=0$

$\cos x=1$ 또는 $\cos x=\dfrac{1}{2}$

이때, $0\le x<2\pi$이므로

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

따라서, 모든 해의 합은 2π이다.

정답 ④

8

출제의도 : 치환적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\displaystyle\int_1^e \frac{3(\ln x)^2}{x}\,dx$에서

$\ln x=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이고,

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int_1^e \frac{3(\ln x)^2}{x}\,dx=\int_0^1 3t^2\,dt$$
$$=\left[t^3\right]_0^1$$
$$=1$$

정답 ①

9

출제의도 : 쌍곡선의 초점의 좌표와 점근선을 이용하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

초점이 x축 위에 있고 중심이 원점이므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$라 하자.

조건 (가)에서 두 초점의 좌표가 $(5,0)$, $(-5,0)$이므로

$a^2+b^2=25$ ----- ㉠

조건 (나)에서 두 점근선이 수직이고 두 점근선의 방정식이 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$이므로

$$\left(\frac{b}{a}\right)\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$$

$b^2=a^2$ ----- ㉡

㉠과 ㉡에서

$$a^2=\frac{25}{2},\ a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

따라서, 주축의 길이는

$$2a=5\sqrt{2}$$

정답 ④

10

출제의도 : 정규분포를 따르는 실생활 상황에서 표준정규분포표를 이용하여 주어진 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

호르몬의 양의 확률변수 X라 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(30.2,\ 0.6^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-30.2}{0.6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(29.6\le X\le 31.4)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{29.6-30.2}{0.6}\le\frac{X-30.2}{0.6}\le\frac{31.4-30.2}{0.6}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

정답 ⑤

11

출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$e^y \ln x = 2y+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^y \frac{dy}{dx} \times \ln x + e^y \times \frac{1}{x} = 2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{x(e^y \ln x - 2)} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=e,\ y=0$을 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{e(1\times 1-2)} = \frac{1}{e}$$

곡선 위의 점 $(e,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0 = \frac{1}{e}(x-e)$, 즉 $y = \frac{1}{e}x - 1$

따라서 $a = \frac{1}{e}$, $b = -1$이므로

$$ab = \frac{1}{e} \times (-1) = -\frac{1}{e}$$

정답 ⑤

12

출제의도 : 표준정규분포표를 이용하여 조건을 만족시키는 σ의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$$\mathrm{P}(m \le X \le m+12) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \le m-12) &= \mathrm{P}\left(Z \le -\frac{12}{\sigma}\right)\\ &= \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{12}{\sigma}\right)\\ &= 0.5 - \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

즉 $\mathrm{P}(m \le X \le m+12) - \mathrm{P}(X \le m-12)$

$= \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right) - 0.5 + \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right)$

$= -0.5 + 2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right)$

$-0.5 + 2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right) = 0.3664$에서

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right) = 0.4332$

따라서 $\frac{12}{\sigma} = 1.5$에서 $\sigma = 8$

정답 ③

13

출제의도 : 표본평균의 분포를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

확률의 총합이 1이므로

$\frac{1}{6}+a+b=1$

$a+b=\frac{5}{6}$ -----㉠

또, $E(X^2)=\frac{16}{3}$이므로

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+2^2\times a+4^2\times b=\frac{16}{3}$

$a+4b=\frac{4}{3}$ ------㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{6}$

그러므로 확률변수 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

이때, X의 평균은

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{3}+4\times\frac{1}{6}$

$=2$

그러므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{16}{3}-2^2=\frac{4}{3}$

이때, 모집단에서 크기가 20인 표본의 표본평균이 $\overline{X}$이므로

$V(\overline{X})=\frac{1}{20}\times V(X)$

$=\frac{1}{20}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{15}$ **정답 ④**

14

출제의도 : 매개변수로 나타내어진 함수에서 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{2}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=2t-\frac{4}{t^3}$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-\frac{4}{t^3}}{1+\frac{2}{t^2}}$

따라서 $t=1$일 때

$\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

정답 ①

15

출제의도 : 독립시행의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

동전 A를 세 번 던져 나온 3개의 수의 합은 3, 4, 5, 6 중 하나이고,

동전 B를 네 번 던져 나온 4개의 수의 합은 12, 13, 14, 15, 16 중 하나이다.

(ⅰ) 7개의 수의 합이 19인 경우

두 동전을 각각 던졌을 때 나온 눈의 수의 합을 각각 a, b라 하면 7개의 수의 합이 19인 경우를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면 다음과 같다.

(3, 16), (4, 15), (5, 14), (6, 13)

이때의 확률은

$$={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^7+12\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+18\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$=\frac{35}{128}$$

(ⅱ) 7개의 수의 합이 20인 경우

두 동전을 각각 던졌을 때 나온 눈의 수의 합을 각각 a, b라 하면 7개의 수의 합이 20인 경우를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면 다음과 같다.

(4, 16), (5, 15), (6, 14)

이때의 확률은

$$={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$+{}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+12\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+6\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$=\frac{21}{128}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

구하는 확률은

$$\frac{35}{128}+\frac{21}{128}=\frac{7}{16}$$

정답 ①

16 **출제의도** : 벡터로 주어진 조건을 만족시키는 점의 위치를 정하고, 주어진 명제의 참 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$이므로

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$

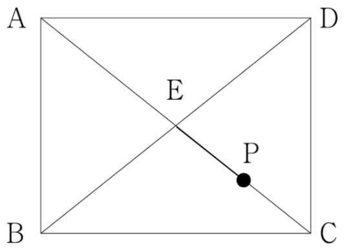
에서 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}$

ㄱ. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CP}$ (참)

ㄴ. $\dfrac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}}{2}=-\overrightarrow{PC}$

선분 BD의 중점을 E라 하면

$\overrightarrow{PE}=-\overrightarrow{PC}$



그림에서 점 P는 선분 EC의 중점이다.

따라서 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$이다. (참)

ㄷ. 삼각형 ADC의 넓이는 삼각형 ADP의 넓이의 $\dfrac{4}{3}$이므로

삼각형 ADC의 넓이는 $3\times\dfrac{4}{3}=4$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$4\times2=8$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

17 **출제의도** : 좌표공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P에서 접하고 두 점 Q, R를 포함하는 평면이 z축과 만나는 점을 S라 하고, 구 S의 중심 $(0,0,1)$을 T라 하자.

이등변삼각형 OQR에서 선분 QR의 중점을 M이라 하면

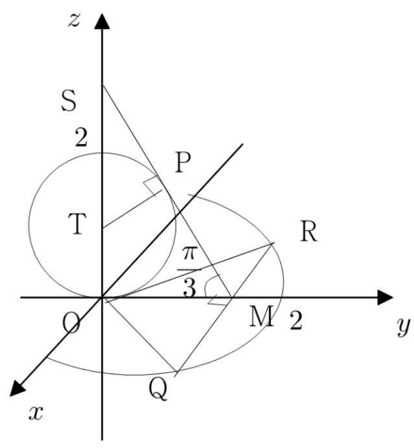
$\overline{OS}\perp(xy$평면), $\overline{OM}\perp\overline{QR}$

그러므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{SM}\perp\overline{QR}$

그러므로 두 평면이 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$이므로 직각삼각형 SOM에서

$\angle OMS=\dfrac{\pi}{3}$ -----㉠



직각삼각형 STP에서 $\angle TSP=\dfrac{\pi}{6}$이므로

$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\overline{TP}}{\overline{ST}}$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{\overline{\mathrm{ST}}}$

$\overline{\mathrm{ST}}=2$

이때, 직각삼각형 SOM에서 $\overline{\mathrm{SO}}=3$이므로 ㉠에서

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{\mathrm{SO}}}{\overline{\mathrm{OM}}}$

$\sqrt{3}=\frac{3}{\overline{\mathrm{OM}}}$

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{3}$

따라서, 이등변 삼각형 OQR에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{QR}}&=2\overline{\mathrm{MQ}}\\&=2\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^{2}-\overline{\mathrm{MO}}^{2}}\\&=2\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}\\&=2\end{aligned}$$

정답 ④

18 **출제의도** : 접선의 방정식과 관계식을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$

$y=0$일 때 $x=f(t)f'(t)+t$이므로

$\mathrm{C}(f(t)f'(t)+t,\,0)$

$\overline{\mathrm{AB}}=f(t)$, $\overline{\mathrm{BC}}=f(t)f'(t)$이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\{f(t)\}^2f'(t)$

즉 $\frac{1}{2}\{f(t)\}^2f'(t)=\frac{1}{2}\left(e^{3t}-2e^{2t}+e^{t}\right)$에서

$\{f(t)\}^2f'(t)=e^{3t}-2e^{2t}+e^{t}$

$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}\{f(t)\}^3\right]=e^{3t}-2e^{2t}+e^{t}$

$\frac{1}{3}\{f(t)\}^3=\frac{1}{3}e^{3t}-e^{2t}+e^{t}+C$

(단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=0$이므로 $C=-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}\{f(t)\}^3=\frac{1}{3}e^{3t}-e^{2t}+e^{t}-\frac{1}{3}$에서

$$\begin{aligned}\{f(t)\}^3&=e^{3t}-3e^{2t}+3e^{t}-1\\&=\left(e^{t}-1\right)^3\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=e^{x}-1$이므로

구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(e^{x}-1\right)dx&=\left[e^{x}-x\right]_0^1\\&=(e-1)-1\\&=e-2\end{aligned}$$

정답 ①

19 **출제의도** : 지수함수와 삼각함수의 극한에 관련된 내적문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

호 PQ의 길이가 π이므로 $\angle \mathrm{POQ}=\theta$라 하면

$$2^n \times \theta = \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{2^n}$$

한편,

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}=2^n$

또, 직각삼각형

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{HP}} &= \overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OH}}\\ &= 2^n - 2^n\cos\frac{\pi}{2^n}\\ &= 2^n\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)\end{aligned}$$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{HP}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2^n\times 2^n\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)\right\} \quad \text{---㉠}$$

이때, $\frac{\pi}{2^n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $t\to 0+$이므로 ㉠은

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\pi^2(1-\cos t)}{t^2}$$

$$=\pi^2\lim_{t\to 0+}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t^2(1+\cos t)}$$

$$=\pi^2\lim_{t\to 0+}\frac{\sin^2 t}{t^2(1+\cos t)}$$

$$=\pi^2\times\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\lim_{t\to 0+}\frac{1}{1+\cos t}$$

$$=\pi^2\times 1^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

정답 ①

20 **출제의도** : 중복조합의 수를 이용하여 빈칸을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ)의 경우:

n명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{{}_3\mathrm{H}_n}$이다.

(ⅱ)의 경우:

각 상자에 $\frac{2n}{3}$개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.

(ⅲ)의 경우:

두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C에는 최대 n개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 $\frac{n}{2}$개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가려면 두 상자에 들어있는 공의 개수는 각각

$\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+2,\ \cdots,\ \frac{n}{2}+\frac{n}{2}$

이므로 경우의 수는 $\boxed{\frac{n}{2}+1}$이다.

그런데 세 상자에 같은 개수의 공이 들어있는 경우를 제외해야 하므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times\left(\boxed{\frac{n}{2}+1}-1\right)$이다.

따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는

$\boxed{{}_3\mathrm{H}_n-1-\frac{3n}{2}}$이다.

$f(n)={}_3\mathrm{H}_n=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$g(n)=\frac{n}{2}+1$

$h(n)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}-1-\frac{3n}{2}$

이므로

$$\frac{f(30)}{g(30)}+h(30)=\frac{496}{16}+450$$
$$=31+450=481$$

정답 ①

21 **출제의도** : 정적분과 미분, 함수의 그래프의 방정식에의 활용을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

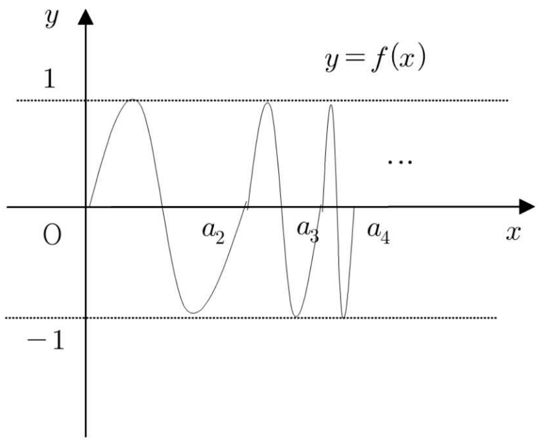
방정식 $\int_{\alpha}^{t} f(x)dx=0$에서

$\int_{\alpha}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{t} f(x)dx=0$

$\int_{0}^{t} f(x)dx=-\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\int_{0}^{t} f(x)dx$의 그래프와 직선 $y=-\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$의 교점의 개수이다.

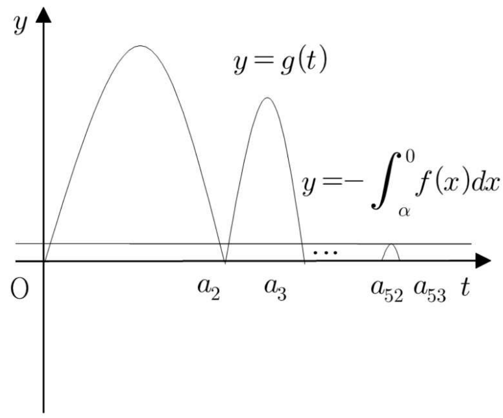
한편, $f(x)=\sin(2^n\pi x)$ $(a_n \le x \le a_{n+1})$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(t)=\int_{0}^{t} f(x)dx$라 하면

$g'(t)=f(t)$이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.

이때, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=-\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$의 교점의 개수가 103이기 위해서는 곡선 $y=g(t)$와 직선 $y=-\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$가 구간 (a_{52}, a_{53})에서 접해야 한다.



한편, 수직선 위에서 두 점 $0, a_2$의 중점을 b_1이라 하고 $n \ge 2$일 때, 두 점 a_n, a_{n+1}의 중점을 b_n이라 하면

$$\int_{0}^{b_1} f(x)dx=\int_{0}^{b_1} \sin(2\pi x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x\right]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\{(-1)-1\}=\frac{1}{\pi}$$

$$\int_{0}^{b_2} f(x)dx=\int_{0}^{a_2} f(x)dx+\int_{a_2}^{b_2} f(x)dx$$

$$=\int_{a_2}^{b_2} f(x)dx$$

$= \int_0^{\frac{1}{4}} \sin(2^2\pi x)dx$

$= \left[-\frac{1}{2^2\pi}\cos(2^2\pi x)\right]_0^{\frac{1}{4}}$

$= -\frac{1}{2^2\pi}\{(-1)-1\}$

$= \frac{1}{2\pi}$

이와 같은 방법으로 하면

$\int_0^{b_{52}} f(x)dx = \frac{1}{2^{51}\pi}$ ---- ㉠

한편,

$-\int_\alpha^0 \sin(2\pi x)dx$

$= -\left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\right]_\alpha^0$

$= \frac{1}{2\pi}\{1-(\cos 2\pi\alpha)\}$ ---- ㉡

㉠과 ㉡의 값이 같아야 하므로

$\frac{1}{2\pi}\{1-\cos(2\pi\alpha)\} = \frac{1}{2^{51}\pi}$

$1-\cos(2\pi\alpha) = \frac{1}{2^{50}}$

따라서,

$\log_2(1-\cos(2\pi\alpha))$

$= \log_2\frac{1}{2^{50}}$

$= \log_2 2^{-50} = -50$

정답 ②

22 **출제의도** : 순열의 수와 조합의 수를 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

${}_3P_2 + {}_3C_2$

$= {}_3P_2 + \frac{{}_3P_2}{2!}$

$= 3\times2 + \frac{3\times2}{2\times1}$

$= 6+3$

$= 9$

정답 9

23 **출제의도** : 로그함수의 점근선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=\log_2(x+5)$은 곡선 $y=\log_2 x$을 x축이 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

이때, 곡선 $y=\log_2 x$의 점근선은 $x=0$이므로 곡선 $y=\log_2(x+5)$의 점근선은 $x=-5$이다.

따라서, $k=-5$이므로

$k^2=25$

정답 25

24 **출제의도** : 경우의 수를 구하여 확률을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2 = 15$

2개 모두 흰 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_2 = 1$

따라서 구하는 확률이

$\frac{1}{15}$

이므로 $p+q=15+1=16$

정답 16

25 **출제의도** : 삼수선의 정리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

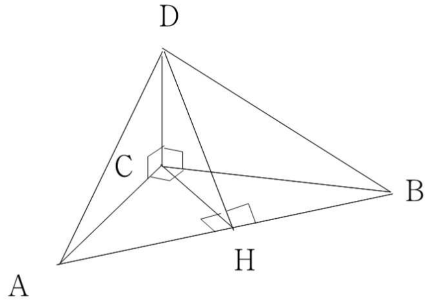
정답풀이 :

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{DC}} \perp$(평면ABC), $\overline{\mathrm{DH}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{CH}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$



한편 삼각형 ABD의 넓이가 20이고 $\overline{\mathrm{AB}}=8$이므로

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{DH}} = 20$

$\frac{1}{2} \times 8 \times \overline{\mathrm{DH}} = 20$

$\overline{\mathrm{DH}} = 5$

직각삼각형 DCH에서

$\overline{\mathrm{DH}}^2 = \overline{\mathrm{DC}}^2 + \overline{\mathrm{CH}}^2$

$5^2 = 4^2 + \overline{\mathrm{CH}}^2$

$\overline{\mathrm{CH}} = 3$

따라서, 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{CH}} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$

정답 12

26

출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-\dfrac{\pi}{6}}{x-1}$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1}\left\{f(x)-\dfrac{\pi}{6}\right\}=0$에서 $f(x)$가 미분가능한 함수이므로 $f(1)=\dfrac{\pi}{6}$

$h(x)=(g\circ f)(x)$라 하면

$$\begin{aligned}h(1)&=g(f(1))\\&=g\left(\frac{\pi}{6}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

한편, $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$$\begin{aligned}h'(1)&=g'(f(1))f'(1)\\&=g'\left(\frac{\pi}{6}\right)f'(1)\\&=\cos\frac{\pi}{6}\times f'(1)\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}f'(1)\end{aligned}$$

이때, 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}f'(1)(x-1)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}f'(1)(0-1)$에서

$$f'(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서

$k=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$$30k^2=30\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=10$$

정답 10

27 **출제의도** : 타원의 성질을 이용하여 사각형의 둘레의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 초점의 좌표를

$\mathrm{F}(c,\ 0),\ \mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$

라 하면

$c^2=16-7=9,\ c=3$

이므로

$\mathrm{F}(3,\ 0),\ \mathrm{F}'(-3,\ 0)$

한편 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OF}}$, $\overline{\mathrm{PO}}$는 공통이므로

$\triangle\mathrm{AOP} \backsim \triangle\mathrm{FOP}$

이때, 점 P는 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{BP}}$

타원의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}}=8$

한편, $\overline{\mathrm{AF}'}=\overline{\mathrm{BF}'}=3\sqrt{2}$이므로

사각형 $\mathrm{AF}'\mathrm{BP}$의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{AF}'}+\overline{\mathrm{BF}'}&=8+3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\\&=8+6\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=8,\ b=6$이므로

$a+b=8+6=14$

정답 14

28 **출제의도** : 중복조합의 수를 이용하여 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=55$

이때, $a<2$ 또는 $b<2$인 사건을 A라 하면 A^C는 $a\ge 2$이고 $b\ge 2$인 사건이다.

$a=a'+2,\ b=b'+2$로 놓으면

$(a'+2)+(b'+2)+c=9$에서

$a'+b'+c=5$

방정식 $a'+b'+c=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c의 모든 순서쌍 (a', b', c)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

이때, $\mathrm{P}\left(A^C\right)=\dfrac{21}{55}$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}\left(A^C\right)=1-\dfrac{21}{55}=\dfrac{34}{55}$

따라서 $p=55,\ q=34$이므로

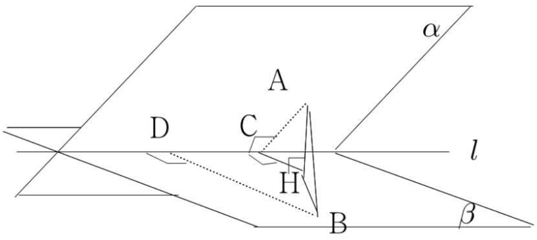
$p+q=55+34=89$

정답 89

29 **출제의도** : 직선과 평면, 평면과 평면이 이루는 각의 크기를 이용하여 사면체의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

아래 그림과 같이 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 하자.



이때, $\overline{AB}=2$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{AH}=\overline{AB}\sin\frac{\pi}{6}$

$=2\times\frac{1}{2}$

$=1$ -------㉠

또,

$\overline{BH}=\overline{AB}\cos\frac{\pi}{6}$

$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}$

한편, $\overline{AH}\perp\beta$이고 $\overline{AC}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{HC}\perp l$

이때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\angle ACH=\frac{\pi}{4}$

그러므로 직각삼각형 AHC에서

$\overline{CH}=\overline{AH}=1$

$\overline{AC}=\sqrt{2}$

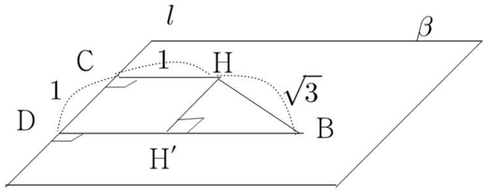
또, 직각삼각형 ACD에서 $\overline{AD}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AC}^2}$

$=\sqrt{3-2}$

$=1$ -----㉡

한편, 평면 β위의 점 H에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{BH}=\sqrt{3}$, $\overline{CH}=1$, $\overline{CD}=1$이므로 다음 그림과 같다.



이때, $\overline{HH'}=1$이므로 직각삼각형 HH′B에서

$\overline{BH'}=\sqrt{\overline{BH}^2-\overline{HH'}^2}$

$=\sqrt{3-1}$

$=\sqrt{2}$

그러므로

$\overline{BD}=\overline{BH'}+\overline{H'D}$

$=\sqrt{2}+1$ ----㉢

따라서, 사면체 ABCD의 부피는 ㉠, ㉡, ㉢에 의해

$$\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{BD}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times1\times\left\{\frac{1}{2}\times1\times(1+\sqrt{2})\right\}$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{2}$$
이므로
$$36(a+b)=36\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=12$$

정답 12

30 **출제의도** : 함수의 연속과 함수의 미분가능을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=\begin{cases} |2\sin 3x+1| & (x\ge 0) \\ |-2\sin x+1| & (x<0) \end{cases}$이므로

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $x=0$과 $g(x)=0$을 만족시키는 x의 값에서 미분가능하지 않다.

또, $\lim_{x\to0+}g'(x)=6$, $\lim_{x\to0-}g'(x)=-2$이다.

(ⅰ) 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to0+}h'(x)=\lim_{x\to0-}h'(x)$가 성립해야 한다.

$$\lim_{x\to0+}h'(x)=\lim_{x\to0+}f'(g(x))g'(x)$$
$$=\lim_{x\to0+}f'(g(x))\times\lim_{x\to0+}g'(x)$$
$$=f'(1)\times6$$
$$\lim_{x\to0-}h'(x)=\lim_{x\to0-}f'(g(x))g'(x)$$
$$=\lim_{x\to0-}f'(g(x))\times\lim_{x\to0-}g'(x)$$
$$=f'(1)\times(-2)$$

즉 $6f'(1)=-2f'(1)$에서

$f'(1)=0$ …… ㉠

(ⅱ) $g(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 α라 하자.

함수 $h(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to\alpha+}h'(x)=\lim_{x\to\alpha-}h'(x)$가 성립해야 한다.

$\lim_{x\to\alpha+} h'(x) = \lim_{x\to\alpha+} f'(g(x))g'(x)$

$= \lim_{x\to\alpha+} f'(g(x)) \times \lim_{x\to\alpha+} g'(x)$

$= f'(0) \times k$ (단, k는 양의 상수)

$\lim_{x\to\alpha-} h'(x) = \lim_{x\to\alpha-} f'(g(x))g'(x)$

$= \lim_{x\to\alpha-} f'(g(x)) \times \lim_{x\to\alpha-} g'(x)$

$= f'(0) \times (-k)$

즉 $kf'(0) = -kf'(0)$에서

$f'(0) = 0$ …… ㉡

(ⅲ) 함수 $h'(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to0+} h''(x) = \lim_{x\to0-} h''(x)$가 성립해야 한다.

$\lim_{x\to0+} h''(x)$

$= \lim_{x\to0+} [f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)]$

$= \lim_{x\to0+} f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + \lim_{x\to0+} f'(g(x))g''(x)$

$= \lim_{x\to0+} f''(g(x)) \times \lim_{x\to0+} \{g'(x)\}^2 + 0$

$= f''(1) \times 6^2$

$\lim_{x\to0-} h''(x)$

$= \lim_{x\to0-} [f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)]$

$= \lim_{x\to0-} f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + \lim_{x\to0-} f'(g(x))g''(x)$

$= \lim_{x\to0-} f''(g(x)) \times \lim_{x\to0-} \{g'(x)\}^2 + 0$

$= f''(1) \times (-2)^2$

즉 $36f''(1) = 4f''(1)$에서

$f''(1) = 0$ …… ㉢

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이고,

㉠, ㉡에서 $f'(1)=0$, $f'(0)=0$이므로

$f'(x) = 4x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f'(x) = (4x^2-4x)(x-a)$에서

$f''(x) = (8x-4)(x-a) + (4x^2-4x)$

㉢에서 $f''(1)=0$이므로

$4(1-a)+0=0$에서 $a=1$

따라서 $f'(x) = 4x(x-1)^2$이므로

$f'(3) = 4\times3\times2^2 = 48$

정답 48

[참고]

함수 $h'(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능한지 확인해보자

$\lim_{x\to\alpha+} h''(x)$

$= \lim_{x\to\alpha+} [f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)]$

$= \lim_{x\to\alpha+} f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + \lim_{x\to\alpha+} f'(g(x))g''(x)$

$= \lim_{x\to\alpha+} f''(g(x)) \times \lim_{x\to\alpha+} \{g'(x)\}^2 + 0$

$= f''(0) \times k^2$

$= \lim_{x \to 0-} f''(g(x)) \times \lim_{x \to 0-} \{g'(x)\}^2 + 0$

$= f''(1) \times (-2)^2$

즉 $36f''(1) = 4f''(1)$에서

$f''(1) = 0$ …… ㉢

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이고,

㉠, ㉡에서 $f'(1) = 0$, $f'(0) = 0$이므로

$f'(x) = 4x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f'(x) = (4x^2 - 4x)(x-a)$에서

$f''(x) = (8x-4)(x-a) + (4x^2 - 4x)$

㉢에서 $f''(1) = 0$이므로

$4(1-a) + 0 = 0$에서 $a = 1$

따라서 $f'(x) = 4x(x-1)^2$이므로

$f'(3) = 4 \times 3 \times 2^2 = 48$

정답 48

[참고]

함수 $h'(x)$가 $x = \alpha$에서 미분가능한지 확인해보자

$\lim_{x \to \alpha+} h''(x)$

$= \lim_{x \to \alpha+} [f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)]$

$= \lim_{x \to \alpha+} f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + \lim_{x \to \alpha+} f'(g(x))g''(x)$

$= \lim_{x \to \alpha+} f''(g(x)) \times \lim_{x \to \alpha+} \{g'(x)\}^2 + 0$

$= f''(0) \times k^2$

$\lim_{x \to \alpha-} h''(x)$

$= \lim_{x \to \alpha-} [f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)]$

$= \lim_{x \to \alpha-} f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + \lim_{x \to \alpha-} f'(g(x))g''(x)$

$= \lim_{x \to \alpha-} f''(g(x)) \times \lim_{x \to \alpha-} \{g'(x)\}^2 + 0$

$= f''(0) \times (-k)^2$

즉 $\lim_{x \to \alpha+} h''(x) = \lim_{x \to \alpha-} h''(x)$이므로

함수 $h'(x)$가 $x = \alpha$에서 미분가능하다.